# 第7章

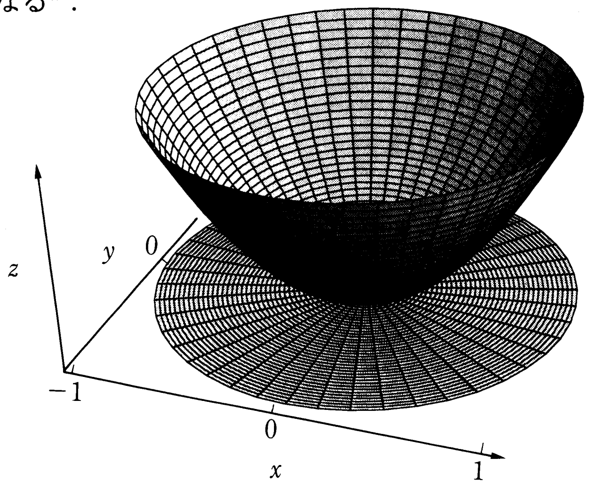
# 重積分

## 1　重積分について

1変数関数 $y = f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は区間 $[a, b]$ 上の面積を求める作業であった．同じように2変数関数 $z = f(x, y)$ の積分

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy$$

は平面の領域 $D$ 上の体積を求める作業になる．例えば $f(x, y) = x^2 + y^2$, 領域 $D = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\,\}$ （単位円盤）の場合, 重積分 $\iint_D f(x, y)\,dxdy$ は下の図の陰の部分の体積を求めることになる[1]．




この章では主に2変数関数の積分を述べるが, 一般の $n$ 変数関数の積分は2変数関数の積分から類推することができる．

[1]重積分と1変数の積分の違いは, 重積分には不定積分はないことである．したがって, 重積分においては領域 $D$ の指定のない $\iint f(x, y)\,dxdy$ はあり得ない．

まず, 領域 $D$ が座標軸に平行な閉長方形であるときの積分については, 閉長方形

$$D = \{(x,y):\ a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$$

に対して区間 $[a,b]$, $[c,d]$ を次のように分割する:

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b. \\ c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d. \end{aligned}$$

この分割によってできる閉長方形

$$D_{ij} = \{(x,y)|x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\} \quad (i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$$

全体を $D$ の**分割**といい, $\Delta$ で表す．さらに, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ $(i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$ の最大値を $|\Delta|$ で表す．$D$ で定義された関数 $f(x,y)$ に対して, 閉長方形 $D_{ij}$ のおのおのから代表点 $(\xi_{ij},\eta_{ij})$ $(x_{i-1} \leqq \xi_{ij} \leqq x_i,\ y_{j-1} \leqq \eta_{ij} \leqq y_j)$ を取り出し,

$$V(\Delta) = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$

を考える．$f(x,y) \geqq 0$ であれば, $f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$ は底面が長方形 $D_{ij}$ で, 高さが $f(\xi_{ij},\eta_{ij})$ の直方体の体積であり, $V(\Delta)$ はそれらの直方体の体積の和である．$V(\Delta)$ が分割 $\Delta$ や代表点 $(\xi_{ij},\eta_{ij})$ の取り方によらず, $|\Delta| \to 0$ のとき一定の値に近づくならば, この極限値を

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

と書き, $D$ における $f(x,y)$ の**積分** または **2 重積分** という．このとき, $f(x,y)$ は $D$ で**積分可能**であるという．したがって

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$

と書ける．領域 $D$ が普通の領域（境界がなめらかな曲線がつながったものとなっている）のとき $f(x,y)$ が連続であれば, $f(x,y)$ は $D$ で積分可能であることが知られている．

積分の定義から次の定理が成立することがわかる．

**定理 1.1.** $f(x,y)$, $g(x,y)$ が $D$ で積分可能であるとき, ただし $\alpha,\beta$ は定数とする,

(1) $\displaystyle\iint_D \{\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\}\,dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dxdy + \beta \iint_D g(x,y)\,dxdy.$

(2) $D$ で $f(x,y) \leqq g(x,y)$ ならば, $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dy \leqq \iint_D g(x,y)\,dxdy,$

(3) $f(x,y)g(x,y)$ は $D$ で積分可能である．

**Point:** (3) は $f(x,y), g(x,y)$ が連続ならば $f(x,y)g(x,y)$ も連続となるので, そのような条件で考えもよい．

最初に, 領域 $D$ が $D=[a,b]\times[c,d]$ の長方形のときに積分を求める (どのように計算すればよいのかを述べる). 重積分の定義

$$\sum_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$

を $\displaystyle\sum_j\sum_i f(x_i,y_j)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$ と考えて $\displaystyle\sum_j\left\{\sum_i f(x_i,y_j)(x_i-x_{i-1})\right\}(y_j-y_{j-1})$ として, $\{\quad\}$ の中の分割を細かくし $f(x,y_j)$ を $x$ の関数とみて, 極限をとれば $\{\quad\}$ は変数 $x$ の関数 $f(x,y_j)$ の積分であるから $\displaystyle\int_a^b f(x,y_j)dx$ となる. したがって

$$\sum_j\left(\int_a^b f(x,y_j)dx\right)(y_j-y_{j-1})$$

となるので, 次は $\displaystyle\int_a^b f(x,y_j)dx$ を $y$ の関数とみると, 分割を細かくして, 極限をとると

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

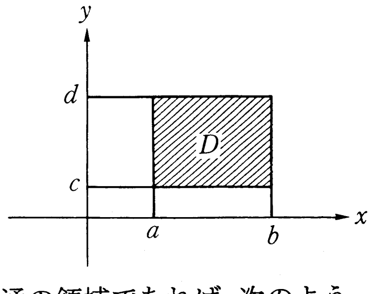
となる. 逆に進めれば $\displaystyle\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$ となるので, 次の定理を得る.

**定理 1.2.** $D=[a,b]\times[c,d]$ のとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

$\displaystyle\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy$ のような積分を**累次積分**[2] といい, $\displaystyle\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$ と表す.

**Point:** 領域 $D$ が長方形 $D=[a,b]\times[c,d]$ のときは, どちらからでもいいが, 例えばまず $y$ を定数と見て $f(x,y)$ を $x$ の1変数関数と見る. そこで, 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ $(=g(y))$ を求める. これは $y$ の式になるから, これを $y$ の関数とみて, 定積分 $\displaystyle\int_c^d g(y)dy$ を計算すればよい. 順序を逆にしても同じ値になる.




積分領域が必ずしも閉長方形領域でないときでも, それが普通の領域であれば, 次のようにして積分を計算することができる.

[2]逐次積分とも言うこともある.

