

🔍 🔍 🔍 課題問題 中間期（6月） 🔍 🔍 🔍

★提出期日 2019 年 6 月 10 日、工学系は「工学」問題を含めすべての解答をすること、文系はこの「工学」問題を含めてもよいとします。解答には「別紙」を用いること。

問題 1 (i) 逆三角関数の和 $\sin^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{4}{5}$ を求めよ。

(ii) $\sin \left(2 \cos^{-1} \frac{1}{5} \right)$ の値を求めよ。

工学 (iii) $\tan \left(\cos^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{12}{13} \right)$ の値を求めよ。

ヒント：2つの和を計算するには、それぞれは角度を表すから、その値をもとめてから角度の和に対する値、たとえば加法定理などを持ちいて、その角度から、数値を計算する。合成関数であるときには、まず定義を範囲に注意して角度をもとめて、その角度の数値を計算する。

問題 2 数列の問題

(i) 数列 $\{\sqrt{n^2 + 2n} - n\}$ の極限值をもとめよ。

(ii) 数列 $\left\{ \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \right\}$ の第 $1, 2, \dots, n$ 項までの和を求め、その値に対して $n \rightarrow \infty$ とした極限值をもとめよ。

工学 (iii) 数列 $\log \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right), n = 1, 2, \dots$ の n 項までの和を求め、その値に対して $n \rightarrow \infty$ とした極限值をもとめよ。

ヒント：(i) 平方根の差に対する数列には分数をもちいた表現にする。 $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ などの変形してから、極限を考える。(ii) 2つの分数の積をそれぞれの差にして考えよ。(iii) 対数の性質。

問題 3 関数の極限を計算せよ。

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ (iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

工学 (iv) $\lim_{x \rightarrow 2-0} ([x^2] - [x]^2)$ 工学 (v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ 工学 (vi) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+x)}{x}$

ここで (iv) の関数 $[a]$ は a を越えない最大の整数、ガウス記号。 $x \rightarrow 2-0$ は左側極限 ($x = 2$ へ負の値から近づく), $x \rightarrow 2+0$ は右側極限 (正の値から近づく)

ヒント：(iv) $x = 1.5, 1.6, \dots, 1.9, 1.95, 1.99$ などと具体的に計算してみよ。2乗と整数化の順序の違いに注意する。また右側極限も考えればヒントとなる。(v) はネイピア数の定義に関するもの。(vi) は x の値の増加にもとづく、対数の増加変化を比較する。 $x = 10, 10^2, 10^3, \dots$ としていくと極限値は予想されるから、これを証明する。

問題 4 つぎの関数の微分をおこなえ。(導関数をもとめること)

(i) $y = \sqrt{x}$ (ii) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (iii) $y = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$

工学 (iv) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ 工学 (v) $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 2})$ 工学 (vi) $y = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$

(以上)

問題 1

(i) 逆三角関数の和 $\sin^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{4}{5}$ を求めよ。

(ii) $\sin \left(2 \cos^{-1} \frac{1}{5} \right)$ の値を求めよ。

工学 (iii) $\tan \left(\cos^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{12}{13} \right)$ の値を求めよ。

問題 1 の解

(i) $\sin^{-1} \frac{3}{5} = \theta_1$, $\sin^{-1} \frac{4}{5} = \theta_2$ とおくと、 $\sin \theta_1 = \frac{3}{5}$, $\sin \theta_2 = \frac{4}{5}$ で正の値であるから、 $0 < \theta_1, \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ となる。加法定理 $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2)$ へ値を代入すると、 $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{3}{5} \times \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} + \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} \times \frac{4}{5} = 1$ となる。よって $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\cos^{-1} = \theta$ とし、 $\cos \theta = \frac{1}{5}$ であり、2 倍角の式から、 $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \sqrt{1 - (\frac{1}{5})^2} \times \frac{1}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{25}$

