線形代数行列の基本変形と課題 2(改訂)（2020 年 10 月）

1　3 つの基本操作のための行列

下は説明は４行５列の例で説明されているが、一般の行列では、積が計算できるための行列であればよい。
★行列の index には $(m \times n)$ で強調表示しているが、, 普通の場合は表示しない．また行列積もドット積（内積の意味）を明示するためにピリオドを入れている．

与えられた行列（4×5 の例）にもとづいて説明する。$A = A_{(4\times5)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{pmatrix}$

(I) 行変形を行うための行列 (A が 4×5 だから P は 4×4)

$$P_{(4\times4)} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_{(4\times4)}A_{(4\times5)} = (P.A)_{(4\times5)} = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 & a'_5 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 & a'_5 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 & c'_4 & a'_5 \\ d'_1 & d'_2 & d'_3 & d'_4 & a'_5 \end{pmatrix}$$

(II) 列変形を行うための行列 (A が 4×5 だから Q は 5×5)

$$Q_{(5\times5)} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} & q_{45} \\ q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & q_{55} \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A_{(4\times5)}Q_{(5\times5)} = (A.Q)_{(4\times5)} = \begin{pmatrix} a''_1 & a''_2 & a''_3 & a''_4 & a''_5 \\ b''_1 & b''_2 & b''_3 & b''_4 & b''_5 \\ c''_1 & c''_2 & c''_3 & c''_4 & c''_5 \\ d''_1 & d''_2 & d''_3 & d''_4 & d''_5 \end{pmatrix}$$

基本変形のための 3 種類の行列：

<u>(i) 行列 A のある行を k 倍、ある列を k 倍する：</u>

F_1 は第 2 行を k 倍する場合。$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_1.A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 & kb_4 & kb_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{pmatrix}$

F_2 は第 4 列を k 倍する場合。$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A.F_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ka_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & kb_4 & a_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & kc_4 & a_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & kd_4 & d_5 \end{pmatrix}$

<u>(ii) 行列 A のある行入れ替え、ある列の入れ替え：</u>

G_1 は第 2 行と第 4 行の入れ替える場合。$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow G_1.A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}$

G_2 は第 1 列と第 4 列の入れ替える場合。$G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A.G_2 = \begin{pmatrix} a_4 & a_2 & a_3 & a_1 & a_5 \\ b_4 & b_2 & b_3 & b_1 & a_5 \\ c_4 & c_2 & c_3 & c_1 & a_5 \\ d_4 & d_2 & d_3 & d_1 & d_5 \end{pmatrix}$

(ii) 行列 A のある i 行（列）の k 倍を他の j 行（列）に加える、:

H_1 は第 2 行 k 倍を第 3 行に加える場合。

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H_1.A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 + kb_1 & c_2 + kb_2 & c_3 + kb_3 & c_4 + kb_4 & c_4 + kb_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{pmatrix}$$

H_2 は第 3 列の k 倍を第 2 列に加える場合。

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A.H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 + ka_3 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 + ka_3 & b_3 & b_4 & a_5 \\ c_1 & c_2 + ka_3 & c_3 & c_4 & a_5 \\ d_1 & d_2 + ka_3 & d_3 & d_4 & d_5 \end{pmatrix}$$

2 実際の掃き出し (sweep out) にもちいる、F, G, H の例

最初に与えられる行列：$A = A_{(4\times5)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{pmatrix}$

Step I. ピボット（軸）$a_1 \neq 0$ を 1 にする操作

$$F = \begin{pmatrix} 1/a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F.A = \begin{pmatrix} 1 & a_2/a_1 & a_3/a_1 & a_4/a_1 & a_5/a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{pmatrix}$$

もしこのピボットが $a_1 = 0$ ならば、下行にたどってゼロでないを、このピボット場所に入れ替える。もしすべてゼロならば、つぎの列にピボットを移動する。したがって、Step III に進む。

もしゼロでない行があるときであって、たとえば、$a_1 = 0, b_1 = 0,$ で、$c_1 \neq 0$ とする。このときには $c_1 \neq 0$ をピボットにするために行の入れ替えをおこなう。

Step II.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G.A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1/c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F.G.A = \begin{pmatrix} 1 & c_2/c_1 & c_3/c_1 & c_4/c_1 & c_5/c_1 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{pmatrix}$$

つぎの操作では d_1 の要素箇所をゼロとなるようにする。

$$H = \begin{pmatrix} -d_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H.F.G.A = \begin{pmatrix} 1 & c_2/c_1 & c_3/c_1 & c_4/c_1 & c_5/c_1 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & d_2 - d_1 * \dfrac{c_2}{c_1} & d_3 - d_1 * \dfrac{c_3}{c_1} & d_4 - d_1 * \dfrac{c_4}{c_1} & d_5 - d_1 * \dfrac{c_5}{c_1} \end{pmatrix}$$

Step III.

ここまでで A から HFG の操作行列の積により、第 1 列の掃き出しの形 $HFGA$ が得られたので、つぎはピボットとして 2 行 2 列の要素 b_2 を選択することになる。これを B とおけば、前の Step I, II を 2 列目に適用すると同様の新たな変換行列 G, F, H を選ぶことで、$HFGB$ が 2 列目の掃き出し（sweep out）ができる。こうように繰り返ししてしていけばよい。

Step IV. 行の掃き出しが終了すれば、ガウスの消去法での結果行列となるが、こんどは列の掃き出し計算する。結

果は、正方行列であれば、正則行列であれば、単位行列に帰着できる。いいかえると、掃き出し計算に用いた操作行列の積が、もとの行列の逆行列であることに他ならない。

★★★練習問題★★★

問1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ とする。

つぎの変形をおこなう行列をもとめよ。

(i) $F_1.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$ (ii) $G_1.A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ (iii) $H_1.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$

(iv) $A.F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 12 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ (v) $A.G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & 9 \\ 2 & 8 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ (vi) $A.H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & -4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

ヒント：F_1 は 2 行目を 3 倍にする。G_1 は 1行目と2行目の交換。$H_1 A$ は2行1列の要素をゼロにする操作（1行1列の要素が1だから、1行目を (-2) 倍して2行目に加える。あるいは2行目のベクトルとして、1行目を2倍したベクトルを差し引いた答えベクトル。

問2

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & 4 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ とする。

(i) A を階段行列（ガウスの消去法）に変形せよ。

(ii) $P.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ここで $*$ はゼロでない定数に変形する P をもとめよ。

ヒント：P は行に対する操作（左側からの積）だから、3×3 の行列 (3 次正方行列)。各操作ごとの行列を考え、それらの積を求める。つぎの (iii) ではその結果 PA を右側から列の操作する (右側からの積) で 4×4 の行列 (4 次正方行列)。

前回に紹介した maxima などをもちい、数値結果の確認をしながら、計算するとよい。単なる計算間違いがあると確認の手間がかかる。

(iii) $P.A.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる Q をもとめよ。

（答え）$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

「補足」Maxima の命令：”echelon” は階段行列を求めること，”rank” は階数を求める．

$$echelon(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、rank(A)=2; が分かるが、

$$P.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A.Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であってともに、“２行のみ”あるいは、“２列のみ”で行列の階数 (ランク) が $rank(A) = 2$ であることを示している。いいかえると、適当な正方行列 P, Q により、２次の単位行列にゼロを加えたものに帰着される。