**定理 1.3.** (1) $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ を $a \leqq x \leqq b$ で $\varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x)$ なる連続関数とする．積分領域 $D = \{(x,y) | a \leqq x \leqq b, \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$ で $f(x,y)$ が連続のとき

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

(2) $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ を $c \leqq y \leqq d$ で $\psi_1(y) \leqq \psi_2(y)$ なる連続関数とする．積分領域 $D = \{(x,y) | c \leqq y \leqq d, \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$ で $f(x,y)$ が連続のとき

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

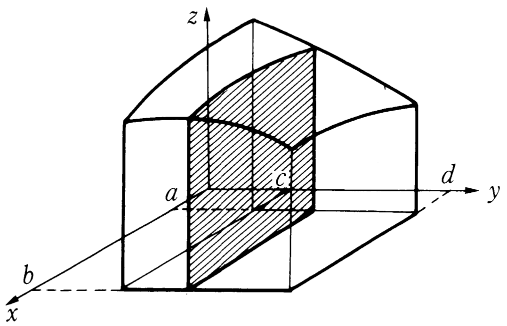
上の定理から, 次のことがいえる．

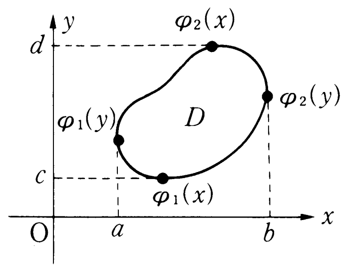
**系 1.4 (積分順序の変更)．** 積分領域 $D$ が

$$D = \{(x,y) | a \leqq x \leqq b, \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\} = \{(x,y) | c \leqq y \leqq d, \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$$

と 2 通りに表されるとき, 次のように積分順序を変更することができる．

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$




以下の例のように 2 重積分を利用して累次積分の積分順序を変えれば計算が簡単になることがある．また 2 重積分を累次積分を行って計算するとき積分の順序に注意すれば簡単になることがある．

**例 1.1.** $\displaystyle\int_0^\pi dx \int_0^1 y\cos xy\,dy$ を求めよ．

**解** $D: 0 \leqq x \leqq \pi, 0 \leqq y \leqq 1$ とする．

$$\begin{aligned}\int_0^\pi dx \int_0^1 y\cos xydy &= \iint_D y\cos xy\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^\pi y\cos xydx \\ &= \int_0^1 [\sin xy]_0^\pi\,dy = \int_0^1 \sin \pi ydy = \left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi y\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}. \ \square\end{aligned}$$

**例 1.2.** $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx$ を求めよ.

**解** $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1\} = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ より,

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2} dy = \int_0^1 \left[ye^{-x^2}\right]_0^x dx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-t}}{2} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{2}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-1}}{2} = \frac{e-1}{2e}. \ \square\end{aligned}$$

**重心**： $xy$-平面上に質点 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), \ldots, P_n(x_n,y_n)$ があるとし, 各 $P_i$ の質量は $m_i$ であるとする. この質点系の重心, つまりこの質点系が釣り合う点の座標 $(x,y)$ は

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

で与えられることが知られている.

$xy$-平面の領域 $D$ を薄い板と考え, その重心を調べる. $D$ に密度 $\rho(x,y)$ で質量が分布しているとき, すなわち $(x,y)$ を含む微小な面積 $\Delta S$ の部分の質量が $\rho(x,y)\Delta S$ であるとき, $D$ の重心は次のように考えられる.

$D$ を微少な領域 $D_1, D_2, \ldots, D_n$ に分割し, 各 $D_i$ の面積を $S_i$, また各 $D_i$ より任意に点 $P_i(x_i,y_i)$ を取る. 各 $D_i$ の質量は $\rho(x_i,y_i)\Delta S_i$ であり, この質量が点 $P_i(x_i,y_i)$ に集中しているとする. このとき質点系 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), \ldots P_n(x_n,y_n)$ の重心の座標 $(X,Y)$ は

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i,y_i)\Delta S_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i,y_i)\Delta S_i}, \qquad Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i,y_i)\Delta S_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i,y_i)\Delta S_i}$$

で与えられる. $D$ の重心 $(X_0, Y_0)$ は $D$ の分割 $\Delta$ を細かくしていったときの $X, Y$ の極限と考えられる. 2 重積分の定義より,

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i,y_i)\Delta S_i x_i = \iint_D \rho(x,y)x\,dxdy, \quad \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i,y_i)\Delta S_i y_i = \iint_D \rho(x,y)y\,dxdy,$$
$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i,y_i)\Delta S_i = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy$$

であるから,

$$X_0 = \frac{\iint_D \rho(x,y)x\,dxdy}{\iint_D \rho(x,y)\,dxdy}, \qquad Y_0 = \frac{\iint_D \rho(x,y)y\,dxdy}{\iint_D \rho(x,y)\,dxdy}$$

である．特に密度が一様であるとき $\rho(x,y)$ は定数なので，$D$ の重心 $(X_0,Y_0)$ は次のようになる．

$$X_0=\frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D dxdy},\qquad Y_0=\frac{\iint_D y\,dxdy}{\iint_D dxdy}.$$

**例 1.3.** 領域 $D: x^2\leqq y\leqq 1$ を密度が一様な薄い板と考えたとき，その重心を求めよ．

**解** $\iint_D x\,dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 x\,dy=\int_{-1}^1 x(1-x^2)\,dx=0.$

$\iint_D y\,dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 y\,dy=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^1(1-x^4)\,dx=\dfrac{4}{5}.$

また $\iint_D dxdy$ は $D$ の面積であるから，$\iint_D dxdy=2\int_0^1(1-x^2)\,dx=\dfrac{4}{3}.$

よって重心は $\left(0,\dfrac{3}{5}\right)$．□

**問 1.1.** 次の 2 重積分を求めよ．

(1) $\iint_D e^{x+y}\,dxdy\quad D:0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1$

(2) $\iint_D y\,dxdy\quad D:0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq x^2$

(3) $\iint_D x\,dxdy\quad D:0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq x$

(4) $\iint_D xy\,dxdy\quad D:0\leqq x\leqq 1, x\leqq y\leqq 1$

(5) $\iint_D (1-x-y)\,dxdy\quad D:0\leqq x, 0\leqq y, x+y\leqq 1$

(6) $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy\quad D:0\leqq x, 0\leqq y, x+y\leqq 1$

**問 1.2.** 次の 2 重積分を求めよ．

(1) $\iint_D y^2\,dxdy\quad D:0\leqq y\leqq 1, \sqrt{y}\leqq x\leqq 2-y$

(2) $\iint_D (x^2+3y)\,dxdy\quad D:0\leqq y\leqq 1, y^2\leqq x\leqq y$

(3) $\iint_D \dfrac{x}{y^2}\,dxdy\quad D:1\leqq x\leqq 2, 1\leqq y\leqq x^2$

(4) $\iint_D y\,dxdy\quad D:0\leqq y, x^2+y^2\leqq 1$

(5) $\iint_D xy\,dxdy\quad D:0\leqq x, 0\leqq y, x^2+y^2\leqq 1$

(6) $\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dxdy\quad D:0\leqq y\leqq x\leqq 1$

**問 1.3.** $f(x)$, $g(y)$ がそれぞれ $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ で連続なとき,

$$\iint_D f(x)g(y)\,dxdy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy$$

となることを示せ. ただし, $D: a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d$.

**問 1.4.** 次の累次積分の順序を交換せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$ (2) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$

(3) $\displaystyle\int_0^a dx \int_x^{2x} f(x,y)dy \quad (a>0)$ (4) $\displaystyle\int_a^b dx \int_a^{x} f(x,y)dy \quad (b>a>0)$

**問 1.5.** 領域 $D: x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y$ を密度が一様な薄い板と考えたとき, その重心を求めよ.

# 2 広義積分

重積分の定義より積分可能な関数は有界であり, 積分領域も有界であった. この節では積分の定義を拡張して有界でない関数や, 積分領域が有界でない場合にも適用できるようにする.

