1　線形写像（一次変換）

ベクトルからベクトルを対応させる関数を考える。このときには対応を「関数 (function)」とはいわず、写像 (mapping) とよぶ。実数だけではなく、より一般的な集合から集合への対応を写像とよぶからである。しかし和とスカラー倍を保つという仮定のもとで議論する。

定義：V, W をベクトル空間とする。V から W への写像 (mapping) を**線形写像** (linear mapping) という。

(i) 任意 (any, arbitrary) の $\vec{x}, \vec{y} \in V$ に対し、$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.

(ii) 任意の $\vec{x} \in V$, スカラー α に対し、$f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$.

１次元実数値関数 $f(x) = ax$ であれば、$a(x+y) = ax + ay$, $a(\alpha x) = \alpha(ax)$ ですから、当たり前ですね。しかし $f(x) = ax + b(b \neq 0)$ では成り立ちません。$f(0) = 0$ でなければなりません。ベクトル空間では $f(\vec{0}) = \vec{0}$ です。かならず原点ー原点対応と覚えておきましょう！この性質は、もとの空間での和、スカラー倍の演算が、写像した空間での演算に対応するといいます。すなわち演算が保たれるということで、一次変換とは同義語で用いる場合もありますが、線形写像とは自分自身への対応の場合です。

2　核と像

線形写像 $f : V \mapsto W$ において、

写像 f の核 (kernel)　$\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0} \in W\}$
写像 f の像 (image)　$\mathrm{Im}(f) = \{f(\vec{v}) \in W \mid \vec{v} \in V\}$

と表します。核は 1 点とはかぎらず、多くの点から構成される V の部分空間をなし、像も W の部分空間である。複素数の虚部を表す記号とはもちいる箇所の違いで区別しておく。ベクトル空間 X を構成する一次独立なベクトルの最大個数は空間の次元であり、$\dim(X) = n$ とすると、その部分空間 $Y \subset X$, 直交補空間 $Y^\perp \subset X$ とすると、$Y \oplus Y^\perp = X$ を構成する一次独立なベクトルの個数は $\dim(Y) + \dim(Y^\perp) = \dim(X) = n$ を満たします。

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$$

これを**次元定理** (Theory of Dimension) という。

例　$V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$ とし、$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{w} = f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x - z \\ 2x - y + z \end{pmatrix}$ とする。このとき (i) $\mathrm{Ker}(f)$, (ii) $\mathrm{Im}(f)$ の基底と次元を求めよう。

定義にもとづいて、(i) $f(\vec{v}) = \vec{0}$ をベクトル成分で書くと、$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ であるから、いいかえると、$\vec{v}$ は（同次形）連立方程式方程式の解空間にほかならない。方程式の解は、1 個の任意定数; $-\infty < c < \infty$ をもちい、$x = c, y = 3c, z = c$ である。したがって、c は任意の定数で動くから、その空間は $\langle \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ の 1 個の基底ベクトルで張られる空間で、このベクトルが基底である。よって $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$。

(ii) 像は $-\infty < x, y, z < \infty$ に対して, どのような空間になるかということである。$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}$ から、行列の掃き出し計算（階段行列への変形）から、$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$ で、$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$。また 3 列目のベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と i 一次結合で表せたから、した

がって、$\langle\vec{w}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, (-1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$。よって 2 個の一次独立な $W = \mathbb{R}^2$ のベクトル $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$ で W 空間が張られ、これを像の 2 個の基底とする。したがって $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

3 変換行列と表現行列

空間を定める基底は一通りではない。ある一つのベクトルを表す基底は、別の基底によっても表現することができる。ここではベクトル空間から自己の空間へ写像する変換行列と、2 つのベクトル空間に対して基底ベクトルでの関係を明示する行列、表現行列を考える。いづれも線形写像を満たす。

3.1 変換行列

同一のベクトル空間への写像 $f : V \mapsto V$ の例を挙げる。

拡大/縮小　同じ方向ベクトルでのスカラー λ 倍で (拡大 $\lambda > 1$, 縮小 $\lambda < 1$):

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \quad (\text{正規化は}\lambda = 1/|\vec{x}|)$$

射影 (projection)　$\vec{x}, \vec{a}$ に対して、$\vec{x}$ の $\vec{a}$ への**正射影** (orthogonal projection) とは

$$\mathrm{Proj}_{\vec{x}}(\vec{a}) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,\vec{a} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}$$

