第0章

初等関数

まず, 微分積分学を通して頻繁に現れる関数とそのグラフについて, まとめて記しておく.

1　三角関数

原点を端点とする 2 つの半直線 OP と OQ のなす角の大きさは, 原点を中心とする半径 1 の円からこれらの半直線が切り取る円弧の長さ θ に比例する. そこで, このとき

$$\angle POQ = \theta \text{ rad}$$

とすることにより角の大きさを測ることができる. rad は角度の単位であり **「ラジアン」** と読む. 円周の長さは 2π であるので,

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

となり, よって

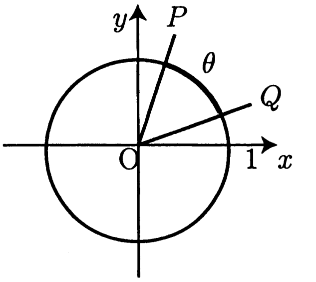


図 1.1

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.0174\cdots \text{ rad},$$
$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = (57.29\cdots)^\circ$$

である. また一般に,

$$x^\circ = \frac{\pi}{180}x \text{ rad}, \qquad \theta \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\theta\right)^\circ$$

となる. ラジアンを用いて角の大きさを測る方法を弧度法といい, 微分積分学ではこれを用いるのが便利である. 本書では弧度法を採用し, 以下単位 rad を一々記さない. 例えば $\sin\left(\frac{\pi}{3} \text{ rad}\right)$ と書くべき所を $\sin\frac{\pi}{3}$ と書く.

例 1.1. 半径 r, 中心角 θ の扇形の弧長を l, 面積を S とする. このとき,

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{S}{\pi r^2}$$

であるから,

$$l = r\theta, \qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

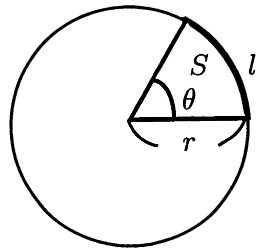


図 1.2

平面上に原点を中心とする半径 1 の円と点 $A(1,0)$ を考える. 点 A を出発して, この円の周上を時計回りと逆の向きに角度 θ だけ進んだ点を $P(x,y)$ とする. このとき,

$$\sin\theta = y, \qquad \cos\theta = x, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定義する. 三平方の定理から $x^2 + y^2 = 1$ であり,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

が成り立つ. ここで $\sin^2\theta$ は $(\sin\theta)^2$ を表している.

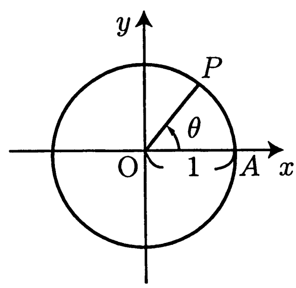


図 1.3

θ が 2π の整数倍増えても点 P の座標は変わらないから,

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 2\pi n) &= \sin\theta, \\ \cos(\theta + 2\pi n) &= \cos\theta \end{aligned} \qquad (n \text{ は整数})$$

となる. また $\tan\theta$ については,

$$\tan(\theta + \pi n) = \tan\theta$$

が成り立つ.

例 1.2. 右図において, 点 $P(x,y)$ の $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させた点 P' の座標は $(-y, x)$ だから,

$$\begin{aligned} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= x = \cos\theta, \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= -y = -\sin\theta, \\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{x}{-y} = \frac{-1}{\tan\theta}. \end{aligned}$$

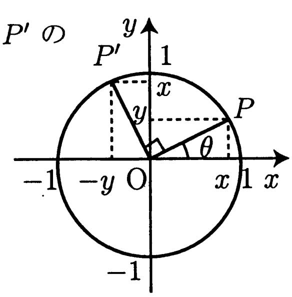


図 1.4

定理 1.1 (加法定理).

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

証明　第2式を認めれば,

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= -\cos\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\cos\alpha\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\alpha\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta
\end{aligned}
$$

となって第1式が得られる. そこで, 第2式を証明しよう. 右図で点 $A(1,0)$ を角 $(\alpha+\beta)$, β, $-\alpha$ だけ回転させた点がそれぞれ P, Q, R である. まず $P(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$ ゆえ,

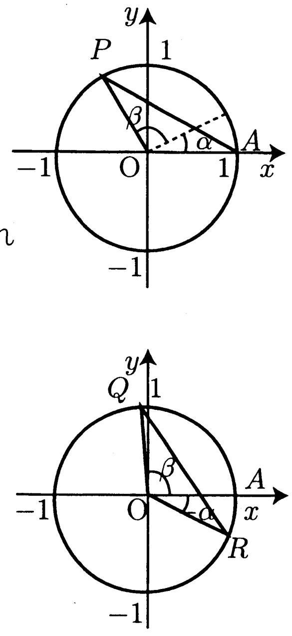


図1.5

$$
\begin{aligned}
AP^2 &= \{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha+\beta) \\
&= 2-2\cos(\alpha+\beta).
\end{aligned}
$$

一方で,

$$
Q(\cos\beta,\sin\beta), \qquad R(\cos\alpha,-\sin\alpha)
$$

ゆえ,

$$
\begin{aligned}
QR^2 &= (\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta+\sin\alpha)^2 \\
&= 2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}
$$

$AP=QR$ であるから第2式が成り立つ.

例 **1.3.**

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \\
\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

$\tan(\alpha+\beta)$ については,

$$
\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}
$$

が成り立つ. また, 加法定理において特に $\alpha=\beta$ とおけば,

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha,\\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = 1-2\sin^2\alpha,\\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

を得る.

問 1.1. $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$, $\tan\frac{\pi}{8}$ を求めよ.

例 1.4. $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

証明　一般に加法定理により,

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

であることに注意する. いま $\alpha=\frac{\pi}{5}$ とすると,

$$\cos 2\alpha = \cos(\pi-3\alpha) = -\cos 3\alpha$$

であるから, $X=\cos\alpha$ とおくとき,

$$\begin{aligned}&2X^2-1=-(4X^3-3X),\\ &4X^3+2X^2-3X-1=0,\\ &(X+1)(4X^2-2X-1)=0.\end{aligned}$$

$0<X<1$ であるので, これから $X=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ を得る.

問 1.2. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ について次の表の値を確認せよ (ヒント: $\frac{\pi}{24}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}$).

α	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{3(2-\sqrt{2})}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{3(2+\sqrt{2})}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

α	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{3(2+\sqrt{2})}}{4}$	1
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{3(2-\sqrt{2})}}{4}$	0

三角関数のグラフについては第 4 節で考える.

2　べき・対数

実数 a, r $(a > 0)$ について，以下のようにしてべき a^r を定義する．実数 a を n 個かけたものを a^n と記す．次の指数法則が成り立つ $(m, n$ は自然数$)$.