領域 $D$ に含まれる面積確定な有界領域の増加列 $\{S_n\}$:

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots \subseteq D$$

で, $D$ に含まれる任意の有界領域 $A$ に対して, $n$ を十分大きくとれば $A \subseteq S_n$ とできるとき $\{S_n\}$ を $D$ の**近似増加列**という. 以後, 積分領域 $D$ は近似増加列がとれるとし, また, 被積分関数は近似増加列の各有界領域上では積分可能とする.

$f(x,y)$ を領域 $D$ 上の関数[3] , $\{S_n\}$ を $D$ の近似増加列とする. 数列

$$I(S_n) = \iint_{S_n} f(x,y)\,dxdy$$

が近似増加列 $\{S_n\}$ の取り方によらず一定の極限値をもつとき, その極限値を $D$ における $f(x,y)$ の**広義積分** という. すなわち

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y)\,dxdy$$

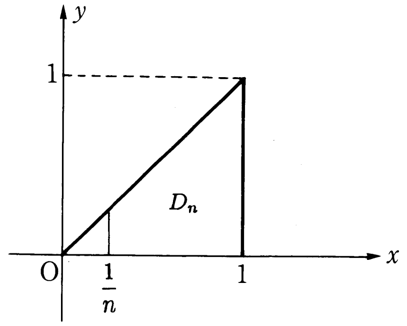
である. 積分領域 $D$ の 1 つの近似増加列 $\{S_n\}$ に対して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} |f(x,y)|\,dxdy < \infty$ ならば数列 $\{I(S_n)\}$ が極限値をもち, 他の近似増加列についても同じ極限値をもつことが知られている.

[3]ある面積 0 の $D$ の部分集合 $E$ 上で $f(x,y)$ の値が定義されていないようなものも許容する. この場合には $D$ の有界集合として $E$ の点を含まないものだけを考えることにする.

**例 2.1.** $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy \qquad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x$ を求めよ.

**解**　$D_n : \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x$ として

$I_n = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を求める.



$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} dx \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \Big[\log(y+\sqrt{x^2+y^2})\Big]_0^x dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \log(1+\sqrt{2})dx = \left(1-\frac{1}{n}\right)\log(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

$\{D_n\}$ は $D$ の近似増加列であるから,

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} I_n = \log(1+\sqrt{2}). \quad \square$$

**例 2.2.** $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4}\,dxdy \qquad D: 0 \leqq x,\ 0 \leqq y$ を求めよ.

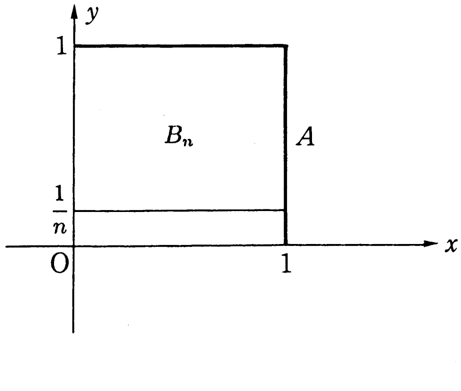
**解** $D_n : 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n$ とする.

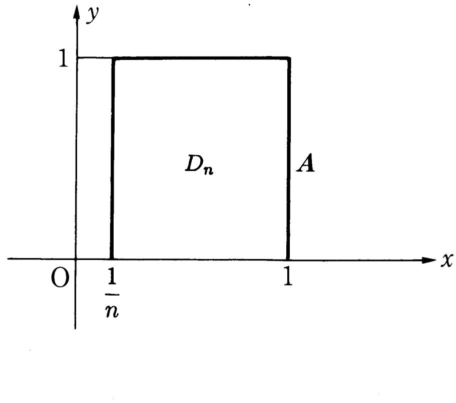
$$\begin{aligned} &\iint_{D_n} \frac{1}{(x+y+1)^4}\,dxdy = \int_0^n dx \int_0^n \frac{1}{(x+y+1)^4}dy = \int_0^n \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{(x+y+1)^3}\right]_0^n dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^n \left\{\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+n+1)^3}\right\}dx = \frac{1}{3}\frac{(-1)}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+n+1)^2}\right]_0^n \\ &= \frac{1}{6}\left\{1 + \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{2}{(n+1)^2}\right\} \to \frac{1}{6} \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

よって, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4}\,dxdy = \frac{1}{6}.$ $\square$

**例 2.3.** $D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ のとき, $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ は存在しないことを示せ.

**解** $B_n : 0 \leqq x \leqq 1, \dfrac{1}{n} \leqq y \leqq 1,\ D_n : \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1$ とする. $\{B_n\}$ と $\{D_n\}$ は $D$ の近似増加列である.



$\lim_{n\to\infty}\iint_{B_n} f(x,y)\,dxdy$ と $\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$ を求めて, 値を比べてみる.

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\iint_{B_n} f(x,y)\,dxdy &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[-\frac{x}{x^2+y^2}\right]_0^1 dy \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{-1}{1+y^2}dy = -\left[\tan^{-1} y\right]_{\frac{1}{n}}^{1} \\ &= -\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{n}\to -\frac{\pi}{4}\quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

同様に $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx = \left[\tan^{-1} x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} \\ &= \frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\frac{1}{n}\to \frac{\pi}{4}\quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

近似増加列の取り方によって極限値が異なるので, $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ は存在しない. □

**Point**: この例は累次積分が無条件に積分の順序を交換できないことをも示している. また, 累次積分ができても必ずしも 2 重積分が可能ではないことも示している.

**問 2.1.** 次の広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}\quad D: 0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y}dxdy\quad D: 0\leqq x\leqq 1, x\leqq y\leqq 1$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy\quad D: 0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq x$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y^2}\sin\frac{\pi y}{2}dxdy\quad D: 0\leqq x\leqq y^2, 0\leqq y\leqq 1$

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x-y^2}}\quad D: 0\leqq x\leqq a, y^2\leqq x$

## 3 変数変換

この節では 2 変数関数の積分の変数変換の公式について述べる. 示したいのは次の定理である.

**定理 3.1.** $uv$-平面から $xy$-平面への関数が

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

であり，$uv-$ 平面の領域 $E$ と $xy-$ 平面の領域 $D$ が 1 対 1 に対応しているとする．また，$x(u,v)$, $y(u,v)$ は $u,v$ に関して偏微分可能で，偏導関数は連続とし，$J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ とする．このとき，$D$ 上で積分可能な関数 $f(x,y)$ に対して

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f\left(x(u,v), y(u,v)\right)|J|dudv$$

が成り立つ．

**証明の概略** まず，平面の原点を O とし，2 点 $\mathrm{A}(a_1,a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,b_2)$ に対して 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって作られる平行四辺形の面積は

$$|a_1b_2 - a_2b_1|$$

であることに注意する．重積分 $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$ とは，次の和の極限であった．微小な領域 $D(x,y)$ に，領域 $D$ を分割して，

$$\sum_{D(x,y)} f(x,y)\mu(D(x,y)),$$

とする．このときの $\mu(D(x,y))$ は，領域 $D(x,y)$ の面積である．一つの微小な領域 $D(x,y)$ は領域 $E$ の中の微小な長方形 $E(u,v) = [u,u+h]\times[v,v+k]$ による，写像 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ による像であるとする．3 点 A, B, C を $\mathrm{A}(x(u,v),y(u,v))$, $\mathrm{B}(x(u+h,v),y(u+h,v))$, $\mathrm{C}(x(u,v+k),y(u,v+k))$ とする．2 変数関数のテイラー展開により

$$\begin{cases} x(u+h,v) \fallingdotseq x(u,v) + h\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} = x + h\dfrac{\partial x}{\partial u} \\ y(u+h,v) \fallingdotseq y(u,v) + h\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} = y + h\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ x(u,v+k) \fallingdotseq x(u,v) + k\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} = x + k\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ y(u,v+k) \fallingdotseq y(u,v) + k\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} = y + k\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

