

第4章

積分法 2

1 定積分

本節では閉区間で定義された有界な関数の定積分について述べる.

定積分の定義

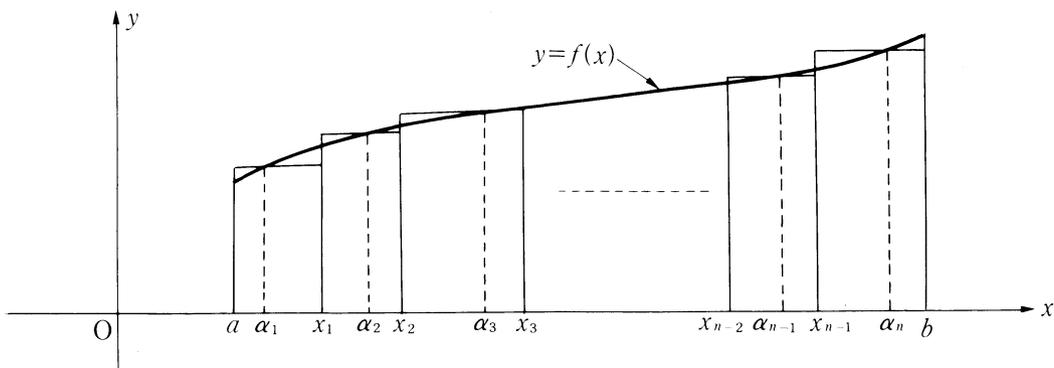
関数 $y = f(x)$ の閉区間 $[a, b]$ の積分 $\int_a^b f(x)dx$ とは $f(x) \geq 0$ のときは, 閉区間 $[a, b]$ とグラフで囲まれた部分の面積を求めることである. もし $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ が見つければ $F(b) - F(a)$ と計算すればよい. しかし, 定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の最初の定義は次のようになる. 閉区間 $[a, b]$ から $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ を任意に選び, その区間を n 個の小区間に分割する. 次に, 新しくできた区間 $[a, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, b]$ から任意に点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を選び, 和

$$S_n = f(\alpha_1)(x_1 - a) + f(\alpha_2)(x_2 - x_1) + f(\alpha_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\alpha_n)(b - x_{n-1})$$

を考える. $x_0 = a, x_n = b, x_k - x_{k-1} = \delta_k$ とすると, この和は

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\alpha_k)\delta_k$$

と書くことができる. これは, 図形的には, 次のページの図の長方形を全部合わせた面積を表している.



今, 区分区の数 n を増して $\delta_k \rightarrow 0$ とする. もし, 和 S_n が x_k, α_k の選び方によらず一定の値に収束するならば, この極限値を,

$$\int_a^b f(x) dx$$

で表し, a から b までの $f(x)$ の定積分という. また, この極限値が存在するとき, $f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能であるという.

便宜上, $\int_a^a f(x) dx = 0, \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ と定めておく.

ここでは証明しないが, $f(x)$ が $[a, b]$ で連続であれば, $f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能であることがダルブーによって示されている.

例 1.1. $[0, 1]$ で定義された次の関数は積分可能でないことを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ は有理数} \\ 1 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

解 $[0, 1]$ を分割した小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から点 α_k を選ぶとき, α_k を有理数にすれば, $S_n = \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \delta_k = 0$. α_k を無理数にとれば, $S_n = \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \delta_k = \sum_{k=1}^n \delta_k = 1$ であるから, S_n は一定値に収束しない. よって, 積分可能でない.

定積分の性質

次に, 定積分の性質に関する定理を示す. いずれも定積分の定義と極限値の性質から容易に導かれる.

定理 1.1. $[a, b]$ で $f(x), g(x)$ が積分可能なとき,

(1) $\alpha f(x) + \beta g(x)$ も積分可能で (α, β は定数)

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \quad (\text{線形性})$$

(2) $f(x) \geq g(x)$ ならば $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ (単調性)

(3) $f(x)$ が $[a, c], [c, b]$ で積分可能なとき,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{区間に関する加法性})$$

上式は, a, b, c の大小を問わず成り立つことがわかる.

(4) $|f(x)|$ も積分可能で $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

(5) $[a, b]$ で $m \leq f(x) \leq M$, m, M は定数とする. このとき,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

中間値の定理と (5) を用いると, 次の平均値の定理が証明できる.

定理 1.2 (積分に関する平均値の定理). $f(x)$ が $[a, b]$ で連続なとき, 区間 (a, b) 内のある α に対し,

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\alpha)$$

微積分学の基本定理

ある閉区間で $f(x)$ が積分可能なとき, その区間内の一定点を a , 任意の点を x とすると, $\int_a^x f(t) dt$ は x の関数である. これを $f(x)$ の積分関数といい, $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ と書く. C を任意の定数とするととき, $F(x) = F_a(x) + C$ とおく.

定理 1.3. 区間 $[a, b]$ で $f(x)$ が連続ならば, $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ は x について微分可能 (したがって, 連続) で

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

すなわち, $F(x) = F_a(x) + C$ は $f(x)$ の原始関数である.

