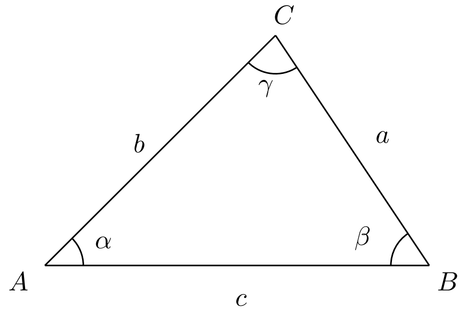
1 第１と第２の余弦定理

三角形の頂点を A, B, C, 角を α, β, γ, 辺の長さを a, b, c とおく。



第 1 余 弦 の 定 理:

$$\begin{cases} a = b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \\ c = a\cos\beta + b\cos\alpha \end{cases}$$

第 2 余 弦 の 定 理:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\,\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma \end{cases}$$

正弦の定理:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

[**(i) 正弦の定理から第１, 第２余弦定理を示す**]

加比の理（分数の性質）を正弦定理の２項と３項に適用する。また三角関数の加法定理、三角形の内角の和は 180° であるから, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ をもちいると、

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b\cos\gamma + c\cos\beta}{\sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta} = \frac{b\cos\gamma + c\cos\beta}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{b\cos\gamma + c\cos\beta}{\sin\alpha}$$

この式と正弦定理の第１項から、$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ を得る。第２余弦定理を示すには、両辺を２乗して、

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\,\cos\gamma + c\,\cos\beta)^2 \\ &= b^2\cos^2\gamma + c^2\cos^2\beta + 2\,b\,c\,\cos\beta\,\cos\gamma \\ &= b^2(1-\sin^2\gamma) + c^2(1-\sin^2\beta) + 2\,b\,c\,\cos\beta\,\cos\gamma \\ &= b^2 + c^2 - b^2\sin^2\gamma - c^2\sin^2\beta + 2\,b\,c\,\cos\beta\,\cos\gamma \\ &= b^2 + c^2 + 2\,b\,c\,\{\cos(\beta+\gamma) - \sin\gamma\,\sin\beta\} - b^2\sin^2\gamma - c^2\sin^2\beta \\ &= b^2 + c^2 + 2\,b\,c\,\cos(\beta+\gamma) - (b\,\sin\gamma - c\sin\beta)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \end{aligned}$$

末尾の項がゼロになる理由は、正弦定理より、$b\,\sin\gamma = c\,\sin\beta$ が成り立つから。これで第２余弦定理が示された。(終)

(補足) 頂点 C から辺 AB へ垂線をおろせば、辺 c は２つの部分でなるから、第１余弦定理の命題は明らか。

[**(ii) 第１余弦定理から第２余弦定理を示す**] 連立方程式を解くことによって、第１余弦定理から第２余弦定理を示すことができる。与えられた辺の長さと角度の関係式が第１余弦定理であって、この関係式を方程式とみなす。つまり第２余弦定理は角度、すなわち $cos\alpha, \cos\beta\cos\gamma$ を未知数とみなして、辺 a, b, c から導くこと考える。すなわち

$$\begin{cases} b\,\cos\alpha & + & a\,\cos\beta & & & = & c \\ & & c\,\cos\beta & + & b\,\cos\gamma & = & a \\ c\,\cos\alpha & & & + & a\,\cos\gamma & = & b \end{cases}$$

係数と変数とを分ける形で書けば、

$$\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

これからは逆行列を求めて、連立方程式を解く形の計算をすれば、角度の余弦が辺の値によって表される。係数行列の逆行列 (inverse matrix) は行列式（detaerminant）が $2abc$ で

$$\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2abc} \begin{pmatrix} ac & -a^2 & ab \\ bc & ab & -b^2 \\ -c^2 & ac & bc \end{pmatrix}$$

となるから、したがって

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{2abc} \begin{pmatrix} ac & -a^2 & ab \\ bc & ab & -b^2 \\ -c^2 & ac & bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{pmatrix}$$

というよく知られた結論となる。

[**(iii) ベクトルをもちいた第 2 余弦定理の証明**] ベクトルの差の 2 乗式は、それぞれのノルムの 2 乗と内積とに分解されるから、上図の三角形において、

