

Euler-e の収束比較

1 不思議な e の性質

Wikipedia によると、ネイピアの数 e とは数学定数で、自然対数の底であるとし、自然対数においては $\log x = \log_e x$ とするが、常用対数では底を 10 とするが、日本では $\log$ も同時に使われる。しかし区別をするために、欧米では $\log x$ を常用対数とし、一方の自然対数を $\ln x$ とすることが多いし、カシオ計算機の関数電卓ではこのような表示をしている。厳密にネイピア数そのものを見出したのはヤコブ・ベルヌーイと言われており、複利の計算、つまりべき乗計算 $a(1+r)^n$ をしたと説明されている。しかしもともとの歴史を紐解くと、べき乗の計算は「正の整数乗の積」を求めるが、対数の発見として、天体力学の歴史を振り返るほうが、その発展に感激するとおもわれるので、数学の歴史書を調べてみるとよい。

有名な逸話などでも知られているように、ブラーエの観測データ、ケプラーの法則などは道具としての計算機がおこなわれず、算術として素晴らしい発見がなされている。有名なラプラス (Pierre Simon Laplace: 1749-1827) は「対数の計算は天文学者の寿命を 2 倍に延ばした」という。たとえば、「第 3 法則 (調和の法則): 惑星の公転周期の 2 乗は、軌道長半径の 3 乗に比例する」と結論付けたから、観測データの極めて桁の大きい複雑な数値データ、平方、立方、平方根、立方根を計算してははずである。参考: F.Cajori; History of the Exponential and Logarithmic Concepts I, The American Mathematical Monthly, 20(1913), 4-14. J.Havil; Gamma exploring euler's constant, (2003, Princeton UP), 山本義隆「小数と対数の発見」(日本評論社、2018)

オイラーの e は微積の要石に近いし、記号自体もオイラーに由来するが、とにかく計算、計算、計算であり、Havil によると、 w を “infinity small” ならば $\ell[(1+w)] = w$ とする。つまりべき乗 $(1+w)^n$ が $\ell[(1+w)^n] = \ell[(1+w) \cdots (1+w)] = w + \cdots + w = nw$ と和になるような “何か” を考えたのである。積の計算が和の形に変形できたのである。これが対数である。多くの人々がこれを記録している (Gibson: History of Scotch Mathematics)。Havil の本ではネイピアのクレイドルという章でこの歴史を述べている。

2 ネイピアのいろいろなクレイドル

S.K.Khatti; Journal of Mathematics research Vol.1, No.2 (2009)

<http://www.ccsenet.org/jmr>

の論文では以下の数列を述べている。もちろんすべて極限は e である。

定義:

$$e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828182845904523536028741352 \text{ etc}$$

以下は極限への挙動を比較した数値表である。 e の値は繰り返しで計算 (数列の極限) で求められるし、グラフで表すほうがより理解し易いかもしれない。意外とというか、再帰形の簡便さと収束の速さとは、やはり一長一短というところであろう。クレイドルも乗り心地はさまざま!

	sequence: a_n	monotone	$n = 20$	$n = 50$	$a_{50} - a_{20}$
(i)	$(1 + 1/n)^n$	increase	2.653298	2.691588	+0.03829
(ii)	$(1 + 1/n)^{n+1}$	decrease	2.785963	2.745420	-0.040543
(iii)	$(n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$	decrease	2.718565	2.718327	-0.000238
(iv)	$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$	increase	2.408373	2.566306	+0.15793
(v)	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)$	decrease	2.719630	2.718504	-0.001126
(vi)	$\left(\frac{1+1/n}{1-1/n}\right)^{n/2} = \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n-1}}\right)^n$	decrease	2.720551	2.718644	-0.001907
(vii)	$(n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{n-1}{(1-1/n)^n}$	decrease	2.718565	2.718327	-0.000238
(viii)	$\frac{(2n-1)(n-1)^{n-1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \frac{1}{1-1/2n}}$	increase	2.717984	2.718236	+0.00025
(ix)	$(1 + 1/n)^{n+0.5}$	decrease	2.71882	2.71837	-0.00045