証明 平均値の定理より,

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= F_a(x+h) - F_a(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt = hf(\alpha), \quad \alpha \in [x, x+h] \end{aligned}$$

$f(x)$ は連続であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

すなわち,

$$F'(x) = f(x). \quad \square$$

この定理によって、本章のはじめに述べた「連続関数には原始関数が存在する」ことが証明された。また、

$$F(b) - F(a) = F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$

であるから

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

となることがわかり、定理 1.3 と組み合わせると次の定理が得られる。

定理 1.4 (微積分学の基本定理) . $[a, b]$ で $f(x)$ が連続で、 $F'(x) = f(x)$ のとき、

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

このとき、右辺を $[F(x)]_a^b$ と書く。

この定理によって連続関数の定積分を求めるには不定積分を求めればよいことになる。

例 1.2. $\int_1^2 x^2 dx$ を求めよ。

解 $F'(x) = x^2$ より $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ であるから、

$$\int_1^2 x^2 dx = F(2) - F(1) = \left(\frac{2^3}{3} + c\right) - \left(\frac{1^3}{3} + c\right) = \frac{7}{3}$$

c は消えてしまうから、書かなくてもよい。

問 1.1. 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

例 1.3. 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^4) dt}{x^5}$$

解 ロピタルの定理と定理 1.3 を用いて,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^4) dt}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t^4) dt}{\frac{d}{dx} x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^4)}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 \cos(x^4)}{20x^3} = \frac{1}{5}$$

問 1.2. $f(x)$ を連続関数とするとき, 次の x の関数を微分せよ.

(1) $\int_x^{x^2} f(t) dt$

(2) $\int_0^{x+1} xf(t) dt$

置換積分と部分積分

不定積分を求めるときのテクニックを定積分の計算に使うことができる.

定理 1.5 (置換積分法). $[a, b]$ で $x = \varphi(t)$ と $\varphi'(t)$ とが連続で, $x = \varphi(t)$ の値域において $f(x)$ が連続であるとき, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ とすれば,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

定理 1.6 (部分積分法). $[a, b]$ で $f'(x), g'(x)$ が連続のとき,

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

例 1.4. 次の定積分を求めよ.

(1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

(2) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \sin^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$

解 (1) $x = \sin t$ とおくと

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(2) $\sin^{-1} x^2 = t$ とおくと, $x = 0$ のとき $t = 0$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $t = \frac{\pi}{6}$ で,

$$dt = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

であるから, 求める積分は,

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt = \frac{1}{4} [t^2]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{144}$$

次の直観的に明らかな事実も置換積分を用いて証明される.

例 1.5. $f(x)$ は連続であるとする. 置換積分を用いて, 次の関係が成立することを示せ.

$$(1) f(x) \text{ が奇関数, すなわち, } f(-x) = -f(x) \text{ のとき, } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$(2) f(x) \text{ が偶関数, すなわち, } f(-x) = f(x) \text{ のとき, } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

解 (1) のみについて示す. (2) も同様である.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

ここで, $x = -t$ とおくと $dx = -dt$ であるから,

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt)$$

一方, $f(-t) = -f(t)$ なので, 右辺の積分は,

$$\int_a^0 f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt$$

に等しいので,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

となる.

問 1.3. 次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_0^1 (3x-1)^2 dx$$

$$(2) \int_0^4 \frac{x}{9+x^2} dx$$

$$(3) \int_0^1 \frac{x-2}{x^2+x+1} dx$$

$$(4) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\log x)^4}$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (a > 0, b > 0)$$

例 1.6. 次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_0^1 x e^x dx$$

$$(2) \int_0^1 x^2 \log(x+2) dx$$

解 ともに, 部分積分を使って計算できる.

$$(1) \int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e-1) = 1.$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^1 x^2 \log(x+2) dx &= \left[\frac{x^3}{3} \log(x+2) \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{3} \log 3 - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \log 3 - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 + 4x - 8 \log(x+2) \right]_0^1 \\ &= 3 \log 3 - \frac{10}{9} - \frac{8}{3} \log 2. \end{aligned}$$

次に、定積分で重要な公式を部分積分を使って導こう。

例 1.7. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ を示し、 I_n を求めよ (n は 0 または自然数)。

解 $x = \frac{\pi}{2} - t$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$$

また、第 3 章の例 2.4 (1) と同様の方法から

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

を得ることができるので、

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \left[-\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx \\ &= \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

$I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ であるから、

$$n \text{ が } 2 \text{ 以上の偶数ならば } I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3 \cdot 1}{n(n-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数ならば } I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4 \cdot 2}{n(n-2)\cdots 5 \cdot 3}$$

注 1.1. 前半のより一般的な結果については問 1.6 の (1) を見よ。

問 1.4. 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^2 \log x dx \quad (2) \int_0^1 x^2 \tan^{-1} x dx \quad (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx$$

$$(4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx \quad (5) \int_0^{3\pi} \sin^4 \frac{x}{3} dx \quad (6) \int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^2} dx$$

問 1.5. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$ であることを使って、次の式

(ウォリスの公式) を証明せよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right\}^2 = \pi$$

定積分に関するさまざまなことを以下に述べよう.

不定積分の計算が難しくても, 定積分は簡単に計算できる場合もある.

例 1.8. $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ を求めよ.

解 $x = \pi - t$ とおくと,

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = - \int_\pi^0 \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt.$$

ゆえに,

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \frac{\pi}{2} [-\tan^{-1}(\cos t)]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

例 1.9. $f(x)$ は連続であるとする. すべての a について, $\int_a^{a+2\pi} f(\sin x) dx = \int_0^{2\pi} f(\sin x) dx$ を示せ.

