微分の計算を直接に — ヨハン・ベルヌーイからロピタルへの手紙の問題を解く —

”The correspondence between Bernoulli and L'Hopital”

ヨハン・ベルヌーイとロピタルの間には何があったのか？

微分積分を勉強するときに必ず出てくる「ロピタルの定理」をご存知とおもいます。多くの場合には、その微分計算をする前には、「極限の計算」をしなければなりません。最初これらは無限小解析などとよばれていました。ここでは数学史としては有名なヨハンとロピタルの手紙の話、典型的なロピタルの定理の計算例題、Mathematica(ver.11.0.1) で正解とはならない 2 問（ヨハン出題）とその因数分解による解法を紹介します。その問題がどんな意味か分かりませんが、おそらく練習問題なのでしょう。

1 ヨハンからロピタルへの手紙の話

WEB ページで”de L'Hospital” を検索すると、MacTutor History of Mathematics から `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/De_LHopital.html` ロピタルを見つけられます。あまりにも微積分では有名な定理の名前になっていますから、非常に多くのヒットが「微積の勉強」や「定理の説明」として得られますが、そもそも定理の名前だけではなく、微積分の教科書を匿名で書いたとも伝わっています。ここでは Oliver Knill; The Agreement of Bernoulli with de L'Hospital, `http://www.math.harvard.edu/~knill/teaching/math1a_2011/exhibits/bernoulli/index.html` に見出すことができた、彼の数学の師であったベルヌーイとの話をみていきます。この節の内容の原典は

C. Truesdell, The New Bernoulli Edition, Isis, Vol. 49, No. 1, 1958, pages 54-62:

です。話題の中心となる 2 人の人物は？

- Guillaume de l'Hopital : ロピタル侯爵 ギヨーム・フランソワ・アントワーヌ (1661 - 1704)（Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital.
- Johann Bernoulli; ヨハン・ベルヌーイ（1667 - 1748)、スイスの数学者。フランス語読みでジャン・ベルヌーイ (Jean Bernoulli) と表記されることも。ロピタルの定理として知られる微分の平均値の定理の発見者といわれ、有名なベルヌーイ学者一族のひとり。

左側の写真：`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/De_LHopital.html`

右側の写真：`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Bernoulli_Johann.html`

定理 1 「ロピタルの定理」不定形の極限計算、たとえば；比率 $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, あるいは積 $0 \times \infty$ 差:$\infty - \infty$ などにおいて、もし微分された分数形 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が有限な確定値をもつならば、微分されていない分数形式の極限値 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ に等しい。ここで lim は、$x \to a$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$ など。

もし関数の比を考える極限値が $\dfrac{0}{0}$ の形；つまり、$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がある定数 a において、$f(a) = g(a) = 0$、分母が $g'(a) \neq 0$ で、微分可能であれば、

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \\
= \quad & \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))/(x-a)}{(g(x)-g(a))/(x-a)} = \frac{\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))/(x-a)}{\lim_{x\to a}(g(x)-g(a))/(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}
\end{aligned}
$$

1690 年頃から、ライプニッツとベルヌーイ兄弟の輝かしい論文によって,「微積分（Calculus）」は広く世界に知られるようになりました。ニュートンはイギリス、ここでは大陸での話です。この新しい科学となる最初の教科書は、1696 年「The Analyse des infiniment petits, pour intelligence des lignes courbes」(曲線の理解のための無限小解析)200 ページ余りの分量で、匿名のもとで発行されましたが、その著者はロピタルであるといわれ、幾世紀にわたって改訂されながら、標準的なテキストとして続けられてきました。今日、これに関する極限の計算は「ロピタルの公式あるいはロピタルの定理」としてよく知られているものです。ロピタルの業績はこの本以外、1692 年 25 問程度に関する問題に対する短い 4 ページ長で構成されたもの、また 6 編の出版や逆正接に関するド・ボーヌ（de Beaune's problem）の問題※ In a 1638 letter to Descartes, de Beaune posed the problem of solving the differential equation $\dfrac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = \dfrac{\alpha}{y - x}$ now seen as the first example of the inverse tangent method of deducing properties of a curve from its tangents（Florimond de Beaune、WikipediA）に解答を与え、よく知られるようになっていました。※ベルヌーイとロピタルとの間には契約があってロピタルは命名権のためにいくらかの対価を与えたということです。ロピタルの死後にベルヌーイが自分こそが定理の発見者であると暴露した（志村五郎『数学をいかに使うか』筑摩書房刊、2012 年（52 ページ））。これがこの話のひとつです。

