

数学 I の課題問題 (多少の変更、加筆をしています)

問題 1 (i) 三角関数 $\sin 15^\circ = \sin \frac{\pi}{12}$ の値を平方根で表せ。

(ii) 三角関数 $\sin 75^\circ = \sin \frac{5\pi}{12}$ の値を平方根で表せ。

ヒント : 6 頁 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ の関係から加法定理、あるいは $3 \times 15^\circ = 45^\circ$ の関係から 3 倍角の定理をもちい、3 次方程式を解く。75 = 60 + 15 から、(ii) は得られる。

解 (i) $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

(ii) $\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\pi - \frac{7\pi}{12} \right) = \sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \text{ (終)}$

加法定理:

$$\begin{aligned}\sin(\theta + \phi) &= \sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi), \\ \cos(\theta + \phi) &= \cos(\theta) \cos(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi),\end{aligned}$$

倍角:

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2 \sin(\theta) \cos(\theta), \\ \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1,\end{aligned}$$

別解その 1 $15^\circ = \frac{30^\circ}{2}$, をもちいて $\sin(30^\circ) = \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$, $\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, の値が分かっているから、計算できる。また $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ という 2 重根号を外すことになるが、 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (a+b) + 2\sqrt{a*b}$, $a=3, b=1$ の関係を考えれば、根号を外すことができる。(終)

3 倍角:

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) &= 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta), \\ \cos(3\theta) &= \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta),\end{aligned}$$

別解その 2 3 倍角には、 $15^\circ = \frac{45^\circ}{3}$ であって $\sin(45^\circ) = \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ が分かっている。3 次方程式と身構えてしまうが、 $8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0$ を解かねばならない。いま $t = 2x$ とおくと、 $t^3 - 3t - \sqrt{2} = 0$ になるから、係数の $1, 3 - \sqrt{2}$ から、 $t = -\sqrt{2}$ と予想され、代入してみると、これが一つの解である。これを手掛かりに数式の割り算 (因数分解) $\frac{8x^3 - 6x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}x + 1}$ は 2 次式になる (余りはゼロ、割り切れる) から、この 2 次式は、ふつうの $(x+a)^2 - b$ の形に変形して、残りの 2 つの解が得られる。正解の値は、この三つの中にあるひとつ。(終)

補足 : 比較的簡単な有理式で表される三角関数の値 :

$\sin 15^\circ$	$\sin 18^\circ$	$\sin 30^\circ$	$\sin 36^\circ$	$\sin 45^\circ$	$\sin 54^\circ$	$\sin 60^\circ$	$\sin 72^\circ$	$\sin 75^\circ$
$\cos 75^\circ$	$\cos 72^\circ$	$\cos 60^\circ$	$\cos 54^\circ$	$\cos 45^\circ$	$\cos 36^\circ$	$\cos 30^\circ$	$\cos 18^\circ$	$\cos 15^\circ$
$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{\sqrt{10}-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{\sqrt{10}+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

問題 2 常用対数とは底を 10 とする対数で、 $\text{Log}_{10}2 = 0.3010$, $\text{Log}_{10}3 = 0.4771$ などとなる。これをもちいて、

(i) $\text{Log}_{10}7$ の概算をおこなえ。

(ii) $(0.7)^5$ の概算をおこなえ。小数何位目で初めてゼロでない数が現れるか。

ヒント : 常用対数は単調増加であるから、 $6 = 2 \times 3 < 7 < 2^3 = 8$ をもちい、対数をとる。(ii) $0 < M < 1$

に対して、小数第 k 位にゼロで出ない数が現れる $\Leftrightarrow -k \leq \log_{10} M < -k + 1$ である。たとえば、1桁の非ゼロ正数、 a, b, c でつぎの形とすると $0.00abc = \frac{1}{10^3} * abc$ であるから、両辺の対数をとると $\log_{10} 0.00abc = -3 + \log_{10} a.bc$ であり、 $a < a.bc < 10 * (a + 1)$ より、 $\log_{10} a < \log_{10} a.bc < 1 + \log_{10} a$ より具体的には、 $\log_{10} 0.05 = -1.3010$ であり、 $-2 < -1.3010 < -1$ であるから小数第 2 位にはじめてゼロでない数が現れる。本問では $\log_{10} 0.7^5 = -0.77451$ で $0.7^5 = 0.16807$ である。

問題 3 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を 変換 $x = aX + bY, y = cX + dY$ により、 $XY = 1$ にするとき、 a, b, c, d はいくつにすればよいか？

解 与えられた双曲線の式に代入すると、係数を比較すると、 $a^2 - c^2 = 0, ab - cd = 1, b^2 - d^2 = 0$ を得る。これを整理すると、 $a = c, b = d$ と $a = -c, b = -d$ は不適。よって $a = -c, b = d$ または $a = c, b = -d$ である。 $ab = 1/4, cd = -1/4$ あるいはその反対の場合となるから、たとえば、符号に注意して、 $x = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y, y = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$ という形であり、長さを変えないとすると、 $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2}$ より、
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases} \quad \text{角度をもちいると、} \begin{cases} x = \cos(\pi/4)X + \sin(\pi/4)Y, \\ y = -\sin(\pi/4)X + \cos(\pi/4)Y \end{cases} \quad \text{という回転を表す変換式}$$
 である。

問題 4 (i) $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n + 1}, a_1 = 1$ とするとき、 a_2, a_3, a_4, a_5 ぐらいまで計算し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ をもとめよ。
(ii) $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n + 2}, a_1 = 2$ とするとき、 a_2, a_3, a_4, a_5 ぐらいまで計算し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ をもとめよ。
(iii) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right), x_1 = 2$ と比較せよ。どちらが収束が早いのか？
(iv) $\sqrt{7}$ に収束する分数列をつくれ。

解 (i) $x = \lim_n a_n$ とし、 $x = 1 + 2/(x + 1)$ で、 $x = \sqrt{3}$ となる。

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	$1 + \frac{2}{1+1}$	$1 + \frac{2}{2+1}$	$1 + \frac{2}{5/3+1}$	$1 + \frac{2}{7/4+1}$
= 1	= 2	= 5/3 = 1.6	= 7/4 = 1.75	= 19/11 = 1.727

(ii) $x = \lim_n a_n$ とし、 $x = 2 + 1/(x + 2)$ で、 $x = \sqrt{5}$ となる。

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	$2 + \frac{1}{2+2}$	$2 + \frac{1}{9/4+2}$	$2 + \frac{1}{38/17+2}$	$2 + \frac{1}{161/72+2}$
= 2	= 9/4 = 2.25	= 38/17 = 2.235	= 161/72 = 2.236	= 682/305 = 2.236

(iii) 初期値が同じであるとほとんど変わらない。

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	$(2 + \frac{5}{2})/2$	$(9/4 + 5 * 4/9)/2$	$(38/17 + 5 * 17/38)/2$	$2 + \frac{1}{161/72+2}$
= 2	= 9/4 = 2.25	= 38/17 = 2.235	= 161/72 = 2.236	= 682/305 = 2.236

(iv) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{7}{x_n} \right)$, または $a_{n+1} = 2 + \frac{3}{a_n + 2}, a_1 = 2, a_n$ のほうが分数の計算が楽。