解 $t = x - 2\pi$ とおくと, $dt = dx$ であるので,

$$\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(\sin x) dx = \int_0^a f(\sin(t + 2\pi)) dt.$$

ここで, $\sin(t + 2\pi) = \sin t$ であるので,

$$\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(\sin x) dx = \int_0^a f(\sin(t + 2\pi)) dt = - \int_a^0 f(\sin t) dt.$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_a^{2\pi+a} f(\sin x) dx &= \int_a^0 f(\sin x) dx + \int_0^{2\pi} f(\sin x) dx + \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(\sin x) dx \\ &= \int_a^0 f(\sin x) dx + \int_0^{2\pi} f(\sin x) dx - \int_a^0 f(\sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(\sin x) dx. \end{aligned}$$

問 1.6. $f(x)$ は連続であるとする. 置換積分を用いて, 次の関係が成立することを示せ.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

$$(2) \int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x) dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2 + b^2} \sin x) dx$$

問 1.7. m を任意の実数とすると, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx$ の値を求めよ.

次の例と問はフーリエ級数の理論を展開するときに使われる。

例 1.10. m, n を自然数とするとき, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ を求めよ.

解 加法定理より, $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} \{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \}$ であるから,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x \, dx \right\} \\ &= \int_0^{\pi} \cos(m+n)x \, dx + \int_0^{\pi} \cos(m-n)x \, dx = \int_0^{\pi} \cos(m-n)x \, dx \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

問 1.8. m, n を自然数とするとき, 次の定積分を求めよ.

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx$

例 1.11. m, n を自然数とするとき, $\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx$ を求めよ.

解 部分積分を用いて,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx &= \left[-x^m \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 + \frac{m}{n+1} \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n+1} \, dx \\ &= \frac{m}{n+1} \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n+1} \, dx \\ &= \frac{m}{n+1} \frac{m-1}{n+2} \int_0^1 x^{m-2} (1-x)^{n+2} \, dx \\ &= \dots \\ &= \frac{m(m-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+m)} \int_0^1 (1-x)^{n+m} \, dx \\ &= \frac{m(m-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+m)} \left[\frac{-(1-x)^{n+m+1}}{n+m+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{m(m-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+m)} \cdot \frac{1}{n+m+1} \\ &= \frac{n!m!}{(n+m+1)!} \end{aligned}$$

問 1.9. m, n を自然数とするとき, 次の定積分を求めよ.

(1) $\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$

(2) $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n \, dx$

例 1.12. 次の式を証明せよ. ただし, n は 3 以上の自然数である.

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6}$$

解 $0 < x < \frac{1}{2}$ において, $1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であるから,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ここで,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\sin^{-1} x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

より問題の不等式は証明される.

問 1.10. 次の式を証明せよ. ただし, n は自然数である.

$$\frac{1}{2(n+1)} < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \frac{1}{n+1}$$

区分求積法

定積分を使って, 級数の値を計算できる場合もある.

$[a, b]$ で $f(x)$ が連続だとしよう. $[a, b]$ を n 等分し α_k を各小区間の右端の点とすれば,

$\alpha_k = a + k \frac{b-a}{n}$, $\delta_k = \frac{b-a}{n}$ である. $f(x)$ は積分可能であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \delta_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

が得られる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

特に, $a = 0$, $b = 1$ とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

例 1.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right\}$ を計算せよ.

解 上に述べたことを使い,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\log(1+x)]_0^1 = \log 2$$

このような級数の求め方を**区分求積法**という。

問 1.11. 次の極限値を区分求積法で求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2} \right\}$$

2 広義積分

これまででは定積分を有限区間における有界な関数に限って扱ってきたが、これだけでは実際には不便なことが起こるので、定積分の定義を拡張して、積分区間が無限に延びている場合や、 $[a, b]$ 内のいくつかの点で $f(x)$ が定義されていなかったり、有界でないような場合も考えることにする。このような領域での積分は、広義積分、あるいは、異常積分とよばれ、極限値によって次のように定義される。

例 2.1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ を求めよ。

解 積分区間が無限に延びていて、任意の数 a に対して、 $[0, a]$ で積分可能な場合である。次のように計算する。

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} [\tan^{-1} x]_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \tan^{-1} a = \frac{\pi}{2}.$$

$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ なども同様に定められる。

例 2.2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ を求めよ。

解 $x \rightarrow +0$ のとき、 $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty$ で、 $0 < a \leq 1$ なる任意の数 a に対して、 $[a, 1]$ で積分可能な場合である。

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow +0} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow +0} [2\sqrt{x}]_a^1 = 2$$

例 2.3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を求めよ。

解 $x \rightarrow 1-0$ のとき、 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \infty$ で、 $0 \leq a < 1$ なる任意の数 a に対して、 $[0, a]$ で積分可能な場合である。

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a \rightarrow 1-0} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a \rightarrow 1-0} [\sin^{-1} x]_0^a = \lim_{a \rightarrow 1-0} \sin^{-1} a = \frac{\pi}{2}$$

例 2.4. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ を求めよ.