しかしこの裏には、200 年後に印刷されたいくつかの手紙により、ジャン・ベルヌーイはライプニッツ、ヴァリニョン (※統計学 Statistics, 統計力学 Mechanics を研究、ニュートン、ライプニッツ、ベルヌーイ一家と交流) に宛てて、いままでロピタルによるものと言われた大部分はベルヌーイ自身によるものであると訴えました。特に、彼はド・ボーヌの問題の解決策とロピタルの論文における実質的な結果すべては自分のものと主張し、教科書「Analyse（解析）」の 3 あるいは 4 ページ分は自分が、パリにいた彼に講義、口述していた微分積分の内容に他ならないと述べたということです。。確かに、それは侯爵に一年近く新しい科学計算を教えていた彼であったからこそ可能であったのでしょう。彼の主張は、ロピタルの死後、不満は時間とともに増加していますが、ベルヌーイの回顧録にみれば、研究結果の公表をそう積極的でなく、彼の友人や近い親戚に関与を宣言にしただけで、そのような寡黙自体に原因があり、またロピタルに対する彼の非難の寛容さと時間の遅れが当然として疑われる原因となったと思われます。どうやらライプニッツといく人かのバーゼルでの友人だけがベルヌーイを信じていたが、フランス全般では彼の主張が馬鹿げたこととみなされたといわれました。1742 年ベルヌーイは、1691 年から 1692 年の講義でその本の第 2 部として「積分」を公開したものの、その内容はいままで認められていた第 1 部のロピタルの Analyse（解析）として、よく知られたこととみなされてしまいます。確かに、序文によれば、ジャン・ベルヌーイはロピタルに債務があり、さらにそこに特別な謝辞なしで

は彼の本を提示することができないという有名な文章が残されているからでした。

A century ago the correspondence of l'Hopital with Leibniz and Huygens was published. Herein may be traced l'Hopital's own view, or at least the view he wished his great correspondents to entertain, of his progress in calculus and in writing his treatise. Bernoulli's name is not mentioned. After this, few if any historians allowed any credit to Bernoulli's accusations. In I922 Schafheitlin found in the Public Library of Basel and published Part I of John Bernoulli's Course. It was exactly as its author had described it, and the work of l'Hopital was at once reduced to the exposition, not the content. But the explanation is more interesting than the fact, and the explanation is to be found only in the letters of the two principals. The existence and contents of these letters has been known to a limited circle for some decades, but the general public will see them for the first time in this volume. Ten were published in a thesis by 0. J. Rebel in 1934, but these are not the most informative and in particular the amazing No. 20, from which I will quote below, is not included. A fair idea of the content of the collection has been given by Spiess in an earlier publication.2 The Course and the letters together fully substantiate John Bernoulli's claims in all but some minor matters. The entire relation between l'Hopital and John Bernoulli is traced in fascinating detail by Spiess in the special preface, pages 123-157. In this review I will give only an oversimplified summary, urging the reader to enjoy for himself Spiess's own words and the following eighty-seven letters. These spread from December 1692, a month after Bernoulli's return to Basel, to a letter from l'Hopital's widow in I707.

100 年前、ライプニッツ、ホイヘンスとの間で交わされたロピタルの手紙が出版されました。ここからロピタル自身による見解をたどることができますし、あるいは少なくとも、彼の大いなる望み、すなわち研究論文や微積の発展を執筆し、人を楽しませる彼の人脈が分かります。ここには、“ベルヌーイの名前” が記載されていません。その後、歴史家はベルヌーイの告発を信用できることと明らかにしました。1922 年、 Schafheitlin は、バーゼルの公共図書館でジョン・ベルヌーイの講義録 パート I を発見したからです。それはその作者が説明していたとおりに正確だったと、ロピタルの作業は、結果の表示にとどまり、内容に深く入り込んでいませんでした。しかし、説明は、実際よりも面白いと説明がつけられ、2 つだけの原理に見出されます。これらの手紙の内容と存在とが数十年間限られた人々のサークルに知られているだけで、一般の人々にはこの本で初めて。１０巻は、1934 年 O.J.Revel による論文に発表されましたが、これらはそう有益ではなく、以下の引用元となる素晴らしい第 20 号は含まれていません。コレクションの内容の公正なアイデアは完全にジョン・ベルヌーイのすべてにクレームが、いくつかのマイナーな問題を実証一緒に以前 publication.2 にスピースによってコースや手紙を与えられています。 L'Hopital とジョン・ベルヌーイの間の全体の関係は特別な序文、ページ 123 から 157 にスピースにより魅力的な詳細にトレースされます。このレビューでは、私は自分自身のためにスピース自身の言葉と、次の八十から七文字を楽しむために読者を促す、唯一の単純化した概要を提供します。 1692 年 12 月からこれらのスプレッド、1707 年で L'Hopital の未亡人からの手紙にバーゼルへのベルヌーイの復帰、後の月。