であるから $\mathrm{B}\left(x + h\dfrac{\partial x}{\partial u}, y + h\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)$, $\mathrm{C}\left(x + k\dfrac{\partial x}{\partial v}, x + k\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)$ と考えてよい．また，微小な領域 $D(x,y)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ によって作られる平行四辺形と考えてよいので，面積 $\mu(D(x,y))$ は，上の注意から

$$\mu(D(x,y)) = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right|\cdot hk = |J|\mu(E(u,v)).$$

したがって, 次の等式を得る.

$$\sum_{D(x,y)} f(x,y)\mu(D(x,y)) = \sum_{E(u,v)} f(x(u,v),y(u,v))|J|\mu(E(u,v)).$$

$E$ の分割 $E(u,v)$ を細かくすれば, 自動的に, その像 $D(x,y)$ によって $D$ が細かく分割されるので, 上記の等式の左辺は $\int\int_D f(x,y)dxdy$ に, 右辺は $\int\int_E f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$ に収束する. 以上で定理は示された. □

ここに出てきた $J = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}$ は **ヤコビアン** といわれ, 行列式を用いて表すと記憶しやすい. 他にも次のように書き表される.

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

**Point:** $J$ 自身の定義は行列式を用いていることより, $|J|$ は $J$ の絶対値であって, 行列式ではない.

変数変換で, 最も重要なものが, 極座標変換である. このときの $J$ は $r$ であることを暗記しておかなければならない. $r \geqq 0$ であるので, この場合は絶対値をとる必要がない.

**系 3.2.** $xy$-平面の領域 $D$ を極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

したとき, 対応する $r\theta$-平面の領域が $E$ であるとする, このとき

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta.$$

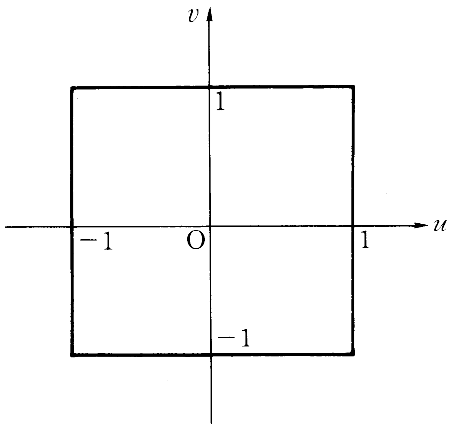
**証明** $xy$-平面の点 $(x,y) \neq (0,0)$ に対して, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad (0 < r,\ \alpha \leqq \theta < 2\pi + \alpha)$ となる $r,\theta$ は一つしか定まらないから $r\theta$-平面の点と $xy$-平面の点の対応 : $(r,\theta) \to (x,y)$ は 1 対 1 対応である. また,

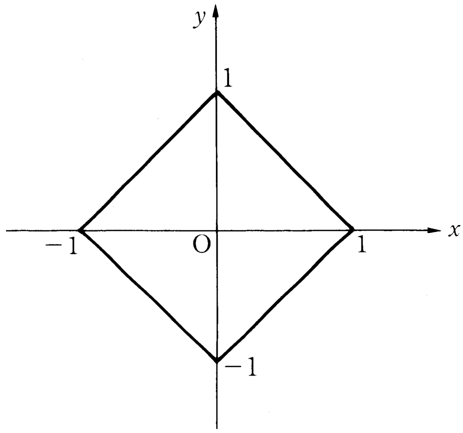
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \geqq 0$$

であるので定理 3.1 より等式が成立する. □

**例 3.1.** $\iint_D \sqrt{x+y+1}\,dxdy \quad D: -1 \leqq x+y \leqq 1, -1 \leqq x-y \leqq 1$ を求めよ．

**解**　$x+y=u,\ x-y=v$ とすると，$D$ は $E: -1 \leqq u \leqq 1, -1 \leqq v \leqq 1$ に対応する．




$$x = \frac{1}{2}(u+v),\ y = \frac{1}{2}(u-v),\ J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x+y+1}\,dxdy &= \iint_E \sqrt{u+1}|J|dudv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dv \int_{-1}^{1} \sqrt{u+1}du \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} dv\right)\left(\int_{-1}^{1} \sqrt{u+1}du\right) = \frac{1}{2}2\left[\frac{2}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \quad \square \end{aligned}$$

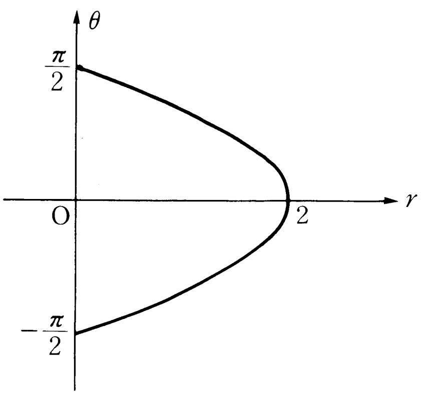
**例 3.2.** $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq 1$ を求めよ．

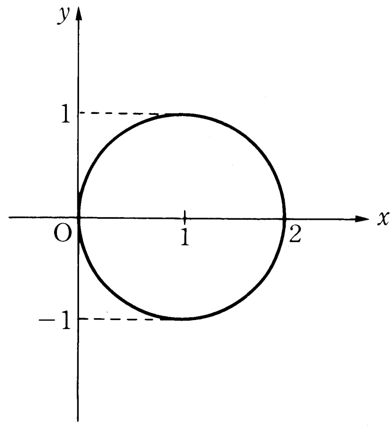
**解**　極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r \geqq 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ で領域 $x^2+y^2 \leqq 1$ は領域 $E: r \leqq 1, 0 \leqq \theta < 2\pi$ に対応しているから，

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_E r^2\,drd\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{1} r^2 dr\right) = \frac{2}{3}\pi \quad \square$$

**例 3.3.** $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq 2x$ を求めよ.

**解** 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とすると, 領域 $D$ は $\theta$ の取り得る値の範囲が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であることはすぐわかる. $r$ の取り得る値の範囲は $\theta$ によって変化して, 図から $0 \leqq r \leqq 2\cos\theta$ であることがわかる. したがって $(r,\theta)$ の領域 $E$ は $E: -\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta$ である.