I. $a^{m+n} = a^m a^n$

II. $a^{mn} = (a^m)^n$

III. $(ab)^n = a^n b^n$

まず，

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \text{ は自然数})$$

と定めることによって，a^n の定義を n が整数であるときにまで拡張する．$\dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}$ であることにより，指数法則がそのまま成り立つことが確かめられる．例えば，

$$\begin{aligned}
&a^{-2+5} = a^3, \quad a^{-2}a^5 = \frac{1}{a^2} \cdot a^5 = a^3,\\
&a^{(-3)4} = a^{-12}, \quad (a^{-3})^4 = \left(\frac{1}{a^3}\right)^4 = \frac{1}{(a^3)^4} = \frac{1}{a^{12}} = a^{-12},\\
&(ab)^{-3} = \frac{1}{(ab)^3} = \frac{1}{a^3b^3}, \quad a^{-3}b^{-3} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3} = \frac{1}{a^3b^3}.
\end{aligned}$$

$a > 0$ とする．a の有理数べき a^r について考える．自然数 p に対して $x^p = a$ となる正の数 x を $\sqrt[p]{a}$ で表し，

$$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$$

とする．そして，有理数 r を $r = \dfrac{q}{p}$ $(p, q$ は整数, $p > 0)$ と書いて

$$a^r = a^{\frac{q}{p}} = (a^{\frac{1}{p}})^q = (\sqrt[p]{a})^q$$

と定義する．

$$a^r = \sqrt[p]{a^q} = (a^q)^{\frac{1}{p}}$$

ともなることが確かめられる．例えば，

$$\begin{aligned}
&4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8,\\
&27^{-\frac{2}{3}} = 27^{\frac{-2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

$\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b}$ であることを用いて，指数法則がやはりそのまま成り立つことが示される．例えば，

$$\begin{aligned}
&3^{\frac{1}{3}+1} = 3^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{3})^4, \quad 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^1 = \sqrt[3]{3} \cdot (\sqrt[3]{3})^3 = (\sqrt[3]{3})^4,\\
&2^{\frac{4}{5} \cdot 3} = 2^{\frac{12}{5}} = (\sqrt[5]{2})^{12}, \quad (2^{\frac{4}{5}})^3 = \{(\sqrt[5]{2})^4\}^3 = (\sqrt[5]{2})^{12},\\
&(2 \cdot 3)^{\frac{5}{2}} = (\sqrt{2 \cdot 3})^5 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^5 = (\sqrt{2})^5(\sqrt{3})^5 = 2^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

r が無理数のときを考える．r を１０進小数に展開して小数点以下 n 桁目までとった有限小数を r_n とする．r_n は有理数だから a^{r_n} はすでに定義されている．n を大きくすると a^{r_n} は一定の値に近づくことが示される．そこで，この一定の値を a^r と定める．例えば，$\pi = 3.14159\cdots$ に対して

$$3^3 = 27, \quad 3^{3.1} = 30.13\cdots, \quad 3^{3.14} = 31.48\cdots,$$
$$3^{3.141} = 31.52, \quad 3^{3.1415} = 31.541\cdots, \quad 3^{3.14159} = 31.5441\cdots$$

が次第に近づく値 $31.54428\cdots$ を 3^π の値と定めるのである．

定理 2.1 (指数法則)． 正数 a, b と実数 r, s について次が成り立つ．

I. $a^{r+s} = a^r a^s$

II. $a^{rs} = (a^r)^s$

III. $(ab)^r = a^r b^r$.

次節におけるグラフの考察からも見て取れるように，べき a^r には次の性質がある．
$a > 1$ なら

$$r < s \iff a^r < a^s,$$

また $0 < a < 1$ なら

$$r < s \iff a^r > a^s.$$

問 2.1. r, s が有理数であるときに，上の性質を証明せよ．

問 2.2. 次の数はいくつか．
(1) $27^{-\frac{1}{3}}$　(2) $32^{\frac{1}{5}}$　(3) $8^{-\frac{4}{3}}$　(4) $64^{-\frac{2}{3}}$

問 2.3. 次の数を小さい順に並べよ．
(1) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[5]{4}$　(2) $5^{-1}, 5^0, 5^{\frac{1}{3}}\ 5^{\frac{-2}{3}}, 5^{\frac{1}{2}}$　(3) $\sqrt{0.5}, \sqrt[4]{0.125}, \sqrt[3]{0.25}$

次に対数について考える．$a > 0, a \neq 1$ とする．上述の a^r の性質により，正数 M に対して $a^m = M$ となる実数 m が唯ひとつ存在する．これを $m = \log_a M$ とかく．つまり，

$$m = \log_a M \iff a^m = M$$

である．$a^0 = 1, a^1 = a$ であるから特に，

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1.$$

定理 2.2. 正数 M, N と実数 r について次が成り立つ.

I. $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

I'. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

II. $\log_a(M^r) = r\log_a M$

証明 I. $m = \log_a M$, $n = \log_a N$ とおくと,

$$a^m = M, \qquad a^n = N.$$

指数法則により,

$$MN = a^m a^n = a^{m+n}.$$

よって,

$$\log_a(MN) = m + n = \log_a M + \log_a N.$$

I' も同様にして示せる.

II. $m = \log_a M$ とすると, $a^m = M$. 指数法則から

$$M^r = (a^m)^r = a^{mr}.$$

ゆえに,

$$\log_a(M^r) = mr = r\log_a M.$$

例 2.1 (底の変換公式) . $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ で $M > 0$ のとき,

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

証明 $m = \log_a M$ とおくと $a^m = M$. この等式の両辺の b を底とする対数をとると, 定理 2.2 の II により,

$$m\log_b a = \log_b M.$$

よって,

$$\log_a M = m = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

問 2.4. $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$ を計算しなさい.

例 2.2. $a > 1$ のとき,

$$M < N \iff \log_a M < \log_a N.$$

$0 < a < 1$ のとき,

$$M < N \iff \log_a M > \log_a N.$$

証明 $a > 1$ のときのみを考える. $m = \log_a M$, $n = \log_a N$ とすると

$$a^m = M, \qquad a^n = N.$$

よって,

$$M < N \iff m < n \iff \log_a M < \log_a N.$$

ここで, ニュートン法と呼ばれる方法を用いたべき根 $\sqrt[p]{a}$ の近似計算について, 具体例で説明しておこう.

例 2.3. $\sqrt{2}$ の近似値を求めてみる. $x_0 > \sqrt{2}$ なる x_0 をひとつとる (例えば $x_0 = 2$ でよい). そして, 漸化式

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

によって, $x_1, x_2, \cdots$ を定める[1]. 相加相乗平均の定理より,

$$\begin{aligned} x_1 &> \sqrt{x_0 \cdot \frac{2}{x_0}} = \sqrt{2}, \\ &\cdots \\ x_n &> \sqrt{x_{n-1} \cdot \frac{2}{x_{n-1}}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

であり, さらに

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{2}{x_n}\right) > 0$$

である. よって,

$$\sqrt{2} < \cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x_0$$

となっている.

近似値 x_n の誤差 $x_n - \sqrt{2}$ については,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}x_n) \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{2})^2 \\ &< \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_n - \sqrt{2})^2 \\ &< (x_n - \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

[1] 放物線 $y = x^2 - 2$ の点 $(x_n, x_n^2 - 2)$ での接線の x 切片が x_{n+1} である.

が成り立つ. ゆえに,

$$x_n - \sqrt{2} < (x_{n-1} - \sqrt{2})^2 < (x_{n-2} - \sqrt{2})^4 < \cdots < (x_0 - \sqrt{2})^{2^n}$$

となり, $x_0 - \sqrt{2} < 1$ なら

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$$

となることが見られる.

例えば $x_0 = 2$ とすると,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} = 1.5, \\ x_2 &= \frac{17}{12} = 1.416\cdots, \\ x_3 &= \frac{577}{408} = 1.4142156\cdots, \\ x_4 &= \frac{665857}{470832} = 1.4142135623746\cdots \end{aligned}$$

であり, 近似値 x_3 の誤差は,

$$x_3 - \sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_2 - \sqrt{2})^2 < \frac{5}{2\times 7}\left(\frac{17}{12} - \frac{7}{5}\right)^2 = \frac{1}{10080} < 10^{-4}$$

と評価される. ここで $\sqrt{2} > \dfrac{7}{5}$ を用いた.

問 2.5. 上にならって $\sqrt{3}$ の近似値の求め方を考え, 誤差 10^{-5} 以内で $\sqrt{3}$ を求めてみよ.

3 指数・対数関数のグラフ

一般に, 関数 $y = f(x)$ のグラフとは, 平面上の点 $(x, f(x))$ の集まりのことである. ここでは, $f(x)$ が指数関数および対数関数であるときに, 関数のグラフがどのような形になるのかを見ておくことにする. まず指数関数について考える, 指数関数とは, $y = a^x$ の形の関数のことである. ただし, $a > 0$ とする.