For Bernoulli's stay in Paris we must rely on his own autobiography, written just before his death, and on a sequence of unpublished letters detailing his recollections to Pierre de Montmort in I718. After the famous meeting of the two savants in the salon of Malebranche, when Bernoulli dramatically displayed his unpublished secret weapon, the general formula for the radius of curvature of a curve, l'Hopital immediately engaged Bernoulli to give him four lessons per week. After six months of this, the scene of instruction shifted to l'Hopital's chateau in the country for three or four more months, and then Bernoulli returned to Basel. To be brief, in the following letters we find Bernoulli giving l'Hopital full information on every current topic of research and full answers to every question. Some of these l'Hopital wrote out and sent to Huygens or Leibniz. In the case of every problem of major interest to which l'Hopital has had a claim, a lesson or letter from Bernoulli stands in the background. How did this happen? We must remember that in 1691 John Bernoulli was twenty-four, an unemployed younger son of a modest mercantile family; while a younger brother of a famous mathematician, he had himself published but one important paper. L'Hopital was a Marquis of thirty, an established savant; young enough for the ambition of learning and perhaps for learning itself, but old enough for assurance and ease in a worldly society; certain of the income of a Marquis, if somewhat improvident in the use of it. While nowadays the difference in social positions seems a trifle, in 1691 it was surely enough to impress even the ebullient self-confidence of John Bernoulli when, freed of worldly cares, he was accepted as an equal and intimate friend in the elegant establishment whose presiding deity was a charming and witty Marquise. On the other side, while l'Hopital's originality is annulled and his scientific honesty somewhat tarnished by the relation, not only was his curiosity genuine and extraordinary but also from the moment of meeting it was plain that in the face of his young friend's notorious and unconquerable tactlessness, the Marquis would have to put up with a style to which his breeding had hardly accustomed him. The precise arrangements made while Bernoulli was in France we do not know. Soon after Bernoulli returned to Basel there arose a crisis over de Beaune's problem. Bernoulli had found the solution in the course of his researches on integral calculus and had put it into his Course for l'Hopital as Lesson IX. While Bernoulli was still his guest, l'Hopital sent Bernoulli's solution to Huygens, who naturally inferred that the sender was the author, the more so since in an earlier letter l'Hopital had written that he himself had found a solution. At the same time, l'Hopital published the solution under a pseudonym. A complicated sequence of published and unpublished claims and veiled insults followed. For the plan he had in mind, l'Hopital could not afford to notice even an open affront. After some mutual explanations and a delay of more than half a year, during which Bernoulli refrained from sending l'Hopital anything of importance, l'Hopital on 17 March 1694 (letter No. 20) proposed the most extraordinary agreement in the history of science:

パリのベルヌーイの滞在のために、我々は彼の死の前に書かれた彼自身の自叙伝、上および I718 でピエール・デ Montmort に彼の思い出を詳細に公開されていない文字の配列に依存しなければなりません。ベルヌーイは劇的に彼の未発表の秘密兵器、カーブの曲率半径のための一般的な式を表示したときマルブランシュのサロンで 2 学者の有名な会議の後、L'Hopital はすぐに彼に週 4 レッスンを与えるためにベルヌーイに従事しました。この 6 ヵ月後、命令のシーンは 3 つまたは 4 つ以上のヶ月間の国で L'Hopital のシャトーにシフトし、その後、ベルヌーイバーゼルに戻りました。簡潔にするために、次の文字で我々はベルヌーイは、すべての質問に研究し、完全な回答のすべての現在のトピックに関する L'Hopital 完全な情報を与えることを見つけます。これら L'Hopital の一部が出て書いたとホイヘンスやライプニッツに送信しました。 L'Hopital クレーム、ベルヌーイからの教訓や手紙を持っていた主要な関心のすべての問題の場合はバックグラウンドに立っています。どうしてそうなった？私たちは 1691 年にジョン・ベルヌーイは二十から四、ささやかな商業科の失業若い息子だったことを覚えておく必要があります。有名な数学者の弟ながら、彼は彼自身が公開さが、1 つの重要な論文を持っていました。 L'Hopital は 30 の侯爵、確立されたサヴァンました。おそらく自体を学習するための学習の野心のために十分に若いが、保証のための十分な年齢や世俗的な社会の中で容易。それを使