よって

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy &= \iint_E \sqrt{4-r^2}\,r\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}\,r\,dr \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-|\sin^3\theta|)d\theta \\
&= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta)d\theta = \frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}. \quad \square
\end{aligned}$$

**例 3.4.** $\iint_D \dfrac{1}{(x+y+1)^4}dxdy \quad D: 0 \leqq x, 0 \leqq y$ を求めよ.

**解** $\begin{cases} x+y+1=u \\ y=v \end{cases}$ とすると, $\begin{cases} x=u-v-1 \\ y=v \end{cases}$ であるから,

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u-v-1 \geqq 0 \\ v \geqq 0 \end{cases} \iff 0 \leqq v \leqq u-1, \quad J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

よって $E: 0 \leqq v \leqq u-1$ とすると,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4}\,dxdy &= \iint_E \frac{1}{u^4}dudv = \lim_{n\to\infty}\int_1^n du \int_0^{u-1} \frac{1}{u^4}dv \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{u-1}{u^4}du = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{u^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\right]_1^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{n^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}. \quad \square
\end{aligned}$$

**例 3.5.** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ．

**解**　重積分の定義を考えれば，$D = \{(x,y) \mid x \geqq 0, y \geqq 0\}$ とすると，

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

であるので，この重積分を求めればよいことがわかる．領域 $D$ は有界ではないので，有界な正方形領域 $D(n) = \{(x,y) \mid 0 \leqq x, y \leqq \frac{n}{\sqrt{2}}\}$ ($n$ は自然数) で近似する．原点を中心とする半径 $\dfrac{n}{\sqrt{2}}$ と半径 $n$ の円の第一象限の領域を，それぞれ $A(n)$ と $B(n)$ とおく．このとき $A(n) \subset D(n) \subset B(n)$ であり，積分関数は $e^{-(x^2+y^2)} \geqq 0$ であるので，

$$\iint_{A(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leqq \iint_{D(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leqq \iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

である．極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ をすれば，領域 $A(n)$ と $B(n)$ では $\theta$ はともに $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり $r$ は $0 \leqq r \leqq \dfrac{n}{\sqrt{2}}$ と $0 \leqq r \leqq n$ であるので，対応する $r\theta$-平面の領域 $E(n), F(n)$ は $E(n) : 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq \dfrac{n}{\sqrt{2}}$ と $F(n) : 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq n$ である．よって

$$\iint_{A(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{E(n)} e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{n}{\sqrt{2}}} re^{-r^2}drd\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\frac{n}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-\frac{n^2}{2}}\right).$$

同様に

$$\iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-n^2})$$

を得る．ここで $n \to \infty$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{A(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}$$

となる．従って

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}$$

であるから $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を得る．□

**Point:** 上の積分は，1変数関数の積分であるが，このように2変数関数の重積分として考えて求めるとよいことに，注意してほしい．また，この積分値はいろいろな場面に登場するので，しっかり覚えておくこと．

**例 3.6.** ガンマ関数とベータ関数は関係式 $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ を満たすことを示せ．

**解** ガンマ関数 $\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx \quad (s>0)$ において $x=t^2$ と変数変換すると，

$$\Gamma(s)=2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2s-1}\,dt.$$

またベータ関数 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p>0,q>0)$ において $x=\cos^2\theta$ と変数変換すると，

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta$$

であることに注意する．このとき，

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}\,dx\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2q-1}\,dy\right)\\ &= 4\iint_D e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\,dxdy \quad D:0\leqq x,0\leqq y.\end{aligned}$$

ここで $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と変数変換すると，

$$\begin{aligned}(\text{上式}) &= 4\iint_E e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,drd\theta \quad E:0\leqq r,0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\\ &= \left(2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\,dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta\right)\\ &= \Gamma(p+q)B(p,q). \quad \square\end{aligned}$$

**問 3.1.** 次の積分を求めよ．

(1) $\iint_D (x+y)\sin(x-y)\,dxdy \quad D:0\leqq x+y\leqq\pi, 0\leqq x-y\leqq\pi$

(2) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy \quad D:x^2+y^2\leqq a^2 \quad (a>0)$

(3) $\iint_D x^2\,dxdy \quad D:0\leqq x, x^2+y^2\leqq 1$

(4) $\iint_D y\,dxdy \quad D:x^2+y^2\leqq ax, y\geqq 0 \quad (a>0)$

(5) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy \quad D:x^2+y^2\leqq ax \quad (a>0)$

# 4　3 重積分

今まで 2 変数関数の積分について述べたが, 3 変数以上の関数の積分についても同様な議論ができる．特に 3 変数関数について述べる．

各辺が座標軸に平行な直方体 $D = \{(x,y,z)|a_1 \leqq x \leqq a_2, b_1 \leqq y \leqq b_2, c_1 \leqq z \leqq c_2\}$ において定義された関数 $f(x,y,z)$ の積分 $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ の定義は次の通りである．

$D$ の分割

$$\Delta : \begin{cases} a_1 = x_0 < x_1 \cdots < x_\ell = a_2 \\ b_1 = y_0 < y_1 \cdots < y_m = b_2 \\ c_1 = z_0 < z_1 \cdots < z_n = c_2 \end{cases}$$

に対して, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ とおき, $i, j, k$ を動かしたときの最大の値を $|\Delta|$ とする．直方体 $D_{ijk} = \{(x,y,z)|x_{i-1} \leqq x \leqq x_i,\ y_{j-1} \leqq y \leqq y_i,\ z_{k-1} \leqq z \leqq z_k\}$ の各々から代表点 $(\xi_{ijk}, \varphi_{ijk}, \zeta_{ijk})$ を選び,

$$V(\Delta) = \sum_{i,j,k} f(\xi_{ijk}, \varphi_{ijk}, \zeta_{ijk})\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

を考える．これが, $|\Delta| \to 0$ のとき, 分割 $\Delta$ および代表点の取り方によらず一定の値に近づくならば, その極限値を

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

と書き, $D$ における $f(x,y,z)$ の**積分**または**3 重積分**という．このとき, $f(x,y,z)$ は $D$ で**積分可能**であるという．すなわち,

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i,j,k} f(\xi_{ijk}, \varphi_{ijk}, \zeta_{ijk})\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

である．

3 重積分の計算については, 次の定理を利用すればよい．

**定理 4.1.** (1) 関数 $f(x,y,z)$ は直方体 $D=\{(x,y,z)|a_1 \leqq x \leqq a_2,\ b_1 \leqq y \leqq b_2,\ c_1 \leqq z \leqq c_2\}$ 上で連続ならば,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$$

(ただし, 積分順序は変えることができる).

(2) 関数 $f(x,y,z)$ が領域
$D=\{(x,y,z)|a_1 \leqq x \leqq a_2,\ \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x),\ \psi_1(x,y) \leqq z \leqq \psi_2(x,y)\}$
上で連続ならば,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

ただし, $\phi_1(x), \phi_2(x), \psi_1(x,y), \psi_2(x,y)$ は連続関数である.

変数変換についても２重積分と同様に, 次の定理が知られている.

**定理 4.2.** $E, D$ がそれぞれ $uvw$-空間, $xyz$-空間における領域で, 関数 $x=\varphi(u,v,w)$, $y=\psi(u,v,w)$, $z=\chi(u,v,w)$ で１対１に対応し, $|J| \neq 0$ とする. 関数 $f(x,y,z)$ が $D$ 上で積分可能ならば,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_E f\left(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)\right)|J|\, dudvdw.$$

ただし, $x=\varphi(u,v,w)$,$y=\psi(u,v,w)$, $z=\chi(u,v,w)$ は偏微分可能で, 各偏導関数は連続であるとする. また,

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \end{vmatrix}$$

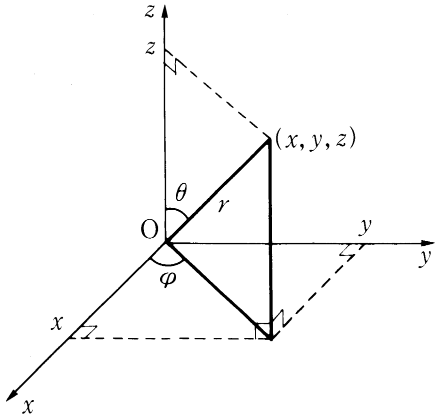
である.