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right|^2 \\ &= \left|\overrightarrow{CB}\right|^2 - 2 \times (\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}) + \left|\overrightarrow{CA}\right|^2 \\ &= \left|\overrightarrow{CB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{CB}\right| \left|\overrightarrow{CA}\right| \cos\angle ACB + \left|\overrightarrow{CA}\right|^2 \end{aligned}$$

となるから、これを辺の長さと角で表すと、$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,b\,c\,\cos\gamma$ に他ならない。(終)

問 1.1

四角形 $ABCD$ は外接円 R に内接し, $\overline{AB} = 2, \overline{BC} = 3, \overline{CD} = 1$ で、$\angle ABC = \dfrac{\pi}{3}$ である。このとき、つぎを求めよ。 (i) 対角線 $\overline{AC}$, (ii) 辺 $\overline{AD}$, (iii) 外接円の半径 R, (iv) 四角形の面積 S

(答え) (i) $\overline{AC} = \sqrt{7}$, (ii) $\overline{AD} = 2$, (iii) $R = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$, (iv) $S = 2\sqrt{3}$

2 余弦の定理と内積

三角形の辺と角の関係で基本的な、2 辺の挟む角とその対辺との関係式；三角形 $\triangle ABC$ の三辺を a, b, c として、辺 AB と辺 AC のなす角を θ, 対辺を c とすると、

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}$$

が成り立ち、辺と角度で三角形が定められる。これはベクトルを用いて表すと、内積をもちいた

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

と表すことができる。分母には, 2辺の長さの積であり、$\|\vec{u}\| = a = |AB|$, $\|\vec{v}\| = b = |AC|$ であり、ベクトルの大きさ (**ノルム**) が対応する。この2式を比べることから内積はつぎのように定められている。これを説明しよう。**内積** (inner product), あるいは **スカラー積**, **ドット積**ともいい、3次元のベクトルであれば、2つのベクトル $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ に対して、対応する成分（要素）の積和 (成分ごとの積を行い、これらを加えること) を結果とする。その演算記号は $\cdot$（中央にドット点）で $\vec{u} \cdot \vec{v}$ や、あるいは2つをカッコで括るもの $(\vec{u}, \vec{v})$ などが用いられる。

内積の定義（３次元）

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3$$

平面ベクトル (2次元ベクトル) であるときは、$u_3 = 0, v_3 = 0$ として、$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2$ と定め、ベクトルの次元がそろっていなければならない。また n 次元 $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ に対しては同様に

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

と定める。このようにベクトルの対応する成分同士の積を加えたもので、結果はスカラー（つまり実数、あるいは成分が複素数であれば、複素数）となる。★複素数を成分とするベクトルのときには、$\vec{v}$ の各成分の共役複素数との積和で定める。

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1\,\overline{v_1} + u_2\,\overline{v_2} + \cdots + u_n\,\overline{v_n}$$

内積の性質: 平面あるいは空間ベクトルなどを $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ とし、k をスカラー（ここでは実数とする、後ほどには複素数の場合を述べる）とする。

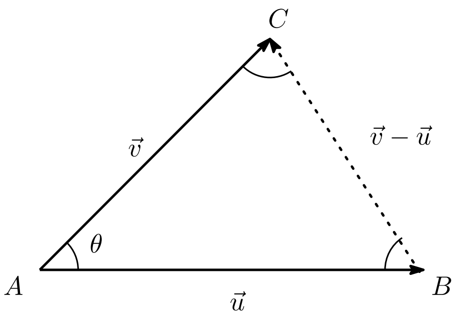
(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ [内積の順を変えても、スカラーが実数では同じ値（交換律が成立)、しかし複素数が成分の場合は異なる]

(ii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ [実数の和と積と同じように、配分律が成り立つ]

(iii) $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (k\vec{u})$ [スカラー値となるから、実数の積となり、括弧で順序を変えても同じの交換律を表している。ここでスカラーとのドットでは, スカラー倍ではなく、$k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$ は内積の値とスカラーとの内積であるから、意味をなさない！]

(iv) $\vec{u} \neq \vec{0}$ ならば、$\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ （実数には大小関係がある）であり、もし $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ であれば、ゼロベクトルに限る: $\vec{v} = \vec{0}$.