用することで多少向こう見ずな場合、侯爵の収入の一定。昨今の社会的位置の差は些細な事と思われる一方で 1691 年に、それは世俗的な心配事を取り除いたとき、ジョン・ベルヌーイの偶数あふれんばかりの自信を感動させる確かに十分だった、彼は主宰エレガントな建物が等しく、親密な友人として受け入れられました神格は魅力的で機知に富んだマーキーズました。 L'Hopital のオリジナリティは破棄し、彼の科学的な誠実さが多少関係により変色している⊠⊠間、他の側では、彼の好奇心が本物と異常だけでなく、それを満たした瞬間からプレーンであっただけでなく、その顔で彼の若い友人の悪名高いと不屈の要領の悪さ、侯爵は、彼の繁殖はほとんど彼に慣れていなかった先のスタイルを我慢しなければなりません。ベルヌーイは、私たちが知らないフランスにいた間に行われた正確な配置。ベルヌーイがバーゼルに戻ってまもなくド・ボーヌの問題以上の危機を生じました。ベルヌーイは、積分の彼の研究の過程で解決策を発見したとレッスン IX として L'Hopital のための彼のコースにそれを入れていました。ベルヌーイはまだ彼のゲストであったが、L'Hopital は彼自身が解決策を発見したと L'Hopital が書かれていた以前の文字であるためより多くのように、自然に送信者が著者だったと推測ホイヘンスにベルヌーイのソリューションを送りました。同時に、L'Hopital は偽名の下で解決策を発表しました。公開され、未発表の特許請求の範囲およびベールに包まれた侮辱の複雑なシーケンスが続きます。彼が念頭に置いていた計画については、L'Hopital もオープン侮辱を気づくために余裕がなかったです。いくつかの相互の説明とベルヌーイは、重要度の L'Hopital の何かを送ることを控えている中に半年以上の遅れ、後、1694 年 3 月 17 日 L'Hopital（レター第 20 号）は、科学の歴史の中で最も特別な契約を提案しました：

”I will be happy to give you a retainer of 300 pounds, beginning with the first of January of this year ... I promise shortly to increase this retainer, which I know is very modest, as soon as my affairs are somewhat straightened out ... I am not so unreasonable as to demand in return all of your time, but I will ask you to give me at intervals some hours of your time to work on what I request and also to communicate to me your discoveries, at the same time asking you not to disclose any of them to others. I ask you even not to send here to Mr. Varignon or to others any copies of the writings you have left with me; if they are published, I will not be at all pleased. Answer me regarding all this ...”

「私は自分の業務がややまっすぐにしているように私は、すぐに、私は非常に控えめである知っている、このリテーナを高めるためにまもなく約束... 今年の 1 月の最初から始まる、あなたに 300 ポンドのリテーナを与えるためにさせていただきます... 私はお返しにあなたの時間のすべてを要求するほど不合理ではないが、私はでは、私が要求するものに動作するように、また、私にはあなたの発見を通信する間隔であなたの時間のいくつかの時間を私に与えることを聞いてきます同時に他の人にそれらのいずれかを開示しないことを尋ねる、私はあなたが私に残した文章のコピー氏 Varignon に、または他の人にここに送信しないようにも、あなたを尋ね、彼らが公開されている場合、私はすべてではありません喜んで。このすべてについて答えて...」

Bernoulli's response is lost, but the next letter from l'Hopital indicates that the acceptance was speedy. From this point on, Bernoulli was a giant enchained.

ベルヌーイの応答が失われますが、L'Hopital から次の文字は受け入れがスピーディだったことを示しています。この時点から、ベルヌーイは enchained 巨人でした。

