$\boxed{1}$ ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2), \vec{b}=(b_1,b_2)$ のとき、(1) ベクトルの差 $\vec{b}-\vec{a}$ に対するノルム (ベクトルの長さ) $\|\vec{b}-\vec{a}\|$ を求めよ。(2) 2つのベクトルが直交する（垂直となる）ための条件をかけ。

【解】(1) $\vec{b}-\vec{a}=(b_1-a_1,\, b_2-a_2)$ であるから、$\|\vec{b}-\vec{a}\|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

(2) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}$ をもちいる。直交するから、余弦の値 $\cos\theta=\cos(\pi/2)=\cos 90^o=0$ より、分子の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=0$ これがもとめる条件である。

$\boxed{2}$ 3つのベクトル $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)$ が同一直線上にあるための条件を求めよ。

【解】それぞれのベクトルが表す平面の点を A, B, C とおけば、A と B を結ぶ直線をもとめ、その直線が C を通ればよい。直線の方程式は $y-b_2=\dfrac{b_2-a_2}{b_1-a_1}(x-b_1)$ で, C の値 $x=c_1, y=c_2$ を代入する。したがって $c_2-b_2=\dfrac{b_2-a_2}{b_1-a_1}(c_1-b_1)$ と得られる。この式をさらに変形すると $b_1c_2-b_2c_1+(-1)\{a_1c_2-a_2c_1\}+a_1b_2-a_2b_1=0$ である。外積の定義から

$$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1c_2-b_2c_1\\(-1)\{a_1c_2-a_2c_1\}\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

であるから、さらにベクトルの内積、3次の行列式をもちいて

$$\left(\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\det\begin{vmatrix}a_1&a_2&1\\b_1&b_2&1\\c_1&c_2&1\end{vmatrix}=0$$

と表すことができる。

$\boxed{3}$ 点 (a,b) を通り、方向ベクトルが (m,n) で与えられた。この直線をパラメータ t をもちいて、$x=a+mt,\ y=b+nt$ と表すとき、これをパラメータ表示という。2点 $(x_1,x_2),\ (y_1,y_2)$ を結んでつくる直線をパラメータ表示で表せ。

【解】 2点を結ぶ方向ベクトル (m,n) は $(m,n)=(y_1-x_1,y_2-x_2)$ であり、点 (x_1,x_2) を通るから、

$$\begin{cases}x=x_1+(y_1-x_1)t,\\ y=x_2+(y_2-x_2)t\end{cases}\qquad t\text{ はパラメータ}$$

と表せる。

$\boxed{4}$ 2つの直線が $m_1x+n_1y=p_1,\ m_2x+n_2y=p_2$ で与えられたとき、2直線のなす角 θ とするとき、$\cos\theta$ の値を求めよ。

【解】それぞれの直線が x 軸とのなす角を θ_1,θ_2 とおけば、$\tan\theta_i=-\dfrac{m_i}{n_i}, i=1,2$ で、2直線のなす角は, $\theta=\theta_1-\theta_2$ となる。正接の加法定理をもちい（和の式ではなく、差の式）代入することで、$\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$ ここにおいて、$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ をもちいて、正接から余弦をもとめる。

$$\tan^2\theta=\left(\frac{(-\frac{m_1}{n_1})-(-\frac{m_2}{n_2})}{1+(-\frac{m_1}{n_1})(-\frac{m_2}{n_2})}\right)^2=\left(\frac{m_1n_2-m_2n_1}{m_1m_2+n_1n_2}\right)^2$$

結果は、

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$$

ここで2乗値の平方根には絶対値が必要であることに注意。また分子は内積、分母はノルムの積となっている。

$\boxed{5}$ 点 (x_0, y_0) から直線 $ax + by + c = 0$ に引いた垂線を引く。 (1) 垂線の方程式をパラメータ表示で表せ。(2) 垂線の長さを求めよ。

【解】（1）垂線の方程式は、ベクトルの直交性をもちいる。まず原点 $(0, 0)$ 通り、直線 $ax + by + c = 0$ に垂直な直線の方程式は $bx - ay = 0$ （あるいは $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$ という表現が覚えやすい）である。パラメータ表示をすると、$x = at, y = bt$, t はパラメータ。よって点 (x_0, y_0) を通るときには、平行移動させて、$x = x_0 + at, y = y_0 + bt$ が求める垂線のパラメータ表示の方程式である。

（2）この点は直線上にあるから、$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$ で、そのときの t の値は、$t = -\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$ となる。このときの垂線の長さ d は

$$d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}$$

よって $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ が垂線の長さとなる。

（以上）