いくつかの注意点：(i) は定義式であるから、収束の速さはこれを基準にしてみるといいかも知れない。この (i) は単調増加であるが、指数部分をかえた (ii) では、単調減少であり、この二つを上側、下側計算値として、精度が把握できる。(iii) は収束列 $a_n \rightarrow \alpha$ から、 $(n+1)a_n - na_{n-1}$ をつくっている。いわゆるより高速な近似値をもとめる工夫で、たしかにより良いが、一般には手間が増える。(iv) はいままでは数列の形が大きく異なる。これは階乗の近似計算として、よく知られたスターリングの公式

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

から導かれる。 π とかが消えてしまう。まず両辺の対数をとると $\ln n! \approx \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \ln n + n \ln n - n$ となるから、 n の次数を定数や $\ln n$ を無視すると、 $\ln n! \doteq n \ln n - n$ から、 $n \doteq n \ln n - \ln n! = \ln \frac{n^n}{n!} \Rightarrow 1 \doteq \frac{1}{n} \ln \frac{n^n}{n!} = \ln \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \Rightarrow e \doteq \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ として得られる。

最終項 (ix) が簡単であるにも精度がよい。実際の計算はその意に解しないかも知れないが、これはより高度に近似計算された式の形 $(1 + 1/n)^{n+h(n)}$ の指数 $h(n)$ 部分の分数式を簡易化して $h(n) = 0.5 = \frac{1}{2}$ としたものである。詳しくはさきの論文を参照いただきたい。(ix) は後ですこし説明を加える。

2 項係数の ${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) は数え上げの順列/組合せとして、いままでは学んできたが、下のように拡張される。この正の整数はガンマ関数 $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ ($s > 0$) と関係づけられるので記憶しておくとうい。

定理 2.1. 一般化 2 項展開 (Generalized Binomial Expansion): α を 0 でない実数として、(正でも、負でも、分数でもよい) とした

$$(1+r)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} r^1 + \binom{\alpha}{2} r^2 + \binom{\alpha}{3} r^3 + \dots$$

ここで一般化 2 項係数 $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) とする。

この定理で $\alpha = n, r = \frac{1}{n}$ とおくと、各項は $k = 1, 2, \dots$ に対し、

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k! n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{k!} - \frac{1}{n} a_{k,1} + \frac{1}{n^2} a_{k,2} - \frac{1}{n^3} a_{k,3} + \cdots + (\pm) \frac{1}{n^{k-1}} a_{k,k-1} \end{aligned}$$

ここでもちいた数列 $\{a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,k-1}\}$ の意味は $\{1, 2, 3, \dots, k-1\}$ のうちから、重複を許さずに、1 個、2 個、3 個ずつ…選んだ、積の総和とする。すなわち、

$$\begin{aligned} a_{k,1} &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}, \\ a_{k,2} &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + \cdots \\ &\quad + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + \cdots \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (k-2)(k-1), \end{aligned}$$

とおいた。

$$a_{k,3} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + \cdots + (k-3)(k-2)(k-1),$$

$\dots$,

$$a_{k,k-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) = (k-1)!$$

数列は単調増加で上に有界であるから、収束は保証される。＊証明は後述の参考書をみよ。

k を固定して、 $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \rightarrow \frac{1}{k!} \Rightarrow \sum_{k=0,1,2,\dots} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

が得られる。 2 項展開 $\rightarrow$ 階乗の逆数 $\Rightarrow$ この総和 = ネイピア数

3 近似式はどこから

微積分のなかで微分と積分に関係として、特別な代表が、

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$\ln x$ はこれから学ぶ対数関数; オイラーの自然対数 (natural logarithm) である。

この関係式を積分計算での台形公式に当てはめる。(積分値) $\doteq$ (台形の面積) と近似し、

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_n^{n+1} \doteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right]$$