なぜなら、2 つのベクトルのなす角度を θ とすると、内積の定義から $\vec{x}\cdot\vec{a} = |\vec{x}||\vec{a}|\cos\theta$ で $\lambda = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{a}|}$ となる。射影は $\vec{a}$ を正規化したベクトル $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ の λ - 拡大/縮小; $\lambda\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ の調整をおこない、スカラー λ の値がちょうど $\vec{x}$ からの影の長さ $|\vec{x}|\cos\theta$ になればよいから。

鏡映 (reflection)　鏡面が $\langle\vec{m}\rangle$ であるとき、

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 2\mathrm{Proj}_{\vec{x}}(\vec{m}) = \vec{x} - 2\frac{\vec{x}\cdot\vec{m}}{\vec{m}\cdot\vec{m}}\vec{m}$$

回転 (rotation)　角度 θ、ψ として

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\vec{x},$$

2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ では, 標準基底 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を原点中心で θ だけ回転する。$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ $0 < \theta < \pi/2$ ならば、正の x 軸から第 1 象限に留まり、正の y 軸の点は第 2 象限へ移る。したがって、$\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \vec{y} = f(\vec{x}) = f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}) = f(x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = x_1 f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) + x_2 f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = x_1\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\cos\theta + (-1)x_2\sin\theta\\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\vec{x}$ と得られる。これから、分かるように基底の変換先ベクトルが基本形の表現を定める。

$\mathbb{R}^3$ の標準基底を用いて、変換行列は

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}^2 \in \vec{x}, \vec{y}$ から同じ空間への変換で、$\vec{y} = f(\vec{x}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/5 & 4/5\\ 4/5 & 3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. 成分を書き下すと、$\begin{cases} y_1 = -3/5x_1 + 4/5x_2\\ y_2 = 4/5x_1 + 3/5x_2\end{cases}$ であるから、$\begin{cases} \dfrac{x_1+y_1}{2} = \dfrac{x_1 + (-3/5)x_1 + 4/5x_2}{2} = \dfrac{x_1 + 2x_2}{5},\\ \dfrac{x_2+y_2}{2} = \dfrac{x_2 + 4/5x_1 + 3/5x_2}{2} = \dfrac{2x_1 + 4x_2}{5},\end{cases}$ この式から $\vec{x} \to \vec{y}$

への対応において、中点が直線 $Y = 2X$ 上の点での線形関係をもちます。いいかえるとベクトルの 2 点は座標 (X,Y) での直線 $Y = 2X$ に関して線対称である。このようにこの関係をベクトルの回転で考えると $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ とし、$Proj_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{x}) = Proj_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{y})$ という関係は２点の垂直２等分線が $\overrightarrow{u}$ なる関係で、直線に関して対称な点を計算することができます（例終わり）

３次元の回転は各軸を中心とする，２次元平面の回転の合成に帰着される。z 軸を中心として, 角度 γ 回転させると,z 軸の値は変わらないから、xy 平面の２次元回転、すなわち $\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ となる。

3.2 表現行列

ベクトル空間においては、その点（ベクトル）は基底によって定まり、基底の一次結合で表される。２つのベクトル空間 V, W の結びつきとして、ある線形写像 f が与えられたとき、この関係を表す式、表現行列 A_f をもとめる。標準基底と一般基底の用語を区別しておこう。ここでは例を説明しながら、条件として与えられ線形写像 f に対する一般基底と一般基底の間に関する表現行列 A_f を、それぞれの空間での標準基底と一般基底に関する表現行列 P, Q で述べることを目的とする。

例 1-1 ２次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ における線形変換 (写像) $f : V \mapsto W$ として、$f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$ を考える。これは直線 $y = x$ に関する鏡映である。まず V の基底を標準基底 $\overrightarrow{e_{v1}}, \overrightarrow{e_{v1}}$ とした基底の２個の像を計算する。つまり f ($\overrightarrow{e_{v1}}) = f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in W$, f $(\overrightarrow{e_{v2}}) = f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in W$ と計算できる。この２個のベクトルをそれぞれ W の標準基底 $\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w2}}$ での線形結合で表す。$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\,\overrightarrow{e_{v1}} + y\,\overrightarrow{e_{v2}} \in V$ で、x, y はスカラーであるから、線形写像の性質；$f(x\,\overrightarrow{e_{v1}} + y\,\overrightarrow{e_{v2}}) = x\,f(\overrightarrow{e_{v1}}) + y\,f(\overrightarrow{e_{v2}})$ をもちいる。こうして $(f(\overrightarrow{e_{v1}})$, $f(\overrightarrow{e_{v2}}))$ を W の標準基底 $(\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w2}})$ による関係式を表す行列が得られる。$f(\overrightarrow{e_{v1}})$ と $\overrightarrow{e_{w1}}$、$f(\overrightarrow{e_{v2}})$ と $\overrightarrow{e_{w2}}$ の関係を並べる行列、これを表現行列 A_f とする。