解 $x \rightarrow 0$ のとき, $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ で, $-1 \leq a < 0 < b \leq 1$ を満たす任意の a, b について, $[-1, a]$ と $[b, 1]$ で積分可能である.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

とし,

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow -0} \int_{-1}^a \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow -0} [\log |x|]_{-1}^a = \lim_{a \rightarrow -0} \log |a| = -\infty$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +0} \int_b^1 \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +0} [\log |x|]_b^1 = -\lim_{b \rightarrow +0} \log b = \infty$$

となるので, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ は存在しない (積分不可能).

注 2.1. a, b を独立に 0 に近づけるので, $\log |a| - \log b \rightarrow 0$ とはならない.

広義積分が存在するとき, $f(x)$ は (広義) 積分可能である, または (広義) 積分が収束するという. (例 2.1, 2.2, 2.3.)

例 2.4 の点 0 について考える. $c < 0 < d$ を 0 の近くにとると, 区間 $[c, d]$ の部分閉区間 $[c', d']$ が 0 を含まなければ, $\frac{1}{x}$ は $[c', d']$ で狭い意味で積分可能であるが, 0 を含めば, 狭い意味で積分可能でない. このようなとき, 点 0 は特異点 であるという.

ここでは, 厳密な定義は述べずに, 具体的な例をあげて広義積分の定め方を示したが, 実用上これで十分であろう.

また, 広義積分においても, 収束性に注意して置換積分や部分積分等, 通常積分の計算方法を用いることができる.

問 2.1. 次の積分を求めよ.

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

$$(2) \int_1^{\infty} x^{\alpha} dx \quad (\alpha > -1)$$

$$(3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$$

$$(4) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^2}$$

$$(5) \int_0^1 \log x dx$$

$$(6) \int_{-1}^1 \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(7) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(8) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$(9) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+4}$$

ガンマ関数とベータ関数

広義積分で定義される 2 つの関数を紹介する. これらは, 重積分の章で述べる $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ の値と合わせて, いろいろな定積分の値を求めるのに有効である.

$s > 0$ のとき, $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束することが知られている. そこで,

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

とおくと, 区間 $s > 0$ において1つの関数が定義される. この関数を Euler のガンマ関数 (Γ 関数) という.

例 2.5. $\Gamma(s)$ に対して, 次の関係式が成り立つことを示せ.

(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

(2) n を自然数とすると, $\Gamma(n) = (n-1)!$

解 (1) $\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^s dx = [-e^{-x} x^s]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = s\Gamma(s)$

(2) (1) より

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)!\Gamma(1)$$

ここで,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1$$

よって,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

注 2.2. $\Gamma(0.5) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx$ において, $\sqrt{x} = t$ とおくと, $\Gamma(0.5) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$ が得られる. この値は $\sqrt{\pi}$ であることが p.156 で示されるが, 次の問には必要はない.

問 2.2. 次の値を求めよ.

(1) $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$

(2) $\frac{\Gamma(2.5)}{\Gamma(0.5)}$

(3) $\frac{\Gamma(3)\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)}$

(4) $\frac{6\Gamma(\frac{8}{3})}{5\Gamma(\frac{2}{3})}$

s が大きくなると, $\Gamma(s)$ の計算は非常に困難になるが, 次の関係式

$$\Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi s} s^s e^{-s} e^{\frac{\theta}{12(s+1)}} \quad (0 < \theta < 1)$$

が使われる. 大きな s に対しては $e^{\frac{\theta}{12(s+1)}}$ は 1 に近く省略できる. また, この式から整数 n に対して,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

ということが読み取れる. “ \sim ” は, 大きな n に対してほぼ等しいという意味である. この式は $n!$ が十分大きな n に対して, どのくらいの程度で大きくなるかを示しており, スターリングの公式という.

問 2.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ を求めよ.

$p > 0, q > 0$ のとき,

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

は収束することが知られている. $B(p, q)$ をベータ関数 (β 関数) といい, 次の関係が知られている. この式の証明は第7章の例 3.6 で示す.

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

例 2.6. 次の等式を証明せよ.

$$(1) B(p, q) = B(q, p) \qquad (2) B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta$$

解 (1) は $x = 1 - y$, (2) は $x = \sin^2 \theta$ とおいて置換積分せよ.

問 2.4. Γ 関数と β 関数を使って, 次の積分の値を求めよ. (n は自然数で, $m > -1$)

$$(1) \int_0^1 x^4(1-x)^3 dx \qquad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^5 \theta d\theta \qquad (3) \int_0^1 x^m (\log x)^n dx$$

3 定積分の応用

面積

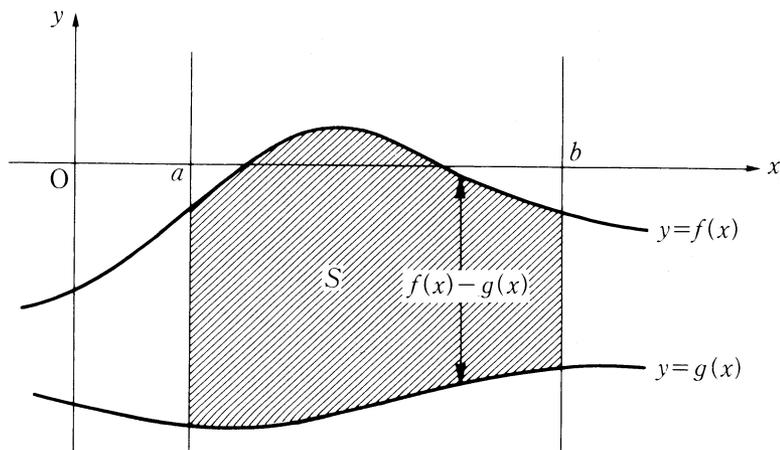
$[a, b]$ において $f(x)$ は有界, 連続で, $f(x) \geq 0$ であるとする. このとき, 定積分 $\int_a^b f(x) dx$ が定まる. この値を, 曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = a, x = b$ および x 軸とで囲まれた図形的面積 S とすることは, 定積分の定義を考えれば自然な考えであろう. すなわち,

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

である.