例 3.1. $y = 2^x$ のとき, いろいろな x に対応する y の値を調べると次のような表ができる.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8	$\cdots$

したがって, $\left(-3, \dfrac{1}{8}\right)$, $\left(-2, \dfrac{1}{4}\right)$, $\cdots$ などが $y = 2^x$ のグラフ上の点となり, グラフは図 3.1 のようになる.

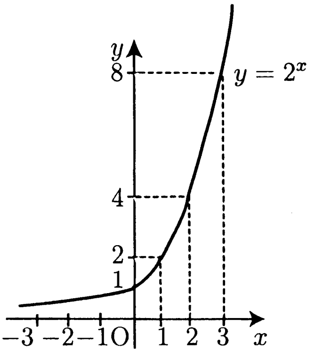


図 3.1

我々の今の段階では, 関数のグラフを書くには, 上の例のようにできるだけ多くのグラフ上の点を考えてそれらをなめらかな曲線で結ぶという実験的な方法しかない. 後にグラフを描くのに有効ないくらかの知識を得ることになろう.

$a>1$ のときには, $y=a^x$ のグラフは上の例のグラフと同様に, y 切片が 1 で x 軸を漸近線とする右上がりの曲線となる.

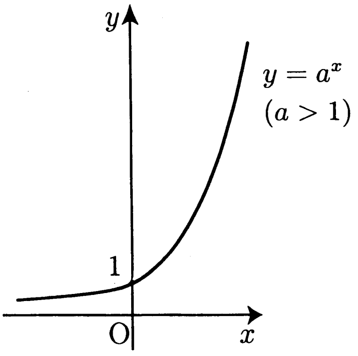


図 3.2

例 3.2. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のとき, $y=2^{-x}$ ゆえ先と同様に x と y の対応表を作れば次のようになる.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	8	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$

この表は, 例 3.1 の表で y の値の欄の数の並びを逆にしたものとなっている. したがって, これをもとに $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを描くと, 図 3.3 のように $y=2^x$ のグラフと y 軸に関して対称なものが得られる.

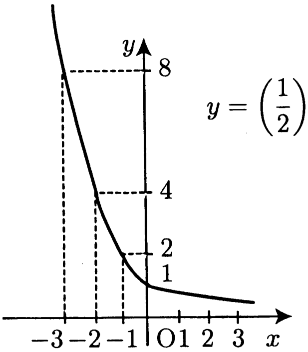


図 3.3

$0<a<1$ のときには, $y=a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ のグラフは $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ のグラフと y 軸に関して対称であり, 上の例のグラフと同様に, y 切片が 1 で x 軸を漸近線とする右下がりの曲線となる.

一般に $y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称なものとなる.

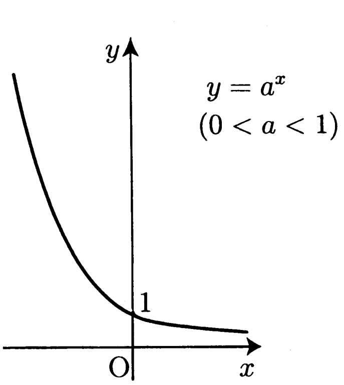


図 3.4

次に, 対数関数のグラフについて考える. 対数関数とは, $a>0$, $a\neq 1$ のときに $x>0$ で定義される $y=\log_a x$ の形の関数のことである.

例 3.3. $y=\log_2 x$ のグラフについて考える．$x=2^y$ であるから，例 3.1 の表を上下逆転させれば x と y の対応表ができる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8	$\cdots$
y	$\cdots$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$\cdots$

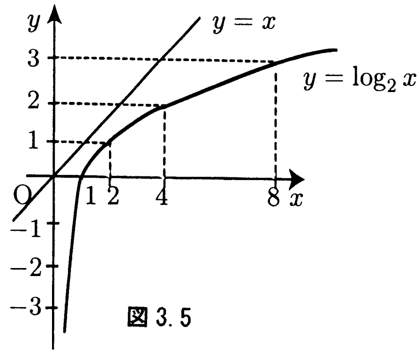


図 3.5

これをもとに $y=\log_2 x$ のグラフをかけば，右のように $y=2^x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称なものを得る．

上の例と同様にして，$y=\log_a x$ のグラフは $y=a^x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称となり，したがって x 切片が 1 で y 軸を漸近線とし，$a>1$ ならば右上がり，$0<a<1$ ならば右下がりとなる．

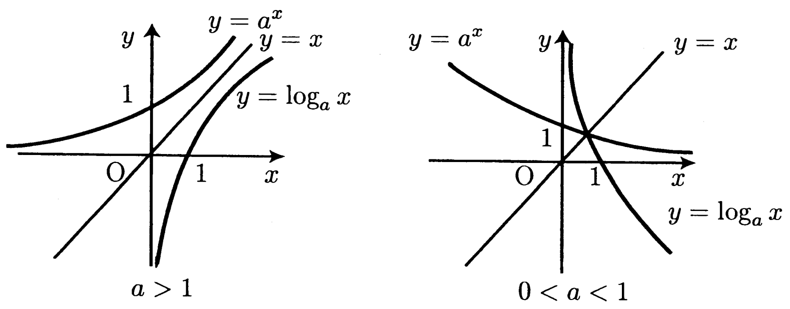


図 3.6

ここでグラフの平行移動について考えておくことにする．

例 3.4. $y=2^{x-1}$ のグラフを描くために表をつくると次のようになる．

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	$\cdots$

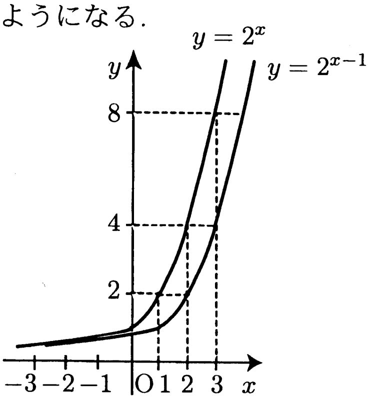


図 3.7

これは例 3.1 の表の y の欄を右へ 1 つだけ移動したものとなるので、$y=2^{x-1}$ のグラフは $y=2^x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものになる．

さらに，例えば $y=2^{x-1}+3$ のグラフは，これをさらに y 軸の正方向に 3 だけ移動させたものとなる．一般に次のことが言える．

定理 3.1. $y = f(x-p)+q$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである．

例 3.5.

$y = x^2+4x+8$ のグラフについて考える．$y=(x+2)^2+4$ と変形できるから，このグラフは放物線 $y=x^2$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 4 だけ平行移動したものとなる．

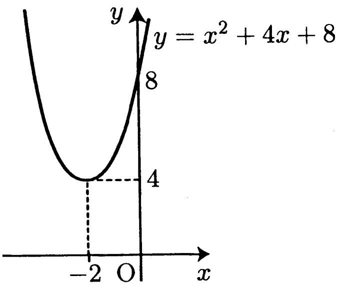


図 3.8

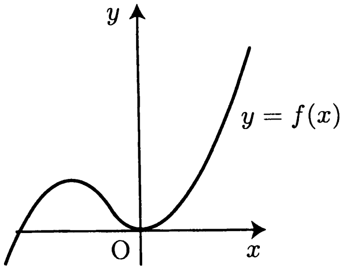
問 3.1. 次の関数のグラフを描け．

(1) $y=2^{x-3}-2$　(2) $y=-2^x+1$　(3) $y=\log_2(x-1)+1$　(4) $y=\log_2\dfrac{1}{x}+3$

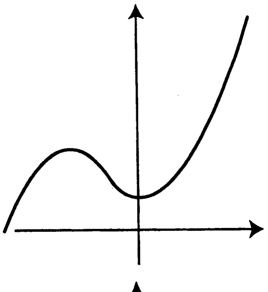
問 3.2. 関数 $y=f(x)$ のグラフが図のようであるとき，次の関数 (1) 〜 (4) のグラフはどのようになるか，(a) 〜 (d) から選べ．

