

🔍 🔍 🔍 数学Ⅰの課題問題（多少の変更、加筆をしています） 🔍 🔍 🔍

問題 1 (i) 三角関数 $\sin 15^\circ = \sin \frac{\pi}{12}$ の値を平方根で表せ。

(ii) 三角関数 $\sin 75^\circ = \sin \frac{5\pi}{12}$ の値を平方根で表せ。

ヒント：6頁 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ の関係から加法定理、あるいは $3 \times 15^\circ = 45^\circ$ の関係から3倍角の定理をもちい、3次方程式を解く。 $75 = 60 + 15$ から、(ii) は得られる。

問題 2 常用対数とは底を10とする対数で、 $\text{Log}_{10}2 = 0.3010$, $\text{Log}_{10}3 = 0.4771$ などとなる。これをもちいて、

(i) $\text{Log}_{10}7$ の概算をおこなえ。

(ii) $(0.7)^5$ の概算をおこなえ。小数何位目で初めてゼロでない数が現れるか。

ヒント：常用対数は単調増加であるから、 $6 = 2 \times 3 < 7 < 2^3 = 8$ をもちい、対数をとる。(ii) $0 < M < 1$ に対して、小数第 k 位にゼロで出ない数が現れる $\Leftrightarrow -k \leq \text{Log}_{10}M < -k + 1$ である。たとえば、1桁の非ゼロ正数、 a, b, c でつぎの形とすると $0.00abc = \frac{1}{10^3} * abc$ であるから、両辺の対数をとると $\text{Log}_{10}0.00abc = -3 + \text{Log}_{10}a.bc$ であり、 $a < a.bc < 10 * (a + 1)$ より、 $\text{Log}_{10}a < \text{Log}_{10}a.bc < 1 + \text{Log}_{10}a$ より具体的には、 $\text{Log}_{10}0.05 = -1.3010$ であり、 $-2 < -1.3010 < -1$ であるから小数第2位にはじめてゼロでない数が現れる。本問では $\text{Log}_{10}0.7^5 = -0.77451$ で $0.7^5 = 0.16807$ である。

問題 3 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を 変換 $x = aX + bY$, $y = cX + dY$ により、 $XY = 1$ にするとき、 a, b, c, d はいくつにすればよいか？

問題 4 (i) $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n + 1}$, $a_1 = 1$ とするとき、 a_2, a_3, a_4, a_5 ぐらいまで計算し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ をもとめよ。

(ii) $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n + 2}$, $a_1 = 2$ とするとき、 a_2, a_3, a_4, a_5 ぐらいまで計算し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ をもとめよ。

(iii) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right)$, $x_1 = 2$ と比較せよ。どちらが収束が早いのか？

(iv) $\sqrt{7}$ に収束する分数列をつくれ。(答) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{7}{x_n} \right)$, $a_{n+1} = 2 + \frac{3}{a_n + 2}$, $a_1 = 2$