よく利用する変数変換は直交座標から極座標への変換である.

**系 4.3.** 極座標変換 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$ で $r\theta\varphi$-空間の領域 $E$ が $D$ と１対１に対応しているならば, $D$ 上で積分可能な関数 $f(x,y,z)$ に対して,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_E f\left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right) r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi.$$

$$\begin{cases} z = r\cos\theta \\ x = r\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi \end{cases}$$




**例 4.1.** $\iiint_D xy^2e^z dxdydz \quad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2,\ 0 \leqq z \leqq 3$ を求めよ．

**解**

$$\begin{aligned}\iiint_D xy^2e^z\,dxdydz &= \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_0^2 dy\int_0^3 y^2e^zdz\right) = \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_0^2 y^2dy\right)\left(\int_0^3 e^zdz\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{8}{3}(e^3-1) = \frac{4}{3}(e^3-1).\ \square\end{aligned}$$

**例 4.2.** $\iiint_D x^2\,dxdydz \quad D: 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1$ を求めよ．

**解** $D$ は中心が $(0,0,0)$ で半径が1の球の内部で $0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z$ を満たす部分であるから，$D: 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}, 0 \leqq z \leqq \sqrt{1-x^2-y^2}$ と書ける．

$$\begin{aligned}\iiint_D x^2\,dxdydz &= \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2dz \\ &= \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\sqrt{1-x^2-y^2}dy \\ &= \int_0^1 x^2\frac{\pi}{4}(1-x^2)dx \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{\pi}{30}\ \square\end{aligned}$$

**例 4.3.** $D: x^2+y^2+z^2 \leqq a^2\ (a>0)$ のとき，$\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^\ell dxdydz$ を求めよ．

**解**　$D$ から $D$ 内の $z$-軸の部分を除いた領域を $D_1$ とすると，極座標変換で $D_1$ は $E: 0< r \leqq a, 0<\theta<\pi, 0 \leqq \varphi < 2\pi$ と対応している．

$$\begin{aligned}\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^\ell\, dxdydz &= \iiint_{D_1} (x^2+y^2+z^2)^\ell\, dxdydz = \iiint_E r^{2\ell} r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^a r^{2\ell+2} dr\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = \frac{4\pi a^{2\ell+3}}{2\ell+3}\end{aligned}$$

$\ell=0$ の場合は半径 $a$ の球の体積 $\dfrac{4\pi a^3}{3}$ である．□

**重心**：平面の場合と同様の考察により，空間内の領域 $D$ に密度 $\rho(x,y,z)$ で質量が分布しているとき，すなわち $(x,y,z)$ を含む微小な体積 $\Delta V$ の部分の質量が $\rho(x,y,z)\,\Delta V$ であるとき $D$ の重心 $(X_0, Y_0, Z_0)$ は

$$X_0 = \frac{\displaystyle\iiint_D x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\displaystyle\iiint_D \rho(x,y,z)\,dxdydz},\quad Y_0 = \frac{\displaystyle\iiint_D y\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\displaystyle\iiint_D \rho(x,y,z)\,dxdydz},$$

$$Z_0 = \frac{\displaystyle\iiint_D z\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\displaystyle\iiint_D \rho(x,y,z)\,dxdydz}$$

で与えられる．特に $\rho(x,y,z)$ が定数のときは，

$$X_0 = \frac{\displaystyle\iiint_D x\,dxdydz}{\displaystyle\iiint_D dxdydz},\quad Y_0 = \frac{\displaystyle\iiint_D y\,dxdydz}{\displaystyle\iiint_D dxdydz},\quad Z_0 = \frac{\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz}{\displaystyle\iiint_D dxdydz}$$

で与えられる．

**例 4.4.** 密度が一様な半球 $D: x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,\ 0 \leqq z\quad (a>0)$ の重心を求めよ．

**解** $D$ 内の点 $(x,y,z)$ にその点の極座標を対応させる．$D$ は $E: 0<r \leqq a,\ 0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0<\varphi \leqq 2\pi$ と対応しているので，

$$\begin{aligned}\iiint_D x\,dxdydz &= \iiint_E r^3 \sin^2\theta \cos\varphi\, drd\theta d\varphi = \int_0^a r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0. \\ \text{同様に}\quad & \iiint_D y\,dxdydz = 0. \\ \iiint_D z\,dxdydz &= \iiint_E r^3 \sin\theta\cos\theta\, drd\theta d\varphi = \int_0^a r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{4}a^4. \\ \iiint_D dxdydz &= \iiint_E r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi = \int_0^a r^2 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}a^3.\end{aligned}$$

よって重心は $\left(0, 0, \dfrac{3}{8}a\right)$ である．□

**問 4.1.** 次の 3 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iiint_D \sin(x+y+z)dxdydz \qquad D: 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z,\ x+y+z \leqq \frac{\pi}{2}$

(2) $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{(x+y+z+a)^3}dxdydz \qquad D: 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z,\ x+y+z \leqq a$

(3) $\displaystyle\iiint_D e^{x+y+z}dxdydz \qquad D: 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b,\ 0 \leqq z \leqq c$

(4) $\displaystyle\iiint_D \frac{xy}{(y^2+z^2)^2}dxdydz \qquad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 1 \leqq z \leqq \sqrt{3}$

(5) $\displaystyle\iiint_D yzdxdydz \qquad D: 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z,\ x+y+z \leqq 1$

(6) $\displaystyle\iiint_D \frac{z}{x^2+y^2}dxdydz \qquad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ 0 \leqq z \leqq x$

# 5　曲面積

最後に空間における曲面の面積を求めることを述べる．まず, これまで空間における曲面を $z = f(x,y)$ のように表していたが, 空間における曲面を扱う場合は, より一般的に

$$\begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{cases}$$

と表すことが多い．

**例 5.1.** 曲面 $z = x^2 + y^2$ は, $r$ と $\theta$ を使って,

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= r^2 \end{cases}$$

と表すことができる (円柱座標変換)．

まず, 次の定理を示す．

**定理 5.1.** $(u,v)$ が領域 $D$ を動き，$D$ 上の曲面 $S$ が

$$\begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in D$$

で与えられるとき，$S$ の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, dudv$$

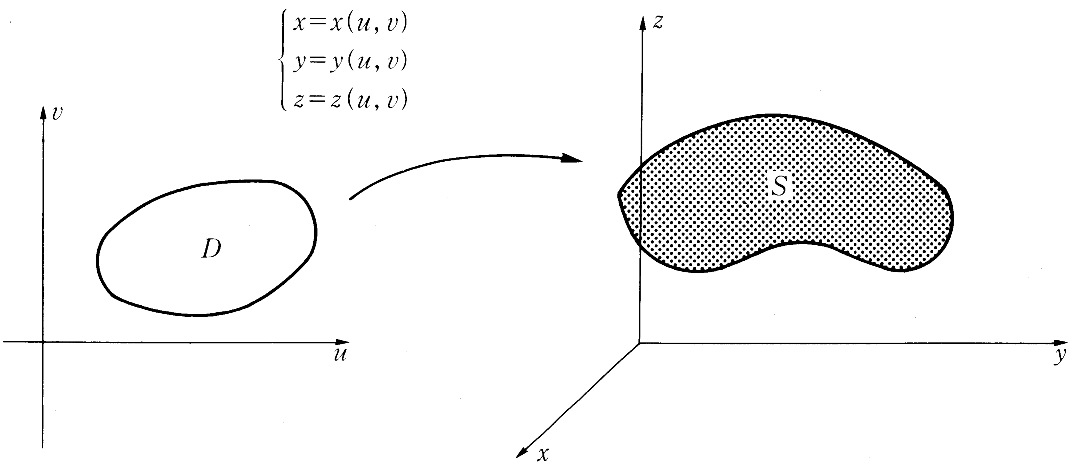
である．

**証明.** 領域 $D$ 上の曲面の面積は 2 変数関数の体積を求めたときと同様に $D$ を細かい長方形 $D(uv)$ に分割すると，$D(uv)$ 上の曲面 $S(uv)$ の面積は，ほとんど平面になっている．そして，そこの小さい接平面 $\Delta(uv)$ の面積とほとんど変わらない．そこで，分割を細かくしたときの $\Delta(uv)$ の面積の和をとり，この和の極限値によって求めることにする．この証明のために，まず，次のことを確認しておく．

