行列の階数, 行列式の計算と性質（2020 年 11 月）

1　行列の階数、例題

前回の 3 つの基本変形を組み合わせて、$m \times n$ 型の行列 A に対して、行の掃き出しと列の掃き出しをおこないます。左側、上側に単位行列としてまとまる形にします。もし r 次の単位行列となれば、行の下側には $m-r$ 個のゼロが並び、列の右側には $n-r$ 個のゼロが並びます。

$$P.A.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

行列の階数を計算しましょう。

例 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ について、maxima をもちいて計算したもの。

$A : \mathrm{matrix}([2,-2,1],[1,2,-4],[-3,2,0]);$　　$\mathrm{echelon}(A);\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　$\mathrm{rank}(A); 2$

これは行の変換行列 $P.A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で, さらに列の変換行列 $P.A.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

よって $\mathrm{rank}(A) = (P.A.Q) = 2$.

例 2 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ について、maxima をもちいて計算したもの。

$A : \mathrm{matrix}([a,b,c],[b,c,a],[c,a,b]);$　　$\mathrm{echelon}(A);\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & -\frac{bc-a^2}{ac-b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　$\mathrm{rank}(A); 3$

ただし、数式処理では条件を考慮されていないことに注意しなければならない。自明な場合として、すべてゼロ, $a=b=c=0$ では、$\mathrm{rank}(A)=0$ となる。(i) 行列式を計算すると、$det[A] = -a^3-b^3-c^3+3abc = -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = -\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ となるから、つぎのように場合分けをする。(ii) 条件として、ピボットがゼロにならなければよいから、a,b,c のうち少なくとも一つの値がゼロでないならば、$\mathrm{rank}(A); 3$ は数式処理の結果である。なぜならば、たとえば $b=0, c=0$ であっても単位行列にできることがわかるから。対称性から、ほかの場合も同様。(iii) $a=b=c \neq 0$ では $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ (iv) $a+b+c=0$ であれば、$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ b & -a-b & a \\ -a-b & a & b \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & -\frac{a+b}{a} \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

★数値でなく、変数の場合には場合分けをしなければならない。

2　行列式の定義

行列 (matrix) は $m \times n$ 型などと、行と列の形が正方形とは限る必要がないが、行列式 (determinant) では、正方行列に限って定める。一般形を述べる前に、タイプ $n \times n$ の $n = 2, 3, 4, \cdot$ と書いていく。行列 A に対して、$\det[A]$ とか $|A|$ で表す。すべてスカラー値で、要素の積和で定める。絶対値での記号と同じであるので、正方行列かどうかに注意する。

(I)　$n = 2$; $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、($\det|A|$ の det を省略することもあります)

$$\det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

(II)　$n = 3$; $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ のとき、(1) 項の順序を変える、(2) 共通の項を括りだして, 2 次の行列式をつかうと多くの変形された数値式が得られ、すべて等しい。3 個づつの 6 項の和です。

$$\begin{aligned}
\det|A| &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 \\
&\quad \text{(いわゆるサラスの展開とよばれる)} \\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) \\
&\quad \text{(1行目の係数で括る、2項目はマイナスとなる)} \\
&= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{(2次の行列式をもちいた表現、1行目での余因数展開に他ならない)} \\
&= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_3 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{(1列目での余因数展開)} \\
&= -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{(2列目での余因数展開)} \\
&= \cdots\cdots \text{(さまざまな式変形があります)}
\end{aligned}$$

(III)　$n = 4$; 4 個づつの $24 = 4!$ 項の和です。とてもたくさんで書き切れません。法則をつかんでください。

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$　ピボットとした (i, j) 要素について、その縦の列と横の行を取り除いて、一つ次元の下がった行列式とのピボットとの積に符号も付随して $(-1)^{i+j}$ としたものの積和, 各行と各列からはひとつづつ選択されている

$$\begin{aligned}
\det|A| &= \overbrace{a_1b_2c_3d_4 - a_1b_3c_2d_4 - a_2b_1c_3d_4 - \cdots - a_4b_3c_2d_1}^{24} \\
&= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{(1 列目での余因数展開)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問 1}}$

つぎの行列の階数と変換行列をもとめよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(答え：階数は 2, 変換行列は考えよ。)

$\boxed{\text{問 2}}$

連立方程式を解け。

$$\begin{cases} -x+y-z &= 2 \\ 2x-y+3z &= 4 \\ x+2z &= 1 \end{cases}$$

(答え：解なし)

$\boxed{\text{問 3}}$ つぎの行列式をもとめ、因数分解せよ。

(i) $\det \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$ (ii) $\det \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix}$