Point. この事実は知っている人も多いだろうが, 高校では $f(x)$ は連続だと仮定して, 面積に対応する関数 $S(x) = \int_a^x f(t) dt$ の微分が $f(x)$ と等しくなると説明されたはずである. 定積分の定義と, 細い長方形の和で面積を近似していく考え方にたてば, 連続でなくても面積を計算できる場合がある. また, 質量・エネルギーなど様々な量を微小な部分の和で近似

していく定積分の考え方は理工学で重要である.



定理 3.1. $[a, b]$ で連続な 2 つの関数 $f(x), g(x)$ があって, $f(x) \geq g(x)$ であるとき, 2 つの曲線 $y = f(x), y = g(x)$ と 2 直線 $x = a, x = b$ とによって囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

円の面積を計算してみよう.

例 3.1. 円 $x^2 + y^2 = a^2$ の面積を求めよ. ($a > 0$)

解 $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ であるから,

$$S = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a \sin \theta)^2} a \cos \theta d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta d\theta = 4a^2 \frac{\pi}{4} = \pi a^2$$

注 3.1. 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の面積は πab であることが, まったく同様な計算で示されるので確かめてみよ.

問 3.1. 次の面積を求めよ.

- (1) 曲線 $y = x(x-1)$ と x 軸との間の部分
- (2) 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と x 軸と y 軸とで囲まれる部分

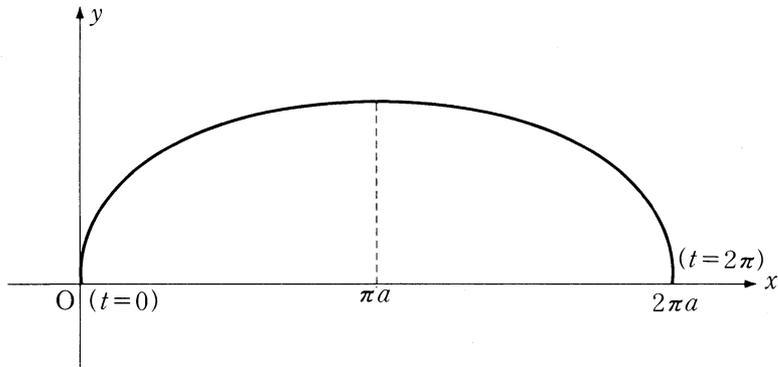
問 3.2. 2 つの放物線 $y^2 = 4px, x^2 = 4py$ で囲まれる部分の面積を求めよ. ($p > 0$)

問 3.3. 曲線 $y^2 = x(x-a^2)^2$ の囲む部分の面積を求めよ. ($a \neq 0$)

曲線がパラメータで表されているときは, 置換積分の考え方で処理できる.

例 3.2. サイクロイド $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ と x 軸の囲む面積を求めよ.

解 この曲線は下図のようになり, $t=0$ のとき $x=0$, $t=2\pi$ のとき $x=2\pi a$ である.



$x'(t) = a(1 - \cos t)$ より,

$$S = \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$$

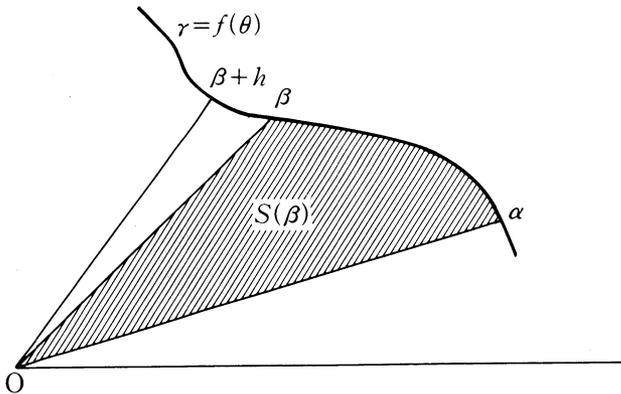
$$\int_0^{2\pi} \cos t dt = 0, \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \text{ に注意して}$$

$$S = 3\pi a^2$$

を得る.

問 3.4. 曲線 $x = t^3$, $y = t^2 - 4$ ($0 \leq t \leq 2$) と両座標軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

次に, 極座標によって方程式 $r = f(\theta)$ で表される曲線と, 極を通り偏角が α, β なる 2 直線によって囲まれる図形の面積 S を考えよう.