Letters 33-44 contain a scolding from l'Hopital because Bernoulli, after obediently checking, translating into Latin and transmitting to Leipzig l'Hopital's solution of a minor problem posed by Sauveur, had been unable to restrain himself from adding a note in which he generalized the problem, identified the resulting curve, and gave for the general case his own analysis consisting in one equation, replacing the 27 used by Sauveur to set the special case. L'Hopital reminded Bernoulli that he was not to publish, but to send all his works to l'Hopital, who promised to keep them secret, asserting that he had no desire to take for himself the honor of these discoveries (Letter 42). In excusing himself, Bernoulli acknowledged his faults and promised, "You have only to let me know your definite wishes, if I am to publish nothing more in my life, for I will follow them precisely and nothing more by me will be seen." When he wrote those lines in 1695, Bernoulli was as brilliant a mathematician as any living. As soon as the Analyse appeared, the financial arrangement lapsed. We should not judge l'Hopital's procedure too harshly. While perhaps financial necessity compelled Bernoulli to accept the arrangement initially, it continued after he had settled in his professorship at Groningen in 1695. L'Hopital, being a nobleman, was accustomed to pay for the services of others, and what he did would not then have been considered wrong had Bernoulli been a politician, a lawyer, perhaps even an architect. Certainly it was nothing for l'Hopital to be proud of. Careful examination of the letters in which l'Hopital reported his mathematical progress to Leibniz and Huygens shows that with one or two possible exceptions l'Hopital did not lie, but rather referred to Bernoulli in a condescending tone without acknowledging any debt whatever to him and in matters of provenance wrote in such a way as to suggest without actually asserting. Very soon John Bernoulli realized what he had sold away. The financial returns were ephemeral, and even for the few years the agreement was in force l'Hopital did not always pay the full sum due. (It would be unfair to suppose Bernoulli was his only disappointed creditor.) In Bernoulli's old age, he boasted of the princely sum for which l'Hopital had engaged him, magnifying both the amount and the duration.

ベルヌーイは、素直にラテン語に翻訳・ソヴールによってもたらされる小さな問題のライプツィヒ L'Hopital のソリューションに送信し、確認した後、メモを追加することから自分を抑えることができなかったので、手紙 33-44 は L'Hopital から叱責を含んでいる中で、彼結果の曲線を特定し、問題を一般化し、特殊なケースを設定するためにソヴールによって使用される 27 を交換し、一般的なケースのための 1 つの方程式になる彼自身の分析を行いました。 L'Hopital は、彼が公開することなかったが、彼は自分自身のためにこれらの発見の名誉を取る欲求を持っていたことを主張し、それらを秘密にしておくことを約束 L'Hopital、（手紙 42）に彼のすべての作品を送信することベルヌーイを思い出しました。自分自身を excusing では、ベルヌーイは彼の欠点を認め、約束 "私は私の人生でより多くの何も公開しないことになっている場合、私は正確にそれに従うだろうと私がより何も見えませんのためにあなたは、私はあなたの明確な願いを知っているようにしかいません。」彼は 1695 年にこれらの行を書いたとき、ベルヌーイは、任意の生物のように華麗な数学者としてでした。すぐ Analyse をが現れとして、財務構成が経過しました。我々はあまりにも厳しく L'Hopital の手順を判断するべきではありません。おそらく金融必要性が最初に配置を受け入れるようにベルヌーイを余儀なくが、それはないだろう、彼は貴族であり、1695 L'Hopital でフローニンゲンでの教授職に定住した後、他のサービスの支払いに慣れた続け、彼が何をやりましたその後、間違ったベルヌーイは、政治家、弁護士、おそらく建築家であったと考えられてきました。確かにそれは L'Hopital が誇りなるために何もなかったです。 L'Hopital はライプニッツとホイヘンスに彼の数学的な進捗状況を報告する手紙の慎重な審査は、1 つまたは 2 つの可能性のある例外で L'Hopital はうそしなかったことを示しているのではなく、どのような彼に任意の債務を認めることなく、恩着せがましい口調でベルヌーイと呼ばれ、起源の問題で実際に主張することなく、示唆するような方法で書きました。非常にすぐにジョン・ベルヌーイは彼が離れて販売していたものを実現しました。財務収益は短命だった、とさえ力の合意があった数年間 L'Hopital は常にによる完全な金額を払っていません。（これは、ベルヌーイは彼の唯一の失望債権者だったと仮定する不公平であろう。）ベルヌーイの古い時代に、彼は L'Hopital は量と持続時間の両方を拡大、彼に従事していたために豪壮な和を自慢しました。

In the development of calculus as a tool in geometry and mechanics, nearly every letter from John Bernoulli to l'Hopital is an individual achievement. What is most remarkable is the lightning speed of Bernoulli's conception. His thought and expression in French are no less masterful and far clearer and more direct than in his published works in Latin or his later letters. It would be wasteful to attempt here even to name the problems treated, since these are most easily followed by aid of an index at the end of the volume. I can find no better summary of my impression from these letters than the words l'Hopital himself wrote to Bernoulli in 1695: "I am very sure that there is scarcely a geometer in the world who can be compared to you."

