✍ ✍ ✍ 数学演習　ロピタルの定理　補足説明 ✍ ✍ ✍

つぎの極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a},(a>0)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{ax}},(a>0)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^{bx}},(a,b>0)$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\log(1+bx)},(b\neq 0)$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x},(a,b>0)$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{1-\cos x}$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x^2)}{\log(1+x)}$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^a\log x,(a>0)$

(16) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

(17) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$

【解】

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(1/3)x^{1/3-1}}{1}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^{2/3}}=\frac{1}{3}$　関数 $y=x^{1/3}$ の $x=1$ での微係数．微分を使わなければ、分母分子に $x^{2/3}+x^{1/3}+1$ をかけ、分子を展開、$x-1$ を打ち消して、という計算.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}(-1)}{\cos 2x\times 2}=\frac{1+1}{2}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{a\,x^{a-1}}=\frac{1}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^a}=0\ (\because a>0)$ 後述のグラフを参照

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{ax}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{ax}\times a}=\frac{1}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{ax}}=\frac{1}{a}\lim_{x\to\infty}e^{-ax}=0\ (\because a>0)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^{bx}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^{bx/a}}\right)^a=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{bx/a}}\right)^a=0$ ($\because$ 前問（４）と関数 $y=x^a$ の連続性)

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0,\ \because|\sin(x)|\leq 1$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\log(1+bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{1/\cos^2(ax)\times a}{1/(1+bx)\times b}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{(1+bx)}{\cos^2(ax)}=\frac{a}{b}\frac{1+0}{1}=\frac{a}{b}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\log(a)x}-e^{\log(b)x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(a)a^x-\log(b)b^x}{1}=\log(a)-\log(b)=\log\frac{a}{b}$

☆ $a = e^{\log(a)}$ とし、$f(x) = e^{\alpha x}$ の形 $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$。$\alpha = \log a$ で、$(a^x)' = a^x \log a$

(9) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x) - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1+x)}{2x(1+x)} = \frac{-1}{2(1+0)} = \frac{-1}{2}$

(10) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \frac{-1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{-1}{3}$

☆ $f(x) = \arctan x = \tan^{-1} x$ の微分は逆関数の微分公式から $\displaystyle f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(11) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$　☆ ロピタルの定理を 2 回適用

(12) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{(1-\cos x) + x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{(\sin x) + (\sin x + x\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin x + x\cos x}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2 + \left(\frac{x}{\sin x}\right)\cos x} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$　☆ ロピタルの定理を 2 回適用

(13) $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1+x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} \times 2x}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to \infty} \frac{2x(1+x)}{x^2+1} = \lim_{x\to \infty} \frac{2(1+1/x)}{1+1/x^2} = 2$

(14) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 x}$

$\displaystyle = \frac{1}{3} \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}$

(15) $\displaystyle \lim_{x\to +0} x^a \log x = \lim_{x\to +0} \frac{\log x}{x^{-a}} = \lim_{x\to +0} \frac{1/x}{(-a)x^{-a-1}} = \frac{-1}{a} \lim_{x\to +0} \frac{1}{x^{-a}} = \frac{-1}{a} \lim_{x\to +0} x^a = 0 \ (\because a > 0)$

☆ この極限は $0 \times (-\infty)$ の形の不定形, 最後は $y = x^a$ における a の符号に対するグラフ参照

(16) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$

☆ この極限は $\infty - \infty$ の形の不定形

(17) $\displaystyle \lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} [e^x(1 + xe^{-x})]^{1/x} = \lim_{x\to 0} (e^x)^{1/x} (1 + xe^{-x})^{1/x} = e \times \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)^{1/x}$

ここで $x \to 0$ とすると、$\displaystyle \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)^{1/x} \to e$ となり、$\displaystyle \lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x} = e^2$ となる。なぜなら $\displaystyle \frac{x}{e^x} = x\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots\right) = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \cdots$ だから、$\displaystyle r(x) = -x^2 + \frac{x^3}{2!} + \cdots$ とおくと、$\displaystyle 1 + \frac{x}{e^x} = 1 + x + r(x)$ であり、$x \to 0$ では $r(x) \to 0$ となるから、「$1 + x \to 1$」と「$\displaystyle 1 + \frac{x}{e^x} = 1 + x + r(x) \to 1$」が同時に成り立つ命題であるから。

☆ たとえば、$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0}(1+x+x^2)^{1/x} = \lim_{x\to 0}(1+x+x^2+x^3)^{1/x}$ などがなりたつ。

1　定理

定理 1.1（L'hospital Rule：）　関数 $f(x)$, $g(x)$ は点 a を含むある開区間で微分可能であり、

$$f(a) = g(a) = 0$$

であり、さらに a の近くの値 $x(\neq a)$ では、$g'(x) \neq 0$ とする。このとき

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が右辺の極限値があるとき、等式（左辺と右辺が等しい）が成り立つ。もし

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad 同時に \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

の場合でも上の命題が成立し、極限が片側であってもよい。

ロピタルの定理の証明にはつぎのコーシーの平均値の定理をもちいる。この定理は、分母の関数 $g(x) = x$ とすれば、よく知られた平均値の定理に帰着されるから、拡張していることがわかる。

定理 1.2　コーシーの平均値の定理：関数 $f(x), g(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能であるとする。(a,b) 上で $g'(x) \neq 0$ であるならば、少なくとも一つの値 c が存在して（一つの値を選ぶことができて）、