右辺をさらに $\frac{2n+1}{2n(n+1)} = \frac{n+1/2}{n(n+1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1/2}{n+1/2}} = \frac{1}{n + \frac{n/2}{n+1/2}} \doteq \frac{1}{n+1/2}$. 最尾の式は $\frac{n/2}{n+1/2} \doteq \frac{1}{2}$

と近似している。元の右辺を 1 になるようにすると、 $\left[n + \frac{1}{2}\right] \ln \left(\frac{n+1}{n}\right) \doteq 1 = \ln e$. よって

$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[n + \frac{1}{2}\right] \doteq \ln e$. 以上により (ix) の近似式が得られた。積分の計算を台形公式より高度の精度で近似すると、もちろんよい近似式が、分数式が複雑になってしまう。

高校では数値計算によくもちいる常用対数 (common logarithm) は、イングランドの数学者 Henry Briggs (1561-1630) がネイピアの対数とは正の実数 p に対して、 $p = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^x = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^x$ を満たす実数 x がただ一つ定めることから、この関係式 $x \rightarrow p$ の対応を対数の定義として定めた。cf: J.Havil “Gamma”

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(x^{1/n} - 1\right)$$

$$p = e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$$

4 対数はありがたいというか、

常用対数の定義からは $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$, $\log_{10} 1000 = 3$ などと、 n 桁 (けた) の数が $n - 1$ の数になって対応し、覚えるべき対数の値として $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ が記憶に残っている。

たとえば、問題 1: $\sqrt[3]{10}$ はいくつか? (解) $x = \sqrt[3]{10}$ とおくと、 $\log_{10} x = \frac{1}{3} = 0.333$ だから $\log_{10} 0.215 = 0.332438 < \log_{10} x < 0.334454 = \log_{10} 0.216$ という表読みから、大体、 $x = 2.15$ ぐらいからな、と読める。実際、“電卓では” $2.15^3 = 9.938375$ となる。問題 2: $\sqrt[5]{10}$ はいくつか? (解) $x = \sqrt[5]{10}$ とおくと、 $\log_{10} x = \frac{1}{5} = 0.2$ だから $\log_{10} 1.58 = 0.1987 < 0.2 < 0.2014 = \log_{10} 1.59$, $1.58 < \sqrt[5]{10} < 1.59$ である。

たとえば、常用対数表 <http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~yasuda/sysK0U/cit-H20/Log10-7.pdf> から、

$$1034 \times 2213 \times 3256 \times 4378 = x?$$

を計算してみよう。対数表から

$$\begin{aligned} (0) \quad \log x &= \log(1034 \times 2213 \times 3256 \times 4378) \\ &= \log 1.034 + \log 2.213 + \log 3.256 + \log 4.378 + 4 \times \log 10^3 \\ &= (\log 1.034 + \log 2.213 + \log 3.256 + \log 4.378) + 12 \end{aligned}$$

(i) 対数表から

$$\begin{aligned} \log 1.034 &= 0.0145205, & \log 0.213 &= 0.3449814, \\ \log 3.256 &= 0.5126844, & \log 4.378 &= 0.6412758 \end{aligned}$$

(ii) その和 $0.0145205 + 0.3449814 + 0.5126844 + 0.6412758 = 1.5134621$

(iii) 表から近似の値が $0.5134508 \rightarrow \log 3.261$,
 $0.5134840 \rightarrow \log 3.262$

(iv) $\log x = 13.5134621 \rightarrow \log 3.261 + 13 < \log x < \log 3.261 + 13$

(v) $3.261 \times 10^{13} < x < 3.262 \times 10^{13}$

(vi) 厳密解は数式処理のお助けて、

$$x = 32,618,358,837,856$$

を得る。現代はスーパーコンピュータを使わなくても、数値を入れ、エンターキーでプログラミングなしで、手もとのパソコンで簡単に得られてしまう世の中である。