上の図で, 2 直線 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ と曲線 $r = f(\theta)$ によって囲まれる図形の面積は α を固定すれば β によって決まるので, これを $S(\beta)$ とおく. 閉区間 $[\beta, \beta + h]$ における $f(\theta)$ の最大値, 最小値をそれぞれ M, m とすると,

$$\frac{1}{2}m^2h \leq S(\beta + h) - S(\beta) \leq \frac{1}{2}M^2h$$

したがって,

$$\frac{1}{2}m^2 \leq \frac{S(\beta+h) - S(\beta)}{h} \leq \frac{1}{2}M^2$$

ここで, $h \rightarrow 0$ とすると, $m, M \rightarrow f(\beta)$ であるから,

$$S'(\beta) = \frac{1}{2}f(\beta)^2$$

よって, 求める面積 $S(\beta)$ は

$$S(\beta) = S(\beta) - S(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

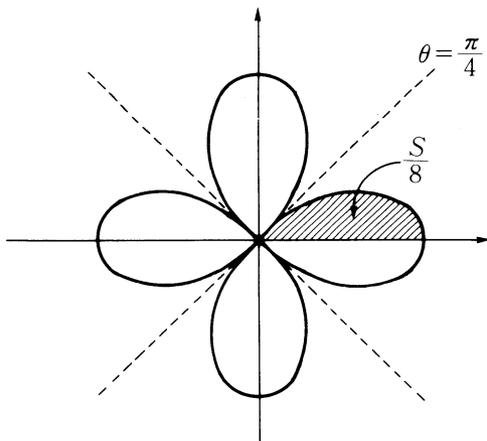
定理 3.2. $r = f(\theta)$ で表される曲線と, 極を通り偏角が α, β なる 2 直線によって囲まれる図形の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

例 3.3. 曲線 $r = |a \cos 2\theta|$ の囲む部分の面積を求めよ. ($a > 0$)

解 $[0, \frac{\pi}{4}]$ にある図形の面積の 8 倍を求めればよいから,

$$S = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos^2 2\theta d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\theta) d\theta = 2a^2 \left[\theta + \frac{\sin 4\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} a^2.$$



問 3.5. 円 $x^2 + y^2 = a^2$ の極方程式は $r = a$, ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) であることを用いて, 円の面積を計算せよ.

問 3.6. 曲線 $r = a|\sin 3\theta|$ の囲む面積を求めよ. ($a > 0$)

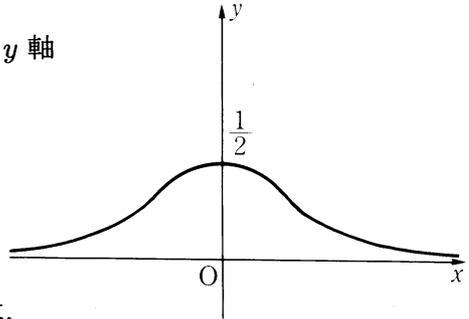
問 3.7. レムニスケート $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ の囲む面積を求めよ.

無限に延びている図形に対しても, 広義積分を使えば, 面積に当たるものを定められる.

例 3.4. 曲線 $y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ と x 軸との間の面積を求めよ.

解 図のように, この曲線は x 軸を漸近線にもち, y 軸に対して対称である. 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} y \, dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \, dx. \end{aligned}$$



$e^x = t, b = e^a$ とおくと, $e^x \, dx = dt$ でこの積分は,

$$2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{t^2 + 1} \, dt = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} [\tan^{-1} t]_1^b = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

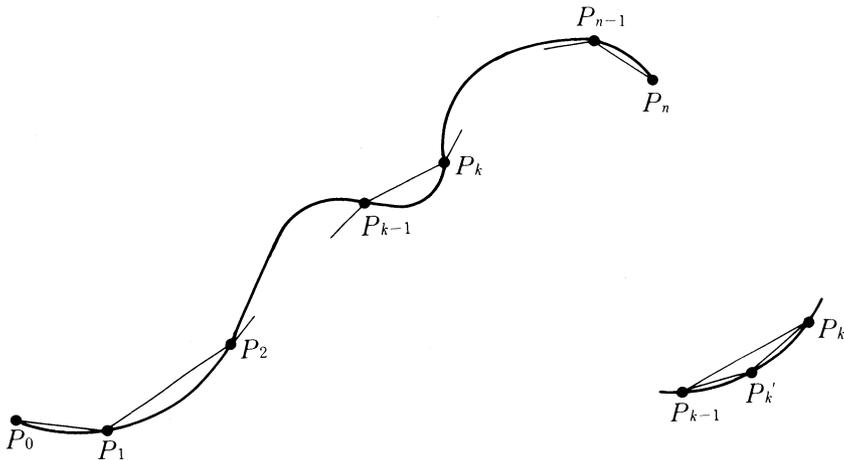
問 3.8. 次の図形の面積を求めよ.

(1) 曲線 $y = \frac{1}{x^2}$ と x 軸の $x \geq 1$ の部分, および直線 $x = 1$ とで囲まれた図形.

(2) 曲線 $y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ と x 軸との間の部分.

曲線の長さ

閉区間 $[a, b]$ における曲線 $y = f(x)$ の長さを考えよう. 図のように, $P_0(a, f(a))$ と $P_n(b, f(b))$ の間に, 順に区分点 P_1, P_2, \dots, P_{n-1} をとる. 曲線の点 P_{k-1} と点 P_k の間を線分 $P_{k-1}P_k$ でおきかえ, それらをつなげた折れ線で曲線を近似してみよう. いいかえれば, 折れ線の長さの総和を考えるのである. もし, さらに区分点を追加すれば, 明らかにこの和は大きくなる. そこで, 曲線のあらゆる分割に対する折れ線の長さの上限を, この曲線の長さとするのである.