(iii) $\cos \theta_1 = \frac{3}{5}$, $\sin \theta_2 = \frac{12}{13}$ として、 $\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{\sqrt{1 - (3/5)^2}}{3/5}$, $\tan \theta_2 = \frac{12/13}{\sqrt{1 - (12/13)^2}}$ を求めておく。 $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2}$ に代入すればよい。答えは $\tan(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{56}{33}$

問題 2

(i) 数列 $\{\sqrt{n^2 + 2n} - n\}$ の極限值をもとめよ。

(ii) 数列 $\left\{ \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \right\}$ の第 $1, 2, \dots, n$ 項までの和を求め、その値に対して $n \rightarrow \infty$ とした極限值をもとめよ。

工学 (iii) 数列 $\log \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$, $n = 1, 2, \dots$, の n 項までの和を求め、その値に対して $n \rightarrow \infty$ とした極限值をもとめよ。

問題 2 の解 (i) 分数有理化の逆を考える。 $\sqrt{n^2 + 2n} - n = \frac{(n^2 + 2n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \frac{2}{\sqrt{1 + 2/n} + 1}$ となるから、

答えは $\lim_{n \rightarrow \infty} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = 1$ となる。

(ii) $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right]$ であるから、

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right] \rightarrow \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(iii) 第 k 項を計算すると、 $1 - \frac{1}{(k+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) \left(1 + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{k}{k+1} \times \frac{k+2}{k+1}$ であるから、それぞれの項は対数となっているから、対数の和は積の対数となる。したがって

$$\dots + \log \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right) + \log \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2} \right) + \dots = \log \left(\dots \times \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+2}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{k+3}{k+2} \times \dots \right)$$

もっと具体的に表すと

$$\log \frac{1}{2} \frac{3}{2} + \log \frac{2}{3} \frac{4}{3} + \log \frac{3}{4} \frac{5}{4} + \dots + \log \frac{n}{n+1} \frac{n+2}{n+1} = \log \frac{1}{2} \frac{n+2}{n+1} \rightarrow \log \frac{1}{2} = -\log 2$$

問題 3

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} & \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) & \text{(iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \\
 \text{工学 (iv)} \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} ([x^2] - [x]^2) & \text{工学 (v)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} & \text{工学 (vi)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+x)}{x}
 \end{array}$$

問題 3 の解

$$\begin{array}{ll}
 \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1) = 0 \\
 \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} \\
 \text{(iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2} \\
 \text{一般に } x = a \text{ に対して、} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \\
 \star \text{微分公式の作法で計算するならば、} \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{array}$$

問題 4

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} \quad y = \sqrt{x} & \text{(ii)} \quad y = \frac{ax+b}{cx+d} & \text{(iii)} \quad \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \\
 \text{工学 (iv)} \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x}} & \text{工学 (v)} \quad y = \log(x + \sqrt{x^2 + 2}) & \text{工学 (vi)} \quad y = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}
 \end{array}$$

問題 4 の解

$$\begin{array}{ll}
 \text{(i)} \quad y = \sqrt{x} = x^{1/2} \text{ では上の問題と同様に } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \\
 \text{(ii)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a(cx+d) - (ax+b)c}{(cx+d)^2} = \frac{(ac-ad)x + ad-bc}{(cx+d)^2} \\
 \text{(iii)} \quad \frac{dy}{dx} = \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \times 2 = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \\
 \star \sin \text{ の和公式をもちいて展開し、それぞれの項を微分し、その結果を逆にまとめても同じ結論になる。} \\
 \text{(iv)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x}} \\
 \text{(v)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2}} \times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}} \times (2x) \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2}} \times \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2} + x}{\sqrt{x^2 + 2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \\
 \text{(vi)} \quad y = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2} \text{ から、} \sin y = \sqrt{1 - x^2} \text{ であり、両辺を微分する (微分の記号に注意、左辺は } y \text{ の関数 } \cos y \text{ で、右辺は } x \text{ の関数 } \sqrt{1 - x^2} \text{ となっている)、}
 \end{array}$$

$$(\cos y) dy = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \times (-2x) dx = -\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{となる。} \sin^2 y + \cos^2 y = 1 \text{ より、} \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - (1 - x^2)} = x. \text{ したがって } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$