ここでは、辺をつぎのように表している。冒頭に述べている図と比較されたい。



$$\overrightarrow{AB} = \vec{u},\ \|\vec{u}\| = a,$$
$$\overrightarrow{AC} = \vec{v},\ \|\vec{v}\| = b,$$
$$\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$$

ここで 2 辺の挟む角は θ で、その対辺 BC の長さ、つまりベクトルのノルムは、逆向きであっても長さは等しく、

$$\|\vec{v} - \vec{u}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| = c$$

ノルムの計算では 「同じベクトルの内積がノルムの 2 乗に等しい」ことをつかう。

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2 = \|\vec{u}\|^2$$

このことから、対辺のノルムが BC の辺の長さとなる。すなわち

$$\vec{v} - \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 - u_1 \\ v_2 - u_2 \\ v_3 - u_3 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{aligned} & \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2 \\ = \ & (v_1^2 - 2v_1u_1 + u_1^2) + (v_2^2 - 2v_2u_2 + u_2^2) + (v_3^2 - 2v_3u_3 + u_3^2) \\ = \ & (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\ = \ & \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

つまり、$c^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = a^2 + b^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$ となり、

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

となる関係式が得られた。分母に 2 がある理由も $(x - y)^2 - x^2 - y^2 = 2\,x * y$ から覚えておけば間違えないですね。

「注意」ベクトルの内積はスカラーであるから、(i) ベクトル 3 個の内積や (ii) 内積のノルム、(iii) 他ベクトルとの和など、とくに意味を持つことは少ないし、理解できない、定義はされていないことがある。

(i) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$,　$(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$　(ii) $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\|$　(iii) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{w}$

$\boxed{\text{問 2.1.}}$　つぎのベクトルの内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ を求め、さらに $\vec{u}$ と直交するベクトル $\vec{w}$ のうち、そのノルムが $\|w\| = 1$ となるものをひとつ求めよ。

(1)　$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$　　(2)　$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{問 2.2}}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$　とする。このとき、スカラー $k = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|v\|^2}$ の値と、そのスカラー倍のベクトル $\vec{a} = k\vec{v}$ をもとめよ。$\vec{b} = \vec{u} - k\vec{v} = \vec{u} - \vec{a}$ とするとき、$\vec{b}$ は $\vec{v}$ と直交することを示せ。

$\boxed{\text{問 2.3}}$ 前問で $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ としたとき、$\vec{a}, \vec{b}$ を求めて、平面に図示せよ。

$\boxed{\text{問 2.4}}$ 3次元ベクトルを $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とするとき、x 軸とのなす角 α、y 軸とのなす角 β、z 軸とのなす角 γ の余弦値（3つを方向余弦という）, $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ を求めよ。ヒント；各座標軸を表す単位ベクトルをもちい余弦の定理を当てはめる。(答え) $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ など。

$\boxed{\text{問 2.5}}$ つぎの関係式を示せ。

(i) $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$ (注) $2\,\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ となり 括弧は要らない。

(ii) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{1}{4}(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2)$

(iii) $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2\right)$

3 外積の定義

空間ベクトルの外積の定義を与えよう。内積がスカラー値を対応させたことに対して、外積は新たなベクトルを対応させる。このためには、後ほど述べる行列式をもちいる形で導入する。行 (row) は横の並びをいい、列は縦列の並びをいう。第1行目は $(a,\,b)$, 第2行目は $(c,\,d)$ で、$(a\,,b)$ と $(a\ b)$ とはカンマの有無には関係しないとし、2個の成分か、1個の積の成分かどうかなどを区別するために、誤解のおこらないよう用いる。列についても同様で、カンマは改行する要らない。2行2列の行列 (matrix) を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とするとき、これを2次の**正方行列** (square matrix) といい、**行列式** (determinant) は

$$\det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

で定め、襷掛け（たすきがけ）の積差 (たすき位置にある要素を掛けたもの逆位置のたすきの積を引いたもの)。和ではなく、符号にマイナスが入ることに注意する。

2個の3次元ベクトル $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, に対して、ベクトルを対応させるが、3行2列の行列 $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$ から、2行2列の行列式を要素とするベクトルとして定める。

第1行成分は、3行2列の行列から1行目 $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \end{pmatrix}$ を取り除いて、2行2列にした行列 $\begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$ の行列式の値（スカラー）を成分とする。この行列式は

$$\det\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = u_2\,v_3 - u_3\,v_2$$