(1) $y=-f(x)$　(2) $y=f(-x)$

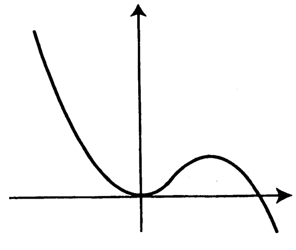
(3) $y=f(x)+1$　(4) $y=f(x-1)$



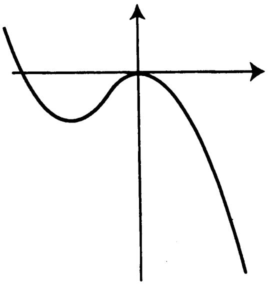
(a)



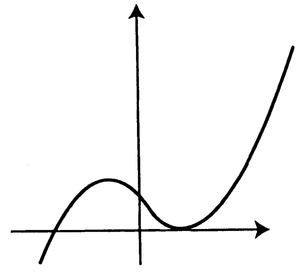
(b)



(c)

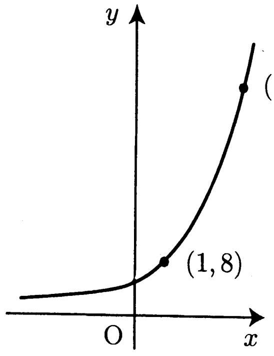


(d)

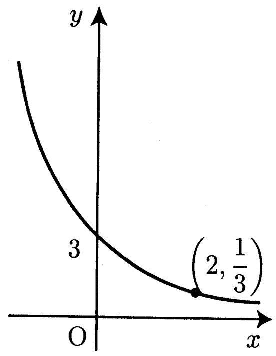


問 3.3. 関数 $y = a^{x+c}$ のグラフが次のようであるとき, a と c の値を定めよ.

(1)



(2)



4　三角関数のグラフ

三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ のグラフについて考えておく, まず $y = \sin x$ とする. グラフのかき方は, 基本的には前節でと同様であるので, まず x と y の値の表を作る. 問 1.2 から y の値の近似値を求めれば次の表ができる.

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	0.13	0.26	0.38	0.5	0.59	0.71	0.81	0.87	0.92	0.97	0.99	1

この表から $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ における $y = \sin x$ のグラフをかけば次のようになる.

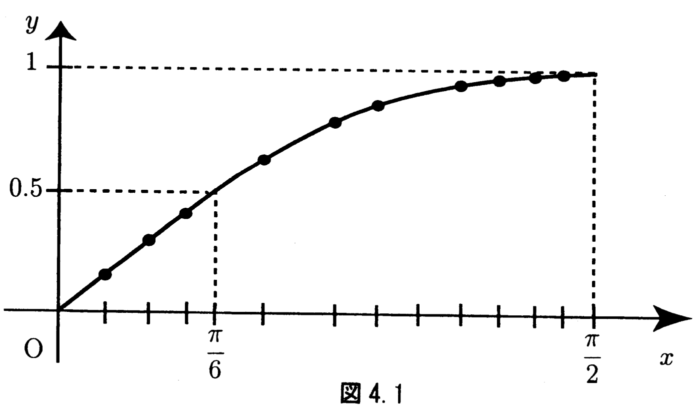


図 4.1

例 1.2 から $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ であるので, $y = \sin x$ のグラフは直線 $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称となり, 上のグラフをもとに $0 \leqq x \leqq \pi$ におけるグラフがかける. さらに $\sin(x + \pi) = -\sin x$ であるので, $\pi \leqq x \leqq 2\pi$ におけるグラフは $0 \leqq x \leqq \pi$ におけるグラフを x 軸方向に π だけ平行移動して x 軸に関して対称移動したものになる. さらに $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$ (n は整数) であることから, $y = \sin x$ のグラフでは, x の値が 2π だけ増減するごとに同じ形が繰り返されることになり, 結局次のようなグラフを得る.

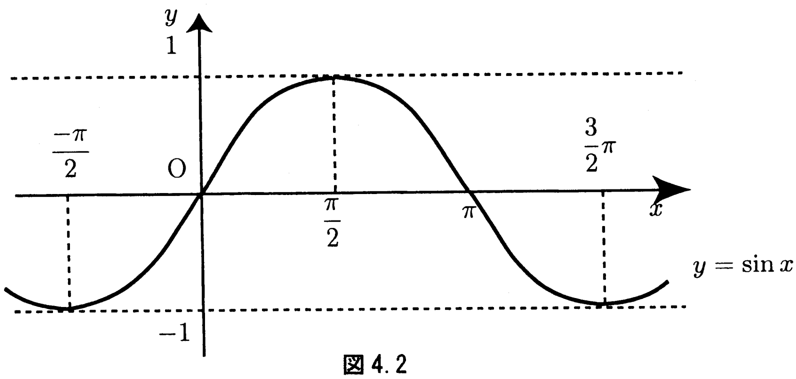


図 4.2

なお, 図 1.3 と $\sin x$ の定義を思い起こせば, 図 1.3 において点 P を点 A から出発させて円周上を正負の向きに回転させたと考えて, 下図のように $y = \sin x$ のグラフをイメージすることもできる.

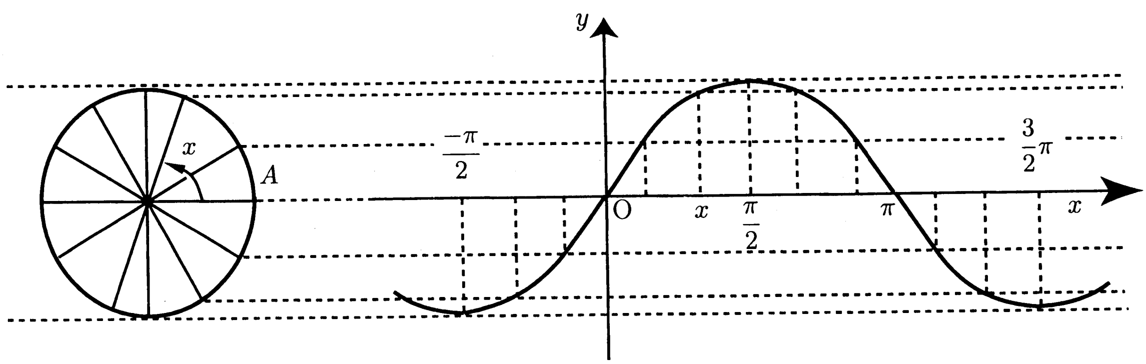


図 4.3

次に, 例 1.2 で見たように $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ であるから, $y = \cos x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものとなる.

最後に $y = \tan x$ のグラフについて考える $\tan(-x) = -\tan x$ ゆえ $y = \tan x$ は原点について対称で, また $\tan(x + \pi) = \tan x$ であるので, x の値が π だけ増減するごとに同じ形が繰り返されることになる. ゆえに, 次の表をもとに $0 < x < \frac{\pi}{2}$ におけるグラフをまず描くことにより図 4.4 を得る, x が $\frac{\pi}{2}$ に近づくとき $|\tan x|$ の値はどんどん大きくなるので, $y = \tan x$ のグラフは直線 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) を漸近線として持つことに注意する.