空間座標において O を原点とし $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$ とする，このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって作られる平行四辺形の面積 $S$ は

$$S = \sqrt{(a_1b_2 - b_1a_2)^2 + (a_2b_3 - b_2a_3)^2 + (a_3b_1 - b_3a_1)^2} \tag{7.1}$$

となる．



そこで細かい長方形 $D(uv)$ を $D(uv)=[u,u+h]\times[v,v+k]$ とする．２変数関数のテイラー展開により

$$\begin{cases} x(u+h,v)\doteqdot x(u,v)+h\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u}=x+h\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u}\\ y(u+h,v)\doteqdot y(u,v)+h\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u}=y+h\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u}\\ z(u+h,v)\doteqdot z(u,v)+h\dfrac{\partial z(u,v)}{\partial u}=z+h\dfrac{\partial z(u,v)}{\partial u}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(u,v+k)\doteqdot x(u,v)+k\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v}=x+k\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v}\\ y(u,v+k)\doteqdot y(u,v)+k\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v}=y+k\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v}\\ z(u,v+k)\doteqdot z(u,v)+k\dfrac{\partial z(u,v)}{\partial v}=z+k\dfrac{\partial z(u,v)}{\partial v}. \end{cases}$$

従って, 接平面 $\Delta(uv)$ の面積は $\mathrm{A}(x,y,z)$, $\mathrm{B}\left(x+h\dfrac{\partial x}{\partial u},y+h\dfrac{\partial y}{\partial u},z+h\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$, $\mathrm{C}\left(x+k\dfrac{\partial x}{\partial v},y+k\dfrac{\partial y}{\partial v},z+k\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とでできる平行四辺形の面積にほぼ等しいので, (7.1) より

$$\Delta(uv)\doteqdot\sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,hk.$$

この小さい長方形 $D(uv)$ 上の接平面 $\Delta(u,v)$ の和をとる．すなわち,

$$\sum_{\Delta(uv)}\sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,hk.$$

分割 $D(uv)$ を細かくし, 極限をとれば

$$S=\int\int_D\sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,dudv$$

を得る．□

次に, 曲面が関数 $z=f(x,y)$ によって与えられたときは, 次のように求めればよい．

**定理 5.2.** 曲面 $z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$ のときの面積 $S$ は

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

である．

**証明** このときは

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad (x,y) \in D$$

となるので

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = 1 \\ \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)} = -\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

であるので定理 5.1 より示された. □

**例 5.2.** $D:\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{2},\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}-x$ にある曲面 $z = \dfrac{1}{2}x^2 + y$ の曲面積を求めよ.

**解** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ となるから, 曲面積 $S$ は

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{x^2+2}dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2}-x} \sqrt{x^2+2}dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}-x\right)\sqrt{x^2+2}dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[x\sqrt{x^2+2} + 2\log\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|\right]_0^{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\left[(x^2+2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right) + \sqrt{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right) \end{aligned}$$

となる. (公式 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$ を使う. )

**例 5.3.** 柱面 $x^2+y^2 = ax$ によって切りとられる柱面 $z^2 = 4ax$ の曲面積を求めよ.

**解** $z^2 = 4ax$ より $z = \pm 2\sqrt{ax}$ となる. 上半分を考えて, $z = 2\sqrt{ax}$ に対して $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{\dfrac{a}{x}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる. また $x^2+y^2 = ax$ より領域 $D$ は点 $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{a}{2}$ の円になる. よって曲面積は

$$S = 2\int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{1+\frac{a}{x}}dy = 4\int_0^a \sqrt{ax-x^2}\sqrt{1+\frac{a}{x}}dx = 4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$$

で与えられる. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$ は半径 $a$ の $\dfrac{1}{4}$ の円の面積 $\dfrac{1}{4}\pi a^2$ になる. よって曲面積 $S$ は $\pi a^2$ となる.

**問 5.1.** 円柱面 $x^2+y^2 = a^2$ によって切り取られる柱面 $x^2+z^2 = a^2$ の曲面の表面積を求めよ.

**円柱座標の場合:** 曲面が円柱座標によって, 方程式

$$z = \phi(r, \theta) \quad ((r, \theta) \in D)$$

で与えられているとき．このときは,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \qquad (r, \theta) \in D \\ z = \phi(r, \theta) \end{cases}$$

となり, それぞれヤコビアンを計算すると

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r \\ \dfrac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \sin\theta \dfrac{\partial z}{\partial \theta} - r\cos\theta \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial(z, x)}{\partial(r, \theta)} = -r\sin\theta \dfrac{\partial z}{\partial r} - \cos\theta \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases}$$

であるので, 次の定理を得る．

> **定理 5.3.** 曲面 $S$ が円柱座標 $z = \phi(r, \theta)$ $((r, \theta) \in D)$ によって与えられた場合, $D$ 上の曲面積 $S$ は次の式で与えられる．
>
> $$S = \iint_D \sqrt{r^2 + r^2 \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}\, dr d\theta.$$

**例 5.4.** 曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ の $z \geqq 0$ の部分の面積を求めよ．

**解**　$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって関数は円柱座標による方程式 $z = 1 - r^2$ となり, 領域 $D$ は $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ となる．したがって $\dfrac{\partial z}{\partial r} = -2r$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = 0$ となるから,

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{r^2 + 4r^4}\, dr d\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr \\ &= 4\pi \int_0^1 r\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}}\, dr &= \frac{4}{3}\pi \left[\left(r^2 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}\pi \left(5\sqrt{5} - 1\right) \end{aligned}$$

となる．

**例 5.5.** 半円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ かつ $x > 0$ の内部にある曲面 $z = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$ の面積を求めよ．

**解**　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ によって関数は円柱座標による方程式 $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$ となり, 領域 $D$ は $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq a^2, x > 0\}$ より, 極座標では

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \leqq r \leqq a,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$$

である. $\dfrac{\partial z}{\partial r} = 0,\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta} = 1$ となるから

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{r^2+1}\,drd\theta = \int_0^a \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2+1}\,d\theta dr = \pi \int_0^a \sqrt{r^2+1}\,dr \\ &= \frac{\pi}{2}\left[r\sqrt{r^2+1} + \log\left|r + \sqrt{r^2+1}\right|\right]_0^a \\ &= \frac{\pi}{2}\left\{a\sqrt{a^2+1} + \log\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)\right\} \end{aligned}$$

となる.