注 3.2. 以下の曲線の長さについての定理で仮定されている条件は、この上限が存在するための十分条件である。

$f(x)$ は $[a, b]$ で定義された関数で、 $f'(x)$ は連続であるとする。 $[a, b]$ における曲線 $y = f(x)$ の長さは、定積分によって計算することができる。

$[a, b]$ を n 個に分割し、区分点を $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$, $x_0 = a, x_n = b$ とする。各 x_k に応じて、曲線上にも区分点 $P_k(x_k, f(x_k))$ がとれる。曲線の点 P_{k-1} と点 P_k の間の部分を線分 $P_{k-1}P_k$ でおきかえ、それらをつなげた折れ線で曲線を近似してみよう。2点 P_{k-1}, P_k の距離は、

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2}$$

平均値の定理より、 $\alpha_k \in (x_{k-1}, x_k)$ で

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\alpha_k)(x_k - x_{k-1})$$

を満たすものが存在する。このとき、

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + (f'(\alpha_k))^2}(x_k - x_{k-1})$$

である。分割を限りなく細かくするとき、 $\delta_k \rightarrow 0$ で、右辺の極限は定積分の定義から、

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

となる。実際、次の定理が成り立つ。

定理 3.3. 閉区間 $[a, b]$ で関数 $f(x)$ が定義されていて、 $[a, b]$ で $f'(x)$ が連続なとき、 $[a, b]$ における曲線 $y = f(x)$ の長さ L は、

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

例 3.5. 密度が一樣な綱が、両端を地面から同じ高さに固定されてつるされているとき、この綱の形状は懸垂線(カテナリー)とよばれ、次の方程式

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

で表されることが知られている (p.32 参照)。ここで、 a は正の定数である。この曲線上の $x = 0$ に対応する点から $x = b$ に対応する点までの曲線の長さを求めよ。ただし、 $0 < b$ とする。

解 $y' = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$ であるから、

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4} (e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}) = \frac{1}{4} (e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}) = \frac{1}{4} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2$$

である。よって、求める曲線の長さ L は、

$$L = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^b \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx = \frac{1}{2} [ae^{\frac{x}{a}} - ae^{-\frac{x}{a}}]_0^b = \frac{a}{2} (e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{b}{a}})$$

問 3.9. 次の曲線の長さを求めよ.

(1) 曲線 $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ の $0 \leq x \leq 8$ の部分

(2) 曲線 $3y^2 = x(x-1)^2$ の輪線部

一般に曲線がパラメータを使って表されているときには, 次のことが成り立つ.

定理 3.4. 曲線 C がパラメータ t を使って

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leq t \leq b$$

と表されているとき, $\varphi'(t), \psi'(t)$ が $[a, b]$ で連続ならば, C の長さ L は,

$$L = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

で与えられる.

例 3.6. 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) の全長 L は次の式で表されることを示せ.

$$L = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + e^2 \sin^2 t} dt, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

解 楕円のパラメータ表示 $x = a \cos t, y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) を利用してみよう.

$$x'(t) = -a \sin t, y'(t) = b \cos t \text{ より,}$$

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2(1 - \sin^2 t)} = \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2}$$

$a^2 - b^2 = b^2 e^2$ を代入すると, 上の式は $\sqrt{b^2 e^2 \sin^2 t + b^2}$ となる.

したがって楕円の全長 L は,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + e^2 \sin^2 t} dt$$

である.

問 3.10. 次の曲線の長さを求めよ. ただし a は正の定数である.

(1) $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$ の $0 \leq t \leq 2\pi$ の部分

(2) サイクロイド $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

定理 3.4 の特別な場合として次の定理が得られる.

定理 3.5. 曲線 C が極座標を使って,

$$r = f(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

と表され、 $f'(\theta)$ が連続ならば、 C の長さ L は、

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta$$

で与えられる。

証明 $x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta$, $y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta$ であるから、曲線 C がパラメータ θ を使って表されている。定理 3.4 より、

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta$$

$x'(\theta) = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta$, $y'(\theta) = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta$ であるから、

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = f(\theta)^2 + f'(\theta)^2$$

となり、定理が証明される。□

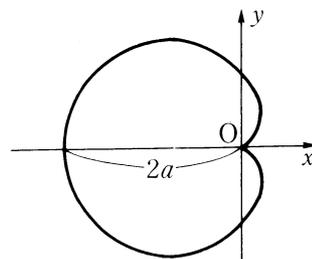
例 3.7. カージオイド $r = a(1 - \cos \theta)$ の全長を求めよ。

解 $r'(\theta) = a \sin \theta$ であるから、

$$\begin{aligned} r^2 + (r')^2 &= a^2 \left\{ (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \right\} \\ &= 2a^2(1 - \cos \theta) = 4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

ゆえに、

$$L = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 4a \int_0^{\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \left[-\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = 8a$$



問 3.11. 曲線 $r = a\theta$ の $0 \leq \theta \leq \alpha$ の部分の長さを求めよ。 a は正の定数である。

問 3.12. レムニスケート $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ ($a > 0$) の全長は次の式で表されることを示せ。

$$L = 4\sqrt{2}a \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

第4章 練習問題

1. 次の定積分の値を求めよ.