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$
y	0	0.13	0.27	0.41	0.58	0.77	1	1.38	1.73	2.41	3.73	7.60

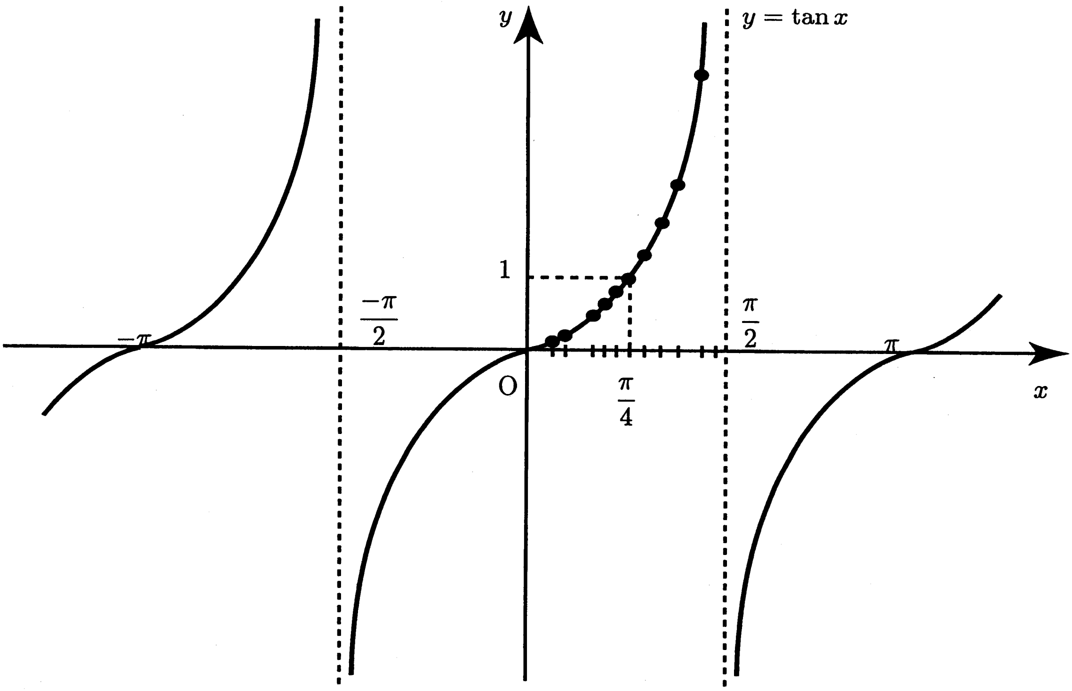


図 4.4

なお, 図 1.3 で A を通り x 軸に垂直な直線と直線 OP の交点を T とすると, T の y 座標が $\tan\theta$ となるので, $y = \sin x$ についてと同様に下図のようにして $y = \tan x$ のグラフをイメージすることもできる.

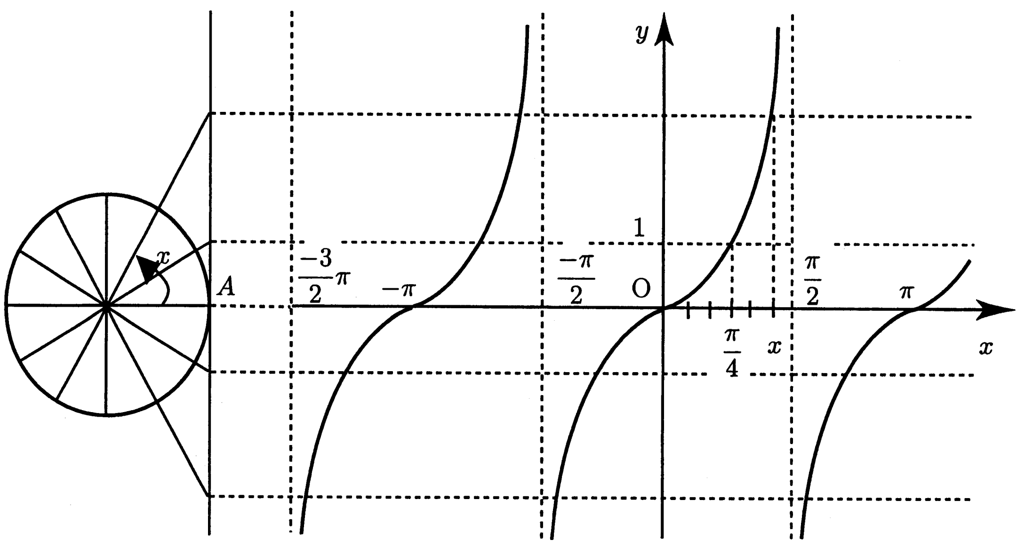


図 4.5

例 4.1. $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ のグラフを描いてみる．

$$\begin{aligned} y &= 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \\ &= 2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

と変形できるから，グラフは $y = 2\sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので次のようになる．

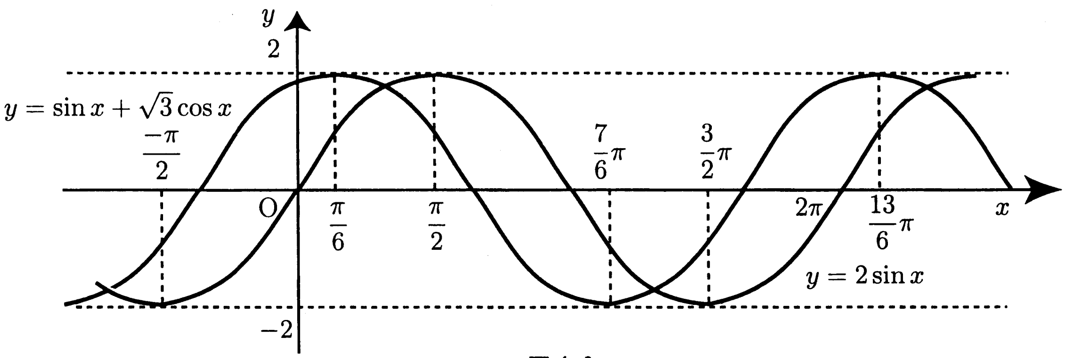


図 4.6

問 4.1. 次の関数のグラフを描け．

(1) $y = \sin 2x$　(2) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$　(3) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

(4) $y = \sin^2 x$　(5) $y = -2 + \cos(x-1)$

問 4.2. $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\mathrm{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ とおく．

(1) $y = \sec x$ について，問 1.2 をもとにして下のような x と y の値の表がつくれる．これを参考にして $y = \sec x$ および $y = \mathrm{cosec} x$ のグラフを描き，それぞれ $y = \cos x$ および $y = \sin x$ のグラフと重ね合わせてみよ．

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$
y	1	1.01	1.04	1.08	1.15	1.24	1.41	1.70	2	2.61	3.86	7.66

(2) $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ を確かめ，$y = \cot x$ のグラフを描け．

5 分数関数と双曲線

$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ の形の関数のグラフを考えてみる．例えば

$$\frac{4x+3}{2x+1} = \frac{2(2x+1)+1}{2x+1} = 2 + \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{2})} + 2$$

のように，$c \neq 0$ であれば

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{k}{x-p} + q$$

と変形できて，$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフは $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動したものとなる．さらに $k > 0$ のとき，(α, β) が $y = \dfrac{k}{x}$ 上の点であれば

$$\beta = \frac{k}{\alpha}, \qquad \frac{\beta}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\sqrt{k}}}$$

であるから $\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{k}}, \dfrac{\beta}{\sqrt{k}}\right)$ は $y = \dfrac{1}{x}$ 上の点となる．よって，$y = \dfrac{k}{x}$ のグラフは $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフを原点を中心に $\sqrt{k}$ 倍に拡大したものである．同様に $k < 0$ のときは，$y = -\dfrac{1}{x}$ のグラフを $\sqrt{|k|}$ 倍に拡大したものが $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフである．したがって $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフは次のようになる．