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

さまざまな場合に極限値を計算するときには、便利な方法である。証明の概要をみる。

(i) $f(a) = f(b) = 0$ の場合； 仮定から 、$x = a$ のまわりで $g'(x) \neq 0$ だから、$g'(x)$ は正か負。よって単調増加か単調減少である。コーシーの平均値の定理を閉区間 $[a,x]$ において適用することで、値 c を $a < c < x < b$ となるように選んで、$\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とできる。最後の右辺は $f(a) = g(a) = 0$ をもちいた。極限値は $x \to a+$(右側) とすると、$c \to a+$ であり、

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a+}\frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

となる。左側極限も同様に考えると、a のまわりとする値 x を、$x < a$ として、$x < c < a$ を選ぶことで、同様にして $\dfrac{f(a)-f(x)}{g(a)-g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ で、極限値は $x \to a-$(左側) とすると、$c \to a-$ であり、

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a-}\frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

極限値 L は微分の比 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ に対して $x \to a$ で存在する $(x \to a+,\ x \to a-$ が同じ値$)$ $\lim_{c\to a-}\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = L = \lim_{c\to a+}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ と仮定しているから、 極限値 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は

$$\lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

に等しい。

(ii) 正の無限大、負の無限大の場合：微分可能な関数が

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$$

さらに微分比の極限値

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

が存在すると仮定する。

この仮定から、任意の十分小さな $\epsilon > 0$ に対して、適当な $\delta > 0$ を選んで、

$$L - \epsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \epsilon \quad a < x < a + \delta \tag{1.1}$$

が成り立っている。$b = a + \delta$ とおいて $a < x < c < b = a + \epsilon$ に対し、

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(b)}{g(x)}}{1 - \frac{g(b)}{g(x)}}$$

簡単な式変形から、

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1 - \frac{g(b)}{g(x)}\right) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(b)}{g(x)}$$

さらに $r(x) = \dfrac{f(b)}{g(x)} - \dfrac{f'(c)}{g'(c)}\dfrac{g(b)}{g(x)}$ とおくと

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)} - \left(\frac{f(b)}{g(x)} - \frac{f'(c)}{g'(c)}\frac{g(b)}{g(x)}\right) = \frac{f(x)}{g(x)} - r(x) \tag{1.2}$$

この準備のもとで、(1.1) において $x = c$ とおき, (1.2) に代入すると、

$$L - \epsilon + r(x) < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \epsilon + r(x)$$

となるが、$r(x)$ の大きさは $g(x)$ が分母にあり、$x \to a+$ とすると、$g(x) \to \pm\infty$ としているから、$\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ の値は有界な値であることから、$r(x)$ の大きさは十分小さいとみなせるから、$|r(x)| < \epsilon$ とし、

$$L - 2\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + 2\epsilon, \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < 2\epsilon$$

この ϵ は十分小さいから、

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

が得られ、左側極限も同様。

(iii) $x \to \infty$ のばあい：
$x \to \infty$ 、$g'(x) \neq 0, (x > b)$ とする。$x \to -\infty$ に対しても同様。

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

の極限があると仮定する。これに対しては変換 $t=\dfrac{1}{x}$ をおこなう。つまり「$x\to\infty$」$\iff$「$t\to 0+$」仮定は

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{t\to 0+}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=L$$

合成関数の微分公式から $\dfrac{d}{dt}h(1/t)=h'(1/t)(-1)t^{-2}$ を用いて $\dfrac{[f(1/t)]'}{[g(1/t)]'}=\dfrac{f'(1/t)(-1)t^{-2}}{g'(1/t)(-1)t^{-2}}=\dfrac{f'(1/t)}{g'(1/t)}$

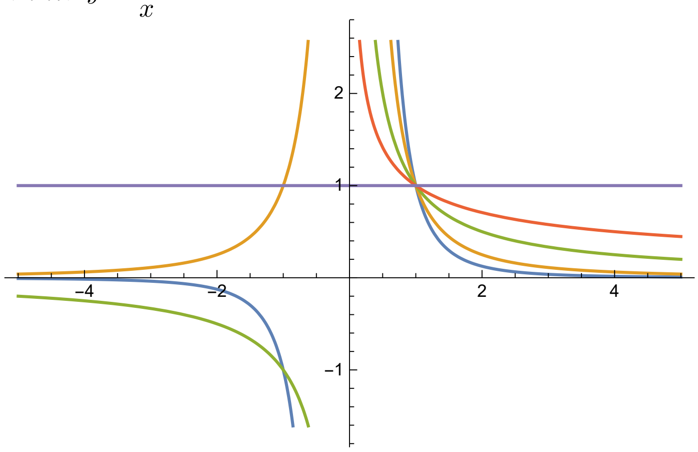
したがって、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\frac{[f(1/t)]'}{[g(1/t)]'}=L$$

2　Graphics

(1) $y=x^a;(a\le 0)$ の Graph plot : $x^a; a=-3, a=-2, a=-1, a=-1/2, a=0$

双曲線 $y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ など



(2) $y=x^a;(a\ge 0)$ の Graph plot : $x^a; a=0, a=1/2, a=1, a=2, a=3$

定数 $y=1=x^0$(ゼロ乗), 無理関数 $y=\sqrt{x}=x^{1/2}$、直線 $y=x=x^1$、放物線 $y=x^2$、3 次関数 $y=x^3$ など