**問 5.2.** $z = x^2 + y^2$ の $D : x^2 + y^2 \leqq 1$ 上の曲面の面積を求めよ.

**問 5.3.** 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ が円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ によって切りとられる部分の曲面積を求めよ.

**定理 5.4.** $xy$-平面上の曲線 $y = f(x) \geqq 0$ $(a \leqq x \leqq b)$ が $x$-軸のまわりに回転してできる回転体の表面積 $S$ は次の式で与えられる.

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

**証明**　回転面の方程式は $y^2 + z^2 = f(x)^2$ であるから $z = \pm\sqrt{f(x)^2 - y^2}$ である.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \pm\frac{f(x)f(x)'}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \mp\frac{y}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}}\text{(復号同順)}.$$

よって

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}}$$

となる. 曲面の $xy$-平面への正射影を $D$ とすると, 定理 5.2 より

$$\begin{aligned} S &= 2\iint_D \frac{f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}}\,dxdy = 4\int_a^b dx \int_0^{f(x)} \frac{f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}}\,dy \\ &= 4\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\left[\sin^{-1}\frac{y}{f(x)}\right]_0^{f(x)} dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx. \quad \square \end{aligned}$$

**例 5.6.** 曲線 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ を $x$-軸のまわりに回転してできる回転体の表面積を求めよ．

**解** $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ より $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ となる．よって，回転体の表面積は

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx=2\pi\int_{-a}^{a}adx=2\pi a[x]_{-a}^{a}=4\pi a^2$$

となる．(回転体は半径 $a$ の球面となる．)

**問 5.4.** $xy$-平面上の曲線 $9ay^2=x(x-3a)^2$ $(0\leqq x\leqq 3a)$ が $x$-軸のまわりに回転してできる回転体の表面積を求めよ．

## 第 7 章　練習問題

**1.** 次の 2 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x\cos y\,dxdy$　　$D:\ 0\leqq y\leqq a,\ y-a\leqq x\leqq 2y$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{y^2}dxdy$　　$D:\ 0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq 1$

(3) $\displaystyle\iint_D ye^{xy}dxdy$　　$D:\ 1\leqq x\leqq 2,\ \frac{1}{x}\leqq y\leqq 1$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy$　　$D:\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1$

(5) $\displaystyle\iint_D \sin x^2dxdy$　　$D:\ 0\leqq x\leqq\sqrt{\pi},\ 0\leqq y\leqq x$

(6) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$　　$D:\ x^2\leqq y\leqq x$

(7) $\displaystyle\int_0^1dx\int_x^1e^{-y^2}dy$　　(8) $\displaystyle\int_0^1dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{y}dy$　　(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_x^{\frac{\pi}{2}}\sin y^2dy$

**2.** $\displaystyle\int_0^a dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^a(a-x)f(x)dx$ を示せ．

**3.** $\displaystyle\underbrace{\int_0^x dx\int_0^x dx\cdots\int_0^x}_{n\text{ 回}} f(x)dx=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt$ を示せ．

**4.** $f(x,y)$ の２回の偏導関数までが連続なとき，次式を示せ.

$$\iint_D \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} dxdy = f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c), \quad D: \ a \leqq x \leqq b, \ c \leqq y \leqq d$$

**5.** $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で連続であるとき $\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2 \leqq \int_0^1 f(x)^2 dx$ なることを示せ.

（ヒント：$f(x)f(y) \leqq \dfrac{1}{2}\left\{f(x)^2 + f(y)^2\right\}$ を使え.）

**6.** 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy \qquad D: \ 0 \leqq x, \ 0 \leqq y, \ x^2+y^2 \leqq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x-y)^\alpha} dxdy \qquad D: \ 0 \leqq x \leqq 1, \ 0 \leqq y \leqq x, \ (0 < \alpha < 1)$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3} \qquad D: \ 0 \leqq x, \ 0 \leqq y$

(4) $\displaystyle\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x} dxdy \qquad D: \ 0 \leqq x, \ 0 \leqq y, \ x^2+y^2 \leqq a^2 \ (a > 0)$

(5) $\displaystyle\iiint_D z dxdydz \qquad D: \ \sqrt{x^2+y^2} \leqq z \leqq \sqrt{1-x^2-y^2}$

(6) $\displaystyle\iiint_D x dxdydz \qquad D: \ 0 \leqq x, \ 0 \leqq y, \ 0 \leqq z, \ x^2+y^2+z^2 \leqq a^2$

**7.** 変数変換を利用して次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{y^2} e^{x+y} dxdy \qquad D: \ 0 \leqq x \leqq y, \ 1 \leqq y \leqq 2$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2 \sin(x+y) dydx \qquad D: \ \frac{-\pi}{2} \leqq x-y \leqq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leqq x+y \leqq \pi$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} \qquad D: \ 1 \leqq x \leqq 2, \ 0 \leqq y \leqq x$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{2x^2+3y^2}{(x+y)^3} dxdy \qquad D: \ 0 \leqq x, \ 0 \leqq y, \ 1 \leqq x+y \leqq 2$

(5) $\displaystyle\iint_D (px^2+qy^2) dxdy \qquad D: \ x^2+y^2 \leqq 1$

(6) $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy \qquad D: \ x^2+y^2 \leqq 1$

(7) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x} dxdy \qquad D: \ x^2+y^2 \leqq x$

**8.** 次の立体の体積を求めよ．

(1) $0 \leqq z \leqq x,\ x^2+y^2 \leqq a^2 \quad (a>0)$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1 \quad (a,b,c>0)$

(3) $x^2 \leqq y \leqq 4,\ 0 \leqq z \leqq xy$

(4) $x^2+y^2 \leqq 1,\ x^2+z^2 \leqq 1,\ x,y,z \geqq 0$

(5) $0 \leqq y \leqq 1-x^2,\ 0 \leqq z \leqq x^2+y^2,\ x \geqq 0$

(6) 楕円的放物面 $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}$, 柱面 $x^2+y^2=1$ 及び平面 $z=0$ によって囲まれた部分.

(7) 双曲的放物面 $z=xy$, 柱面 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 及び平面 $z=0$ によって囲まれた部分.

(8) 球 $x^2+y^2+z^2=1$ で囲まれた, 円柱面 $x^2+y^2=x$ の内部の部分.

(9) 放物面 $x^2+y^2=z$, 円柱面 $x^2+y^2+2x=0$, 及び平面 $z=0$ によって囲まれた部分.

(10) 放物面 $y^2+z^2=2x$, 円柱面 $x^2+y^2=x$ 及び平面 $z=0$ によって囲まれた部分.

(11) 曲面 $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, 円柱面 $x^2+y^2=1$ とで囲まれた $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ の部分.

**9.** 次の図形の重心の位置を求めよ．

(1) $\sqrt{x} \leqq y \leqq 1$ を $y$ 軸のまわりに回転してできる回転体

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1,\ 0 \leqq z,\ (a,b,c>0)$

(3) $0 \leqq y \leqq 1-x^2,\ x \geqq 0$

**10.** 柱面 $x^2+y^2=a^2 \quad (a>0)$ の内部にある曲面 $z=xy$ の曲面積を求めよ．

**11.** 柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ の内部にある球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ の曲面積を求めよ．

**12.** 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (a>0)$ 上で，$z=b,\ z=c\ (0 \leqq b \leqq c \leqq a)$ の間にある部分の面積を求めよ．

**13.** アステロイド $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ が $x$ 軸のまわりに回転してできる回転体の表面積を求めよ．