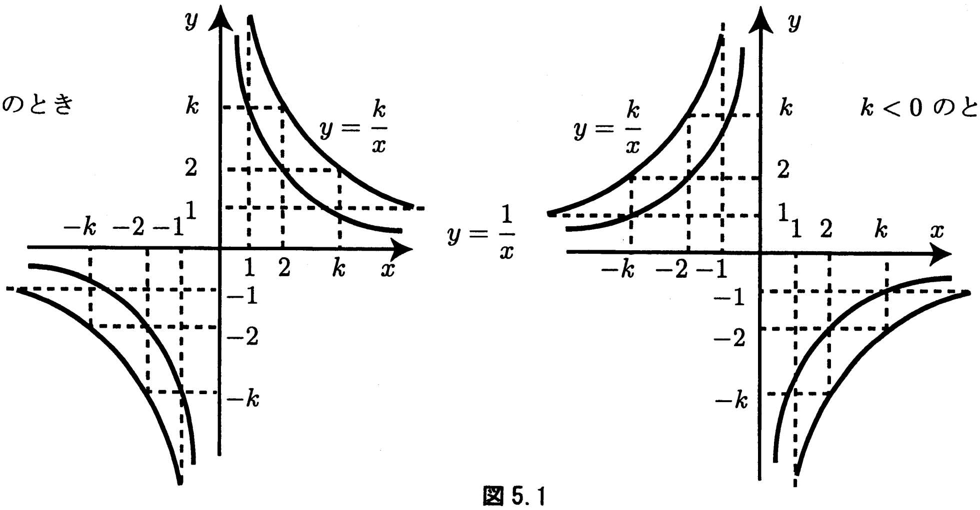


図 5.1

$k \neq 0$ のとき，$y = \dfrac{k}{x-p} + q$ のグラフは双曲線とよばれ，2 直線 $x = p$ と $y = q$ を漸近線として持つ．

例 5.1. $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ のグラフをかく．

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 2$$

であるから，このグラフは $y = \dfrac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1, y 軸方向に 2 だけ移動したもので，次のようになる．

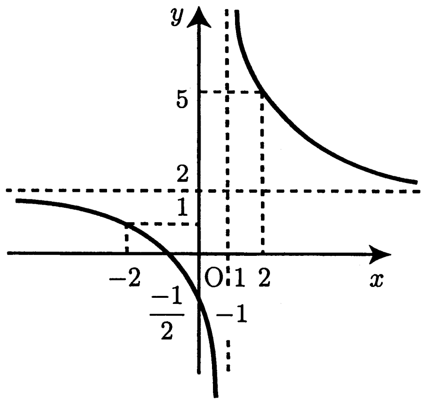


図 5.2

問 5.1. 次の関数のグラフをかけ．

(1) $y = \dfrac{3x}{x-2}$　　(2) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$

問 5.2. $y = \dfrac{ax+b}{x+d}$ のグラフは点 $(1, -1)$ を通り，2 直線 $x = -3$ と $y = 2$ を漸近線に持つという．a, b, d の値を求めよ．

ここで，双曲線のひとつの性質を見ておこう．

例 5.2. 双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ と 2 点 $F_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $F_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ を考える．双曲線上の点 P について

$$|F_1P - F_2P| = 2\sqrt{2}$$

がつねに成り立つ (F_1, F_2 をこの双曲線の焦点という)．

証明 $P\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$ とする．$x>0$ ならば，

$$\begin{aligned}
F_1P &= \sqrt{(x-\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{x^2-2\sqrt{2}x+2+\frac{1}{x^2}-2\sqrt{2}\frac{1}{x}+2} \\
&= \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+2} \\
&= \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2} \\
&= x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

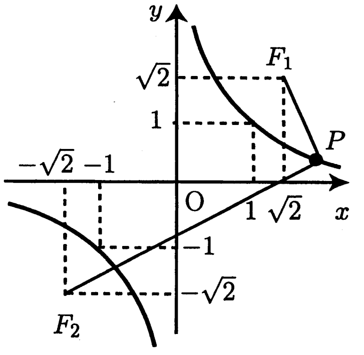


図 5.3

同様にして，

$$F_2P = x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}.$$

よって，

$$F_1P - F_2P = -2\sqrt{2}.$$

また $x<0$ なら，$F_1P-F_2P=2\sqrt{2}$ が示せる．

一般に双曲線とは方程式

$$C: \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a,b>0)$$

で定まる曲線に平行移動と回転を施して得られる曲線のことである．双曲線 C は 2 直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ と $y=-\dfrac{b}{a}x$ を漸近線とする．また $e=\sqrt{a^2+b^2}$, $F_1(e,0)$, $F_2(-e,0)$ とすれば，C 上の点 P について

$$|F_1P-F_2P|=2a$$

がつねに成り立つ．

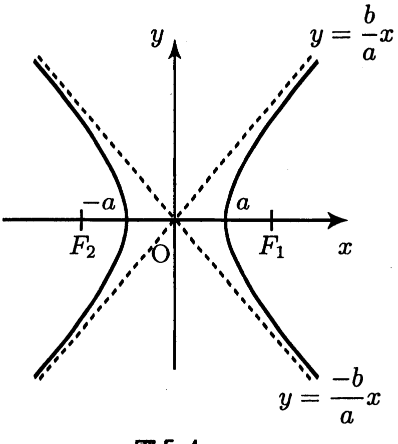


図 5.4

問 5.3. 双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を $\frac{\pi}{4}$ だけ原点のまわりに回転させると, 双曲線 $xy = 1$ になることを示せ.

6 無理関数

変数 x と定数との間で, 加減乗除の 4 つの演算を何度かおこなって出来る関数を有理関数といい, これは x の多項式の商で表される. 4 つの演算のほかにさらに n 乗根を求める演算を何度かおこなって得られる関数を無理関数という. 例えば,

$$\sqrt{x},\quad \sqrt[3]{x},\quad \sqrt{4-2x},\quad \sqrt{x^2+1},\quad \sqrt{\frac{x^3-1}{x^4+1}},\quad \sqrt[4]{x^2+x+1}-\sqrt[5]{x^2-x+1}$$

などである. ここでは簡単な無理関数について, そのグラフを考える.

例 6.1. $y = \sqrt{ax+b}$ のとき, まず定義域は $ax + b \geqq 0$ となる x の全体で, よって $a > 0$ なら $x \geqq -\frac{b}{a}$, $a < 0$ なら $x \leqq -\frac{b}{a}$ となることに注意する. $y = \sqrt{ax+b}$ のとき $y \geqq 0$ で $y^2 = ax + b$, $x = \frac{1}{a}y^2 - \frac{b}{a}$ だから, $y = \sqrt{ax+b}$ のグラフは放物線 $x = \frac{1}{a}y^2 - \frac{b}{a}$ の上半分である.

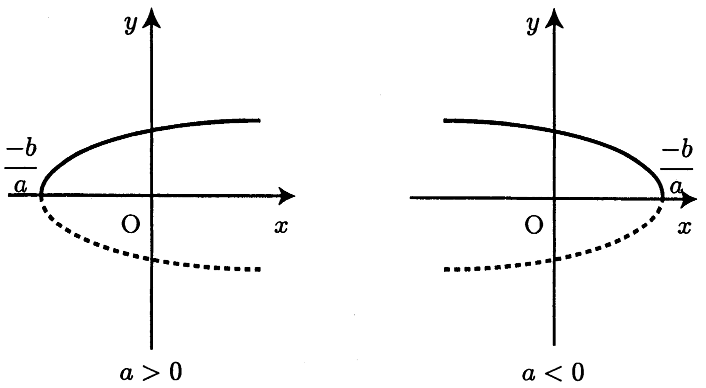


図 6.1

$y = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}$ と変形して $y = \sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{b}{a}$ だけ平行移動したものと考えても, もちろんよい.

問 6.1. 直線 $y = mx$ が関数 $y = \sqrt{4x-2}$ のグラフと 1 点を共有するような定数 m の値を求めよ.