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int_{-2}^2 \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} dx & (2) \int_0^1 x^5 e^{-x^3} dx & (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^6 x dx \\
 (4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} & (5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(3 \sin x + 4 \cos x)^2} & (6) \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)} \\
 (7) \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{d\theta}{5+4 \cos \theta} & (8) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx & (9) \int_0^{\pi} x \sin^2 x dx \\
 (10) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\tan x) dx & (11) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} dx & (12) \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx
 \end{array}$$

2. 次の定積分を求めよ.

$$\begin{array}{ll}
 (1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} & (2) \int_0^{2a} \frac{x dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \quad (a > 0) \\
 (3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} & (4) \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0) \\
 (5) \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \quad (n \text{ は自然数}) & (6) \int_0^1 \frac{x \log x}{\sqrt{1-x^2}} dx
 \end{array}$$

3. 次の関数を x で微分しなさい.

$$(1) \int_1^x \frac{t}{1+t^2} dt \quad (2) \int_2^{3x+1} e^t dt \quad (3) \int_1^{e^x} \log t dt \quad (4) \int_0^x (x-t)f(t) dt$$

4. 自然数 n に対して, $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx$ とするとき, $I_n = I_{n-1}$ を示し, これを用いて I_n の値を求めよ.

5. 定積分を利用して次の不等式を示せ.

$$\begin{array}{l}
 (1) \frac{\pi}{4} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin x}} dx < 2 - \sqrt{4-\pi} \\
 (2) \frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx < \frac{\pi}{6} \\
 (3) n \geq 2 \text{ のとき, } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} \\
 (4) 2(\sqrt{n+1}-1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}
 \end{array}$$

6. Γ 関数と β 関数に関する公式を用いて次の値を求めよ.

$$\begin{array}{llll}
 (1) \Gamma(5) & (2) \frac{\Gamma(4.1)}{\Gamma(1.1)} & (3) B\left(\frac{3}{2}, 2\right) & (4) B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
 (5) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) & (6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx & (7) \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx &
 \end{array}$$

7. 2つの楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$, $4x^2 + y^2 = 1$ の囲む部分の面積を求めよ.
8. 放物線 $y^2 = 4px$ と、その焦点を通り傾きが m の直線との囲む部分の面積を求め、かつその面積が最小となるときの直線の方程式を求めよ.
9. アステロイド $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) の囲む面積、およびその長さを次のパラメータ表示を使って求めよ.

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

10. 曲線 $x = t^2$, $y = t - t^3$ の囲む部分の面積を求めよ.
11. 曲線 $r = a(1 - \sin \theta)$ で囲まれた図形の面積を求めよ. ($a > 0$ とする. この曲線は例 3.7 のカージオイドと同じ形をしている.)
12. 曲線 $y = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ とその漸近線、および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ. ($a \neq b$)
13. 放物線 $y = x^2$ の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを求めよ.
14. 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の全長を求めよ.
15. 曲線 $r = e^\theta$ の $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分の長さを求めよ.
16. 追跡線 $x + \sqrt{a^2 - y^2} = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ ($a > 0$) の 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ の間の長さを求めよ.

17. 次の級数を計算せよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$$

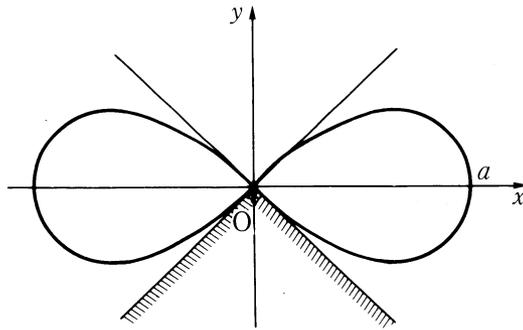
$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^2} \left(\sin \frac{\pi}{n} + 2 \sin \frac{2\pi}{n} + 3 \sin \frac{3\pi}{n} + \cdots + n \sin \frac{n\pi}{n} \right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}} \right)$$

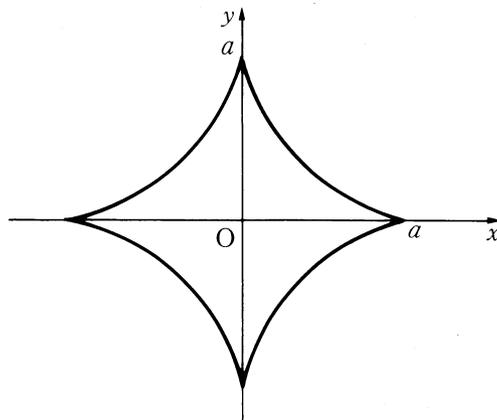
$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \log \frac{n+1}{n} + \frac{1}{n+2} \log \frac{n+2}{n} + \cdots + \frac{1}{n+n} \log \frac{n+n}{n} \right)$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \right)$$

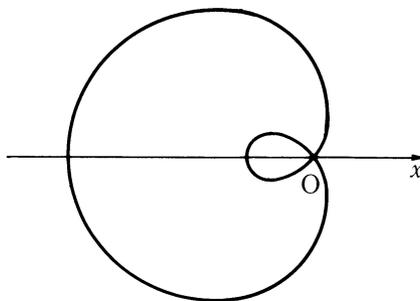
平面曲線の図



レムニスケート ($r^2 = a^2 \cos 2\theta$)



アステロイド ($x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$)



リマソン ($r = b - a \cos \theta (a > b > 0)$)