が一行目の成分とする。２行目は、２行目を取り除き、さらに符号数 (-1) を掛けた行列式の値として

$$(-1)\det\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = (-1)(u_1\,v_3 - u_3\,v_1)$$

三行目は第３行を除いて、つくる行列式を求めて

$$\det\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1\,v_2 - u_2\,v_1$$

を成分とする。これらを並べてつくられた３次元ベクトルが外積で、$\vec{u} \times \vec{v}$ と表す。

空間ベクトルの外積の定義

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2\,v_3 - u_3\,v_2 \\ (-1)(u_1\,v_3 - u_3\,v_1) \\ u_1\,v_2 - u_2\,v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ (-1)\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

外積に関する性質をあげる。

(i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$　交換律は成り立たない！符号の反転（逆方向）が起こる。

(ii) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$　ベクトル和 $(+)$ との配分律は成立。

(iii) スカラー値 (内積) との関係式 (輪環（リング）$\vec{a} \to \vec{b} \to \vec{c} \to \vec{a} \to \vec{b} \cdots$ の順)：

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

さらにこの値はつぎの値にも等しい

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

(iv) 外積のベクトルは、もとのベクトルと直交する

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$$

$\boxed{\text{問 3.1}}$　上記の性質 (i),　(ii),　(iii),　(iv) を示せ。

$\boxed{\text{問 3.2}}$　つぎを示せ。

(i) $\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (垂直方向は内積の直交, $\cos(\dfrac{\pi}{2}) = 0$)

(ii) $\vec{u} /\!/ \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ （ベクトルの平行は外積の値がゼロベクトル）

$\boxed{\text{問 3.3}}$　２つのベクトルの外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は、それぞれのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ と直交することを示せ。

$\boxed{\text{問 3.4}}$　シュワルツの不等式 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqq \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$ （注意; 左辺は絶対値）を証明せよ。等号の成り立つ場合も調べよ。

(i) ２次元の場合：$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$　(ii) ３次元の場合：$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

4　ラグランジュの公式

ベクトルのノルムとそれらの内積、外積とはつぎの関係で結ばれている。ラグランジュの公式とも呼ばれる。

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \, \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{u})^2$$

すなわち、

$$(\text{外積})^2 = (\text{ノルム 2 乗の積}) - (\text{内積})^2$$

この関係式をベクトルの成分で書き表すと、ノルムの定義は $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ などですから、

$$\begin{aligned} & (u_2\,v_3 - u_3\,v_2)^2 + (u_1\,v_3 - u_3\,v_1)^2 + (u_1\,v_2 - u_2\,v_1)^2 \\ = \; & (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3 v_3)^2 \end{aligned}$$

なる関係が成り立つからである。この関係式も 2 乗式の展開ですから、難しくはありません。数式成分を書き下すと、面倒であることも理解し、数式記号を導入することの有意義さも紙と鉛筆で（数式処理システムはここでは用いずに!!）実感してほしい。

外積の計算は交換律が成り立たず、$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$ であり、 x 軸, y 軸、z 軸の単位ベクトル (ノルムが 1、つまり長さが 1) を $\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると、親指を $\vec{e_x}$、人差し指を $\vec{e_y}$、中指を $\vec{e_z}$ とした右指の方向性をもつベクトル関係である。物理学で、電流と磁場の関係である。マイナス符号のあることは、逆に電流が流れれば、負の方向にチカラが働く。ファラデー・マクスウェルの式には、外積をもちいて表す。電流と磁場の関係を実験により発見し、その不思議な現象を数学の式に表すことがマクスウェルによって簡潔にまとめられた。この外積記号は 3 変数関数 $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ とその成分関数 $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ を x, y, z で偏微分することを $\dfrac{\partial}{\partial x} f_1, \dfrac{\partial}{\partial x} f_2, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x} f_2, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial z} f_3$ を組み合わせた、数式（外積）の形にして表した。微分することを演算子（ナブラ）$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ との関係により、回転 (rotation)

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \mathbf{rot}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} f_3 - \dfrac{\partial}{\partial z} f_2 \\ -\dfrac{\partial}{\partial x} f_3 + \dfrac{\partial}{\partial z} f_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} f_2 - \dfrac{\partial}{\partial y} f_1 \end{pmatrix}$$