例 6.2. $y=\sqrt{x^2-2}$ のグラフ．定義域は，$|x| \geqq \sqrt{2}$ つまり $x \leqq -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \leqq x$ である．両辺を２乗すると

$$y^2 = x^2 - 2, \qquad x^2 - y^2 = 2$$

となり，これは双曲線 $xy=1$ を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたものである (問 5.3)．$y=\sqrt{x^2-2}$ のグラフは，この双曲線の x 軸より上の部分である．

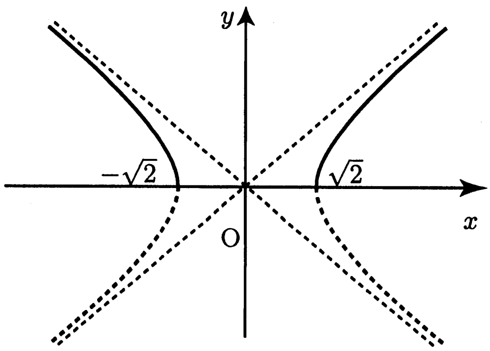


図 6. 2

問 6.2. (1) $y=\sqrt{x^2+2}$ のグラフをかけ． (2) $y=\sqrt{x^2+2x-1}$ のグラフをかけ．

例 6.3. $y=\sqrt{a^2-x^2}$ のグラフ $(a>0)$．定義域は $-a \leqq x \leqq a$ である．両辺を２乗すると

$$y^2 = a^2 - x^2, \qquad x^2 + y^2 = a^2$$

となるから，グラフは原点を中心とする半径 a の円の上半分である．

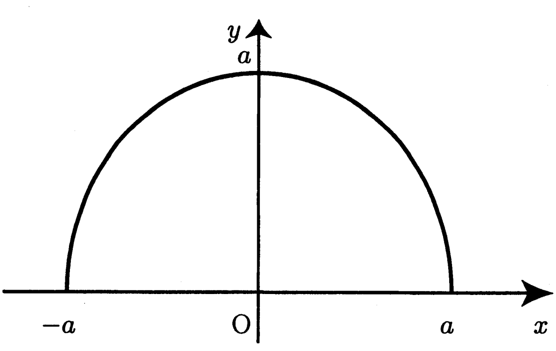


図 6. 3

例 6.4. $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ のグラフ．これは上で扱った $y = \sqrt{9 - x^2}$ のグラフを y 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍に引き伸ばしたものとなる．

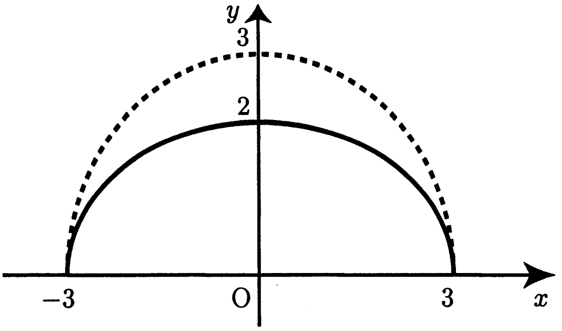


図 6.4

上の例では, $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ の両辺を 2 乗して整理すると楕円の方程式 $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1$ になる．グラフはこの楕円の上半分となっている．一般に原点を中心とする楕円は, 方程式

$$C:\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

で与えられる．C 上の点 (α, β) について, 点 $\left(\dfrac{\alpha}{a}, \dfrac{\beta}{b}\right)$ は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にあるから, C はこの円を x 軸方向に a 倍, y 軸方向に b 倍に引き伸ばしたものになる．

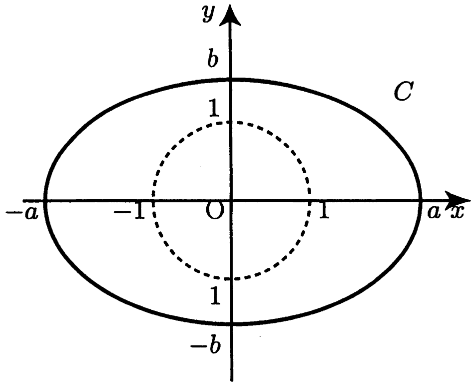


図 6.5

参考までに次の例を付け加えておく．

例 6.5. $a > b > 0$, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ とし, 楕円 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ と 2 点 $F_1(e, 0)$, $F_2(-e, 0)$ を考える．このとき, 楕円上の点 P についてつねに

$$F_1P + F_2P = 2a$$

が成り立つ. (F_1, F_2 を楕円の焦点という.)

証明 図形の対称性より, $P\left(x, b\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\right)$ として

$$F_1P + F_2P = 2a$$

を示せば十分である. まず,

$$\begin{aligned}
F_1P^2 &= (x-e)^2 + b^2\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\} \\
&= x^2 - 2ex + a^2 - b^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \\
&= \frac{e^2}{a^2}x^2 - 2ex + a^2 \\
&= \left(\frac{e}{a}x - a\right)^2.
\end{aligned}$$

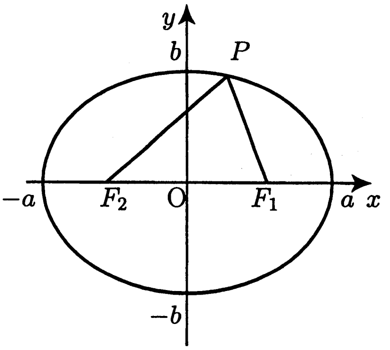


図 6.6

ここで $|x| < a$ ゆえ $\left|\dfrac{e}{a}x\right| < e < a$ となり,

$$F_1P = a - \frac{e}{a}x.$$

同様に,

$$F_2P = a + \frac{e}{a}x$$

となるので

$$F_1P + F_2P = 2a.$$

問 6.3. 放物線 $y = x^2 + \dfrac{1}{4}$ と点 $F\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ を考える. 放物線上の点 P について, P と x 軸との距離は FP に等しいことを示せ.

7 極座標

座標平面上の点 P について, 原点 O と P との距離を r, 半直線 OP が x 軸の正の方向となす角を θ とすると, 点 P は r と θ の組 (r, θ) で決まる. そこでこの組 (r, θ) を点 P の極座標という. 今まで用いてきた x 座標と y 座標の組 (x, y) は, 極座標と区別する必要があるときには直交座標と呼ばれる. 両座標の間には次の関係が成り立つ.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases},$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

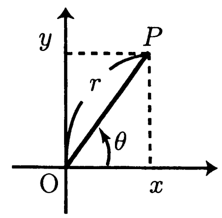


図 7.1

例えば, 点 P の直交座標が $(1,\sqrt{3})$ であるとき, P の極座標は

$$\cdots\left(2,-\frac{11\pi}{3}\right),\quad \left(2,-\frac{5\pi}{3}\right),\quad \left(2,\frac{\pi}{3}\right),\quad \left(2,\frac{7\pi}{3}\right),\quad \left(2,\frac{13\pi}{3}\right),\cdots$$

などいろいろ考えられる. このように点 P に対してその極座標はただ一つに定まるわけではないことに注意する.

r が θ の関数として $r=f(\theta)$ のように定められていると, θ が動くとき極座標が (r,θ) である点はある曲線を動く. $r=f(\theta)$ をこの曲線の極方程式という.

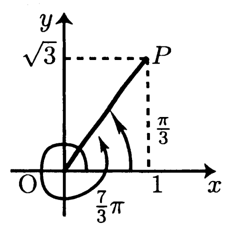


図 7.2

例 7.1. 極方程式 $r=2\cos\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で定まる曲線について考える. いろいろな θ に対する r の値を表にすると次のようになる.

θ	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

よって曲線は極座標が $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3},1\right)$, $\cdots$ などで与えられる点を通る. これらの点をつないで曲線を描くと円が浮かび上がってくる (必要なら問題 1.2 を利用するなどしてもっと多くの点を用意すればよい.)