幾何学と力学のツールとして解析学の発展では、ジャン・ベルヌーイからロピタルへの手紙のほぼすべてが細かな成果となっています。また最も驚くべきことは、ベルヌーイの着想の電光石火的な速さです。さらにフランス語で書かれた彼の思想や表現は傲慢であり、明確ではなく、その後のラテン語や彼の手紙と同様、明確かつ直接的でもありません。ですから、得られた問題に名前をつけることも無駄であるように思われます。しかし私はロピタル自身が 1695 年にベルヌーイに書いた言葉よりも、これらの手紙から受けた印象に良い要約を見つけることができません：”私はあなたと比較できるほどの世界的に優れた幾何学者はいないとを強く確信しています。”

ビジネス向け Google 翻訳:翻訳者ツールキット

2 小手慣らしのために

ここにはロピタルの定理を知っているといとも簡単に極限値を求められる。あるいは微分を知っていなければならないというほうが流れかも知れません。ロピタルの定理として典型的な例題を wikipediA に取り上げているものなどを示しましょう。

1. まず一般の関数 $f(x)$ に対する微分、$\dfrac{0}{0}$ の形：そのものがロピタルの応用にほかなりません。$f(x)-f(a)$ を x で微分すると、$f'(x)$ ですし、$x-a$ の微分は 1 ですから、$f'(x)$ が連続ならば
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{1}=f'(a)$$
2. $\pm 0\times\infty$ の形；
$$\lim_{|x|\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(y)}{1}=1$$
3. $\infty-\infty$ の形；
$$\lim\nolimits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)=\lim\nolimits_{x\to 1}\frac{x\cdot\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}=\lim\nolimits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{\dfrac{x-1}{x}+\ln(x)}$$
$$=\quad\lim\nolimits_{x\to 1}\frac{x\cdot\ln(x)}{x-1+x\ln(x)}=\lim\nolimits_{x\to 1}\frac{1+\ln(x)}{1+1+\ln(x)}=\frac{1}{2}$$
4. $+0\times\infty$ の形；
$$\lim_{x\to 0+}x\ln(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$$
5. 0^0 の形；
$$\lim_{x\to 0+}x^x=\lim_{x\to 0+}\left(e^{\ln(x)}\right)^x=\lim_{x\to 0+}e^{x\ln(x)}=e^0=1$$

6. 石川五右衛門タイプ、砂塵は取りつくしがいかない、しかし悪者でも知恵者がいる；

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\cdots$$

悪知恵として, $y=e^x$ とおくと、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y+y^{-1}}{y-y^{-1}}=\lim_{y\to\infty}\frac{1+(-1)y^{-2}}{1-(-1)y^{-2}}=\frac{1}{1}=1$$

7. 石川五右衛門タイプ２、底なし沼、しかし歎異抄；

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1/2}+x^{-1/2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1/2)x^{-1/2}+(-1/2)x^{-3/2}}{(1/2)x^{1/2}-(-1/2)x^{-3/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-1/4)x^{-3/2}+(3/4)x^{-5/2}}{(-1/4)x^{-3/2}-(3/4)x^{-5/2}}=\cdots$$

悪知恵として, $y=\sqrt{x}$ とおくと、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y+y^{-1}}{y-y^{-1}}=\lim_{y\to\infty}\frac{1-y^{-2}}{1+y^{-2}}=\frac{1}{1}=1$$

8. 答として微分ができるけれど、行き詰まる有名な例;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{1}=!?$$

これは困った！　でもロピタルさんに頼らず、分数の計算だから,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)=1$$

と素直に求められます。

3　数式処理の助けにならない助け

★ Mathmatica（WOLFRAM MATHEMATICA 11、最新版） は間違った答えをいとも簡単に出してきた。２題ともです。この２題は、「数学史　数学 5000 年の歩み」中村滋、室井和男著、共立出版 2014 年 p.214 “ヨハン・ベルヌーイからロピタルへの手紙” に掲載されている問題です。

(i) つぎの極限値をもとめよ。

$$\lim_{x\to a}\frac{a\sqrt{ax}-x^2}{a-\sqrt{ax}}$$

では Mathematica に入力して解いてもらいましょう。

Limit[(*a*Sqrt[*ax*] − *x*^2)/(*a* − Sqrt[*ax*]), *x* → *a*]

(出力の答え)　　$-a$

という答えを得るが、残念なことに正しくない。ならば、「ロピタルの公式」の登場としよう：つまり分子と分母について、まずそれぞれを微分計算します。微分は試しに、MATHEMATICA にやらせると、（正しい答えでした） 分子の微分では、**D[*a*Sqrt[*ax*] − *x*^2, *x*]** その答えは、$\boldsymbol{-2x+\frac{a^2}{2\sqrt{ax}}}$ であるから、値 $x=a$ を代入すると **With** $\left[\boldsymbol{\{x=a\},-2x+\frac{a^2}{2\sqrt{ax}}}\right]=-2a+\frac{\sqrt{a^2}}{2}=-\frac{3}{2}a$ となる。つぎに分母を微分して **D[*a* − Sqrt[*ax*], *x*]**