とした。この外積をもちいた量を **rot** とよび、内積の計算としては、ドットを省略して $\nabla \vec{f}$ を **div** という記

号をもちい、発散（divergence)、数学では勾配 (gradient) とよぶ。

$$\nabla\vec{f}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}=\mathbf{div}(\vec{f})=\frac{\partial}{\partial x}f_1+\frac{\partial}{\partial y}f_2+\frac{\partial}{\partial z}f_3$$

ベクトル解析ではよく用いられる記号で、物理では電磁気学では必須の記号である。

5 ヤコビの公式

外積は交換律を満たさないが、3 つずつ順次に輪環 ($\vec{u}\to\vec{v}\to\vec{w}\to\vec{u}\to\cdots$) の順にかけて、和をとると、ゼロベクトルとなってしまう。不思議な性質です。計算も面倒ですが、やればできます。しかしこれを発見することは、並の人間ではできません。でもこれはホンの朝飯前。これに気づくヤコビは、ヤコビの三重積 `https://ja.wikipedia.org/wiki/ヤコビの三重積` でもよく知られています。

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})+\vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u})+\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{0}$$

この証明は直接計算して得られることは分かるかも知れない。各成分を書き並べ、各行を計算すればよいが、もう少し賢く、つぎの補題を示してから計算します。答えを知っているから、このような計算ができます。

$\boxed{\text{補題}}$ つぎの関係式が成り立つ。覚えにくいが、たとえば、(i) 式では、左辺の後半の括弧部分のベクトル $\vec{b}$、$\vec{c}$ の一次結合で表され、係数（スカラー）が, 残りベクトルの内積を用いて $-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ と $(\vec{a}\cdot\vec{c})$ 表される。マイナスは最尾ベクトルという解釈とみなせる。ほかの覚え方もあるだろう。

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \ \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\ \vec{c}+(\vec{a}\cdot\vec{c})\ \vec{b}=A_1\vec{c}+A_2\vec{b}\\
&\text{(ii)}\ \ \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\ \vec{a}+\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\ \vec{c}=B_1\vec{c}+B_2\vec{b}\\
&\text{(iii)}\ \ \vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-(\vec{c}\cdot\vec{a})\ \vec{b}+\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\ \vec{a}=C_1\vec{c}+C_2\vec{b}
\end{aligned}$$

まず、$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}\times\vec{c}=\begin{pmatrix}\det\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}\\ (-1)\det\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}\\ \det\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_2\,c_3-b_3\,c_3\\ (-1)(b_1\,c_3-b_3\,c_1)\\ b_1\,c_2-b_2\,c_1\end{pmatrix}$ という結果を確認して、さらに外積を計算します。すると

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{pmatrix}(a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_2b_2+a_3b_3)c_1\\ (a_1c_1+a_3c_3)b_2-(a_1b_1+a_3b_3)c_2\\ (a_1c_1+a_2c_2)b_3-(a_1b_1+a_2b_2)c_3\end{pmatrix}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$$

が得られました。最尾の計算式ではスカラー値として $A_1=-\vec{a}\cdot\vec{b}=-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$, $A_2=\vec{a}\cdot\vec{c}=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3$ ですが、

$$\begin{aligned}
(\text{第１行目}) &= A_1c_1 + A_2b_1 \\
&= -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,c_1 + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,b_1 \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,c_1 \\
&= a_2c_2 + a_3c_3)\,b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)\,c_1
\end{aligned}$$

となります。第２行目、第３行目も同様です。

ここで得られる内積は交換律がなりたちますから、$A_1 = -(\vec{a}\cdot\vec{b}) = -(\vec{b}\cdot\vec{a}) = B_2$ などとなっています。

この補題で成り立つ３式を加え合わせれば、ヤコビの公式が証明できます。

こんな計算はやる気が起こらないというひとのために、つぎを眺めてください。

【スカラー４重積】

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) &= \vec{c}\cdot(\vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{b})\} \\
&= \vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c})\}
\end{aligned}$$

【ベクトル４重積】

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= \{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}\}\vec{c} - \{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\}\vec{d} \\
&= \{\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})\}\vec{b} - \{(\vec{b}\cdot(\vec{c})\times\vec{d}\}\vec{a}
\end{aligned}$$