

🔍 🔍 🔍 課題問題 中間期（6月） 🔍 🔍 🔍

★提出期日 2019 年 6 月 10 日、工学系は「工学」問題を含めすべての解答をすること、文系はこの「工学」問題を含めてもよいとします。解答には「別紙」を用いること。

問題 1 (i) 逆三角関数の和 $\sin^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{4}{5}$ を求めよ。

(ii) $\sin \left(2 \cos^{-1} \frac{1}{5} \right)$ の値を求めよ。

工学 (iii) $\tan \left(\cos^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{12}{13} \right)$ の値を求めよ。

ヒント：2つの和を計算するには、それぞれは角度を表すから、その値をもとめてから角度の和に対する値、たとえば加法定理などを持ちいて、その角度から、数値を計算する。合成関数であるときには、まず定義を範囲に注意して角度をもとめて、その角度の数値を計算する。

問題 2 数列の問題

(i) 数列 $\{\sqrt{n^2 + 2n} - n\}$ の極限值をもとめよ。

(ii) 数列 $\left\{ \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \right\}$ の第 $1, 2, \dots, n$ 項までの和を求め、その値に対して $n \rightarrow \infty$ とした極限值をもとめよ。

工学 (iii) 数列 $\log \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right), n = 1, 2, \dots$ の n 項までの和を求め、その値に対して $n \rightarrow \infty$ とした極限值をもとめよ。

ヒント：(i) 平方根の差に対する数列には分数をもちいた表現にする。 $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ などの変形してから、極限を考える。(ii) 2つの分数の積をそれぞれの差にして考えよ。(iii) 対数の性質。

問題 3 関数の極限を計算せよ。

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ (iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$
 工学 (iv) $\lim_{x \rightarrow 2-0} ([x^2] - [x]^2)$ 工学 (v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ 工学 (vi) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+x)}{x}$

ここで (iv) の関数 $[a]$ は a を越えない最大の整数、ガウス記号。 $x \rightarrow 2-0$ は左側極限 ($x = 2$ へ負の値から近づく)、 $x \rightarrow 2+0$ は右側極限 (正の値から近づく)

ヒント：(iv) $x = 1.5, 1.6, \dots, 1.9, 1.95, 1.99$ などと具体的に計算してみよ。2乗と整数化の順序の違いに注意する。また右側極限も考えればヒントとなる。(v) はネイピア数の定義に関するもの。(vi) は x の値の増加にもとづく、対数の増加変化を比較する。 $x = 10, 10^2, 10^3, \dots$ としていくと極限値は予想されるから、これを証明する。

問題 4 つぎの関数の微分をおこなえ。(導関数をもとめること)

(i) $y = \sqrt{x}$ (ii) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (iii) $y = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$
 工学 (iv) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ 工学 (v) $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 2})$ 工学 (vi) $y = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$

(以上)