$=-\frac{a}{2\sqrt{ax}}$ となり、$x=a$ と値を導入すれば、**With** $\left[\{x=a\},-\frac{a}{2\sqrt{ax}}\right]=-\frac{a}{2\sqrt{a^2}}=-\dfrac{1}{2}a$ を得るから、結局、比率をとって、

$$\lim_{x\to a}\frac{a\sqrt{ax}-x^2}{a-\sqrt{ax}}=\lim_{x\to a}\frac{-2x+\frac{a^2}{2\sqrt{ax}}}{-\frac{a}{2\sqrt{ax}}}=-\frac{2\sqrt{a^2}\left(-2a+\frac{\sqrt{a^2}}{2}\right)}{a}=3a \tag{3.1}$$

この結果 (3.1) を示すために、直接的な式変形で示してみよう。ロピタルを使わずにです。そのためには、分母と分子を因数分解します。当然、$x=a$ とするとともにゼロとなるからです。分子から。よく用いる変形で $x-a$ を取り出せばいいのですから、$\sqrt{x}-\sqrt{a}=\dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ の流儀をもちいます。

$$a\sqrt{ax}-x^2=\frac{a^2(ax)-x^4}{a\sqrt{ax}+x^2}=\frac{x(a^3-x^3)}{a\sqrt{ax}+x^2}=\frac{x(a-x)(a^2+ax+x^2)}{a\sqrt{ax}+x^2}$$

分母も同様に。

$$a-\sqrt{ax}=\frac{a^2-ax}{a^2+ax}=\frac{a-x}{a+x}$$

これから

$$\begin{aligned}\frac{a\sqrt{ax}-x^2}{a-\sqrt{ax}} &= \frac{\{x(a-x)(a^2+ax+x^2)\}/\{a\sqrt{ax}+x^2\}}{\{a-x\}/\{a+x\}}\\ &= \frac{x(a^2+ax+x^2)(a+x)}{a\sqrt{ax}+x^2} \quad\to\quad \frac{a(a^2+aa+a^2)(a+a)}{a\sqrt{aa}+a^2}=\frac{6a^3}{2a^2}=3a\end{aligned}$$

では 2 問目です。因数分解にちょっと手を焼きますが。

(ii) **つぎの極限値をもとめよ。**

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$$

さて正解を出してくれるかというと

Limit[(Sqrt[2*a*^3*x* − *x*^4] − *a*(*a*^2*x*)^(1/3))/(*a* − (*ax*^3)^(1/4)), *x* → *a*]

(出力の答え) $\frac{a\left(a^3\right)^{1/3}-\sqrt{a^4}}{-a+\left(a^4\right)^{1/4}}$

となって、ダメです。残念！ではロピタルの定理を使います。まず分子の微分を計算すると ***D*[Sqrt[2*a*^3*x* − *x*^4] − *a*(*a*^2*x*)^(1/3), *x*]** その答えは $-\frac{a^3}{3(a^2x)^{2/3}}+\frac{2a^3-4x^3}{2\sqrt{2a^3x-x^4}}$ では値を代入します。**With** $\left[\{x=a\},-\frac{a^3}{3(a^2x)^{2/3}}+\frac{2a^3-4x^3}{2\sqrt{2a^3x-x^4}}\right]$ という命令で得られる答えは $-\frac{1}{3}\left(a^3\right)^{1/3}-\frac{a^3}{\sqrt{a^4}}$ となります。では分母を微分してみましょう。***D*[*a* − (*ax*^3)^(1/4), *x*]** ですから、$-\frac{3ax^2}{4(ax^3)^{3/4}}$ となり、また値を代入して **With** $\left[\{x=a\},-\frac{3ax^2}{4(ax^3)^{3/4}}\right]$ から、$-\frac{3a^3}{4(a^4)^{3/4}}$ を得ます。

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}=\lim_{x\to a}\frac{-\frac{a^3}{3(a^2x)^{2/3}}+\frac{2a^3-4x^3}{2\sqrt{2a^3x-x^4}}}{-\frac{3ax^2}{4(ax^3)^{3/4}}}=\frac{16}{9}a \tag{3.2}$$

前問と同様に、直接、因数分解をして極限をとってみます。べき乗の指数法則から、$x=a$ を代入して、分母分子ともゼロとなっていますから、絶対、因数にもつはずです。

まず分子の変形から。

$$\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}=\frac{(2a^3x-x^4)-a^2(a^2x)^{2/3}}{\sqrt{2a^3x-x^4}+a\sqrt[3]{a^2x}}$$