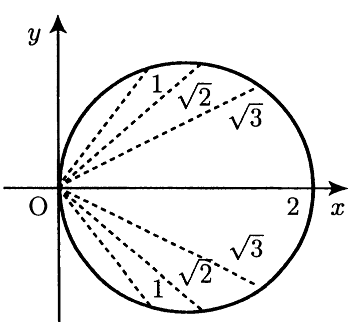


図 7.3

曲線が円であることを示すには, 直交座標で方程式をかいてみればよい. いま,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad r = 2\cos\theta$$

であるから,

$$2x = 2r\cos\theta = r^2 = x^2 + y^2$$

となる. これから, 円の方程式

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

を得る.

例 7.2. 曲線 $r = 1 + \cos\theta$ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ をスケッチしてみる. 今度はまず θr-平面に $r = 1 + \cos\theta$ のグラフをかいて考えてみる.

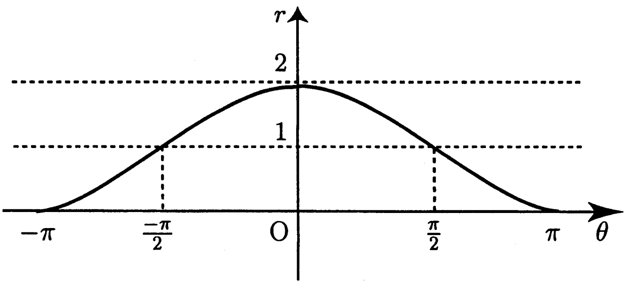


図 7.4

θ が $-\pi$ から $-\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき r は 0 から 1 まで増加するので, これに対応する曲線の部分が下の (a) のようにかける. 次に θ が $-\dfrac{\pi}{2}$ から 0 まで増加すると r は 1 から 2 まで増加するので, (b) のような曲線がかける. 同様に続けて考えれば, 問題の曲線が (c) のようにかける. この曲線は心臓形 (cardioid) と呼ばれる.

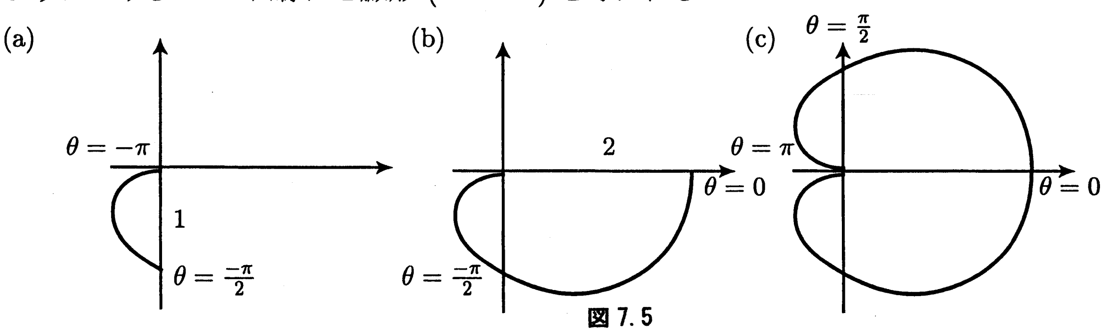


図 7.5

問 7.1. 次の極方程式で与えられる曲線をスケッチせよ. ただし a は正の定数とする.

(1) $r = |\sin 2\theta|$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$　(2) $r = |\sin 3\theta|$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

(3) $r = a\theta$ $(\theta > 0)$　(4) $r^2 = a^2\cos 2\theta$

問 7.2. 円 $r = 3\cos\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と心臓形 $r = 1 + \cos\theta$ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ の交点の座標を直交座標で求めよ.

第0章　練習問題

1. 次の 2 次式を $a(x-p)^2+q$ という形に変形せよ．

(1) x^2+2x+1　(2) $2x^2+8x+1$　(3) $2x^2+6x+1$　(4) $-3x^2+2x-1$
(5) $-x^2-3x+3$　(6) x^2-3x+1　(7) $(x-1)(x-2)$　(8) $-(x+1)(2x-1)$

2. 次の関数を与えられた (p,q) だけ平行移動した関数の式を求めよ．
（ここで (p,q) とは x 軸方向に p, y 軸方向に q を表す.）

(1) $y=x$　$(3,1)$　(2) $y=x^2+2x$　$(1,2)$　(3) $y=\cos x$　$\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$
(4) $y=2\sqrt{x}$　$(2,1)$　(5) $y=2^x$　$(-1,2)$　(6) $y=\dfrac{x}{2x+1}$　$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{-1}{2}\right)$

3. 次の角度を弧度法で表せ．

(1) 30°　(2) 70°　(3) 320°　(4) 700°　(5) 1440°　(6) −45°　(7) −15°　(8) 0°

4. 次の値を求めよ．

(1) $\sin\dfrac{\pi}{3}$　(2) $\sin\dfrac{4}{3}\pi$　(3) $\cos\dfrac{\pi}{6}$　(4) $\tan\dfrac{\pi}{4}$　(5) $\sin\dfrac{-4}{3}\pi$　(6) $\cos\dfrac{7}{4}\pi$
(7) $\cos\dfrac{8}{3}\pi$　(8) $\tan\dfrac{11}{6}\pi$　(9) $\sin\dfrac{3}{4}\pi$　(10) $\cos\dfrac{-5}{4}\pi$　(11) $\tan\dfrac{-\pi}{3}$　(12) $\sin\dfrac{33}{2}\pi$

5. 加法定理などの公式を用いて次の値を求めよ．

(1) $\sin\dfrac{\pi}{12}$　(2) $\cos\dfrac{-5}{12}\pi$　(3) $\tan\dfrac{7}{12}\pi$　(4) $\sin\dfrac{11}{12}\pi$
(5) $\tan\dfrac{13}{12}\pi$　(6) $\sin\dfrac{-19}{12}\pi$　(7) $\cos\dfrac{5}{24}\pi\sin\dfrac{\pi}{24}$　(8) $\cos\dfrac{7}{24}\pi\cos\dfrac{5}{24}\pi$

6. 次の式を簡単にしなさい．

(1) $25^{\frac{3}{2}}$　(2) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}$　(3) $\sqrt[3]{-0.125}$　(4) $\sqrt[5]{0.00001}$
(5) 0.5^0　(6) $25^{1.5}\times 32^{-0.2}$　(7) $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[6]{81^{-4}}$　(8) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2b}\sqrt{a^7b}}$

7. 次の数を小さい順に並べよ．

(1) $3,\sqrt{\dfrac{1}{3}},\sqrt[3]{9},\sqrt[4]{27}$　(2) $\sqrt{6},\sqrt[3]{15},\sqrt[4]{35}$　(3) $\sqrt[4]{3},\sqrt[6]{5},\sqrt[3]{2}$　(4) $\dfrac{1}{3},\sqrt[3]{9},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{27}$
(5) $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[10]{10}$　(6) $\sqrt{3},\sqrt[3]{6},\sqrt[4]{7}$　(7) $\sqrt[6]{5},\sqrt[4]{3}$

8. 次の値を求めよ．

(1) $\log_2 8$　(2) $\log_3\sqrt[4]{27}$　(3) $\log_{0.1}10$　(4) $\log_9 3$
(5) $\log_2\dfrac{4}{3}+\log_2 24$　(6) $\log_2 3\times\log_{81}8$　(7) $10^{\log_{100}3}$　(8) $8^{\log_2 5}$

9. $a=\log_{10}2$, $b=\log_{10}3$ としたとき，次の値を a, b を用いて表せ．

(1) $\log_{10}5$　(2) $\log_3 4$　(3) $\log_3 2$　(4) $\log_{\sqrt{3}}12$
(5) $\log_5 4$　(6) $\log_{\sqrt{5}}8$　(7) $\log_{10}\sqrt{0.3}$　(8) $\log_{12}25$

10. x を求めよ．

(1) $\log_{\frac{1}{2}}x=3$　(2) $10^x=100$　(3) $2^x=10$
(4) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=2$　(5) $(\log_2 x)^2+\log_2 4x=4$　(6) $\log_{0.3}(4-3x)=0$