

三角形の加法定理とは2つの角 α, β があるとき、和の $\alpha + \beta$ を表す式で正弦関数では

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (1)$$

余弦関数では

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

である。複素関数を学べば、オイラー＝ド・モアブルの公式

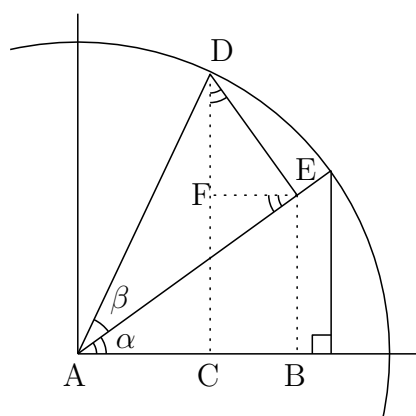
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

から、指数関数の積に対する式から

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{\alpha} e^{\beta}$$

を展開することで関係式をみることができる。例えば、余弦の和公式は $i^2 = -1$ であることの反映で角度の和が2項の差に等しくなる。

ここでは、余弦の関係を図で得られることを示そう。



単位円のなかに2つの直角三角形をならべ、中心の角度を α, β とする。AD = 1 より、

$$AC = \cos(\alpha + \beta), \quad AE = \cos \beta, \quad DE = \sin \beta$$

$$AB = AE \cos \alpha = \cos \alpha \cos \beta$$

$$BC = EF = DE \sin \alpha = \sin \alpha \sin \beta$$

よって $AB = AC + BC$ であるから、

$$\cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta$$

移項をすることで 関係式 (2) が得られた。

正弦関数の関係は同様に y 軸への高さによる関係から求められる。CD = CF + FD から、

$$DE = \sin \beta, \quad AE = \cos \beta$$

$$DF = DE \cos \alpha = \cos \alpha \sin \beta$$

$$FC = BE = AE \sin \alpha = \sin \alpha \cos \beta$$

したがって $CD = \sin(\alpha + \beta)$ であるから、(1) 式が示される。

(以上)