この式の分子を少し工夫をして変形します。

$$\begin{aligned}
(2a^3x-x^4)-a^2(a^2x)^{2/3} &= a^3x-x^4+a^3x-a^2(a^2x)^{2/3}=(a^3-x^3)x+a^2\left(ax-(a^2x)^{2/3}\right)\\
&= (a^3-x^3)x+a^3x\left(1-a^{1/3}x^{-1/3}\right)\\
&= x(a-x)(a^2+ax+x^2)+a^3x\frac{x^{1/3}-a^{1/3}}{x^{1/3}}\\
&= x(a-x)(a^2+ax+x^2)+a^3x^{2/3}\frac{x-a}{x^{2/3}+(ax)^{1/3}+a^{2/3}}\\
&= (a-x)\left\{x(a^2+ax+x^2)-\frac{a^3x^{2/3}}{x^{2/3}+(ax)^{1/3}+a^{2/3}}\right\}
\end{aligned}$$

結局分子は

$$\frac{(2a^3x-x^4)-a^2(a^2x)^{2/3}}{\sqrt{2a^3x-x^4}+a\sqrt[3]{a^2x}}=(a-x)\left\{x(a^2+ax+x^2)-\frac{a^3x^{2/3}}{x^{2/3}+(ax)^{1/3}+a^{2/3}}\right\}\Big/\{\sqrt{2a^3x-x^4}+a\sqrt[3]{a^2x}\}$$

とにかく、因数 $x-a$ をくくりだせましたから、つぎに分母を変形します。

$$\begin{aligned}
a-\sqrt[4]{ax^3} &= a^{1/4}(a^{3/4}-x^{3/4})=a^{1/4}\frac{a^{3/2}-x^{3/2}}{a^{3/4}+x^{3/4}}\\
&= \frac{a^{1/4}}{a^{3/4}+x^{3/4}}\frac{a^3-x^3}{a^{3/2}+x^{3/2}}=(a-x)\frac{a^{1/4}}{a^{3/4}+x^{3/4}}\frac{a^2+ax+x^2}{a^{3/2}+x^{3/2}}
\end{aligned}$$

分母分子ともに因数 $a-x$ がでましたから、それぞれ $x\to a$ としてみれば、この因数を除いて分子は

$$\begin{aligned}
& \left\{x(a^2+ax+x^2)-\frac{a^3x^{2/3}}{x^{2/3}+(ax)^{1/3}+a^{2/3}}\right\}\Big/\{\sqrt{2a^3x-x^4}+a\sqrt[3]{a^2x}\}\\
= \quad & \{x(a^2+ax+x^2)-\frac{a^3x^{2/3}}{x^{2/3}+(ax)^{1/3}+a^{2/3}}\}\Big/\{\sqrt{2a^3x-x^4}+a\sqrt[3]{a^2x}\}\\
\longrightarrow \quad & \{a(a^2+aa+a^2)-\frac{a^3a^{2/3}}{a^{2/3}+(aa)^{1/3}+a^{2/3}}\}\Big/\{\sqrt{2a^3a-a^4}+a\sqrt[3]{a^2a}\}\\
& =\{3a^3-\frac{a^{11/3}}{3\,a^{2/3}}\}/\{\sqrt{a^4}+a^2\}=\frac{4a}{3}
\end{aligned}$$

また分母は

$$\frac{a^{1/4}}{a^{3/4}+x^{3/4}}\frac{a^2+ax+x^2}{a^{3/2}+x^{3/2}}\longrightarrow\frac{a^{1/4}}{a^{3/4}+a^{3/4}}\frac{a^2+aa+a^2}{a^{3/2}+a^{3/2}}=\frac{a^{1/4}}{2\,a^{3/4}}\frac{3\,a^2}{2\,a^{3/2}}=\frac{3}{4}$$

以上により、分母分子の極限値が求まりましたから、

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}=\frac{4a/3}{3/4}=\frac{16a}{9} \tag{3.3}$$

というこんな面倒な計算をサーと通り越してしまう「ロピタルの定理」のすごさを味わいました。

こちらは Mathmatica によると、正解（？）として「出力の答え」を出してくれているから、手が焼ける。

練習問題

(i) **Limit[(x^3 − a^3)/(x − a), x → a]**

(出力の答え) $3a^2$

(ii) **Limit[(x^(1/2) − a^(1/2))/(x − a), x → a]**

(出力の答え) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$

(iii) **Limit[(Sqrt[x] − Sqrt[a])/(x − a), x → a]**

(出力の答え) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$

(以上)