つまり基底の関係式をまとめて書き並べることで表すと、行列 A_f は $(f(\overrightarrow{e_{v1}}), f(\overrightarrow{e_{v2}})) = (\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w2}})A_f$、より具体的には $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) A_f$ で、カッコをはぶいて、$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} A_f$ となる。よって $A_f = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ として得られる。

例 1-2 つぎに同じ線形変換 (写像) $f : V \mapsto W$ $f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$ を $W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} \right\rangle$ の場合を考える。$(f(\overrightarrow{e_{v1}}), f(\overrightarrow{e_{v2}})) = (\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w2}})A_f$ であるから、$\overrightarrow{e_{w1}}$, $\overrightarrow{e_{w2}}$ を計算しなければならない。２つのベクトル $\{\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w2}}\}$ は一次独立で、空間の基底をなす。W の標準基底をもちい、基底の条件から、ベクトルを書き並べることで $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) = (\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w2}}) \begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{pmatrix} Q$ となる W の表現基底から基底を変えた、これらの基底に関する表現行列 Q が得られる。目的は $V \mapsto W$ の写像 A_f の表現行列であるから、

$$(f(\overrightarrow{e_{v1}}), f(\overrightarrow{e_{v2}})) = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})A_f$$

すなわち $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{pmatrix} A_f$ より、$Q^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}2/5 & 1/5\\-3/5 & 1/10\end{pmatrix}$ で、$A_f = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix}2/5 & 1/5\\-3/5 & 1/10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/5 & 2/5\\1/10 & -3/10\end{pmatrix}$ を得た。これらをまとめれば

	線形写像 $V \mapsto W$：	V の標準基底：	W の一般基底：
条件：	$f : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{e_{v1}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{e_{v2}} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,	$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

目的：

$$A_f = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/5 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/10 & -3/10 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{例 2}}$ 3 次元空間 V から 2 次元空間 W への線形写像; $f:\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ -x_2+x_3 \end{pmatrix}$ が与えられたとし、もし基底が $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ として条件を立てた時の、表現行列 A_f を求める。一方標準基底は $\overrightarrow{e_{v1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_{v2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_{v3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_{w1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_{w2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表しておく。$\{\overrightarrow{e_{v1}}, \overrightarrow{e_{v2}}, \overrightarrow{e_{v3}}\} \mapsto \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ の表現行列 P と、もうひとつの空間 W 内の基底変換：$\{\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w2}}, \overrightarrow{e_{w1}}\} \mapsto \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$ の表現行列 Q とする。

<u>STEP 1：</u>与えられた空間 V の基底 $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ を標準基底で $\{\overrightarrow{e_{v1}}, \overrightarrow{e_{v2}}, \overrightarrow{e_{v3}}\}$ の表現行列 P で表す。

空間 V 内の基底を $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると、空間 $V \mapsto V$ 内の基底変換：$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{e_{v1}}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{e_{v2}}$, $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{e_{v3}}$ より、V の標準基底をもちいて

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = (\overrightarrow{e_{v1}}, \overrightarrow{e_{v2}}, \overrightarrow{e_{v3}}) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{e_{v1}}, \overrightarrow{e_{v2}}, \overrightarrow{e_{v3}})P.$$

<u>STEP 2：</u>与えられた空間 W の基底 $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}$ を標準基底で $\{\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w2}}\}$ の表現行列 Q で表す。

空間 W 内の基底：$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とするから、空間 $W \mapsto W$ 内の基底変換は W の標準基底をもちいて $\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{e_{w1}}$, $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{e_{w2}}$ より、

$$(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) = (\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w1}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w1}})Q.$$

<u>STEP 3：</u>線形変換 $f: V \mapsto W$ の標準基底から標準基底への表現行列 A を求める。このために標準基底から標準基底への変換の値は、$f(\overrightarrow{e_{v1}}) = \begin{pmatrix} 1+0 \\ -(0)+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\overrightarrow{e_{v2}}) = \begin{pmatrix} 0+1 \\ -(1)+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(\overrightarrow{e_{v3}}) = \begin{pmatrix} 0+0 \\ -(0)+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ よって

$$(f(\overrightarrow{e_{v1}}), f(\overrightarrow{e_{v2}}), f(\overrightarrow{e_{v3}})) = (\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w1}}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w1}})A$$

ここまでをまとめると

	線形写像 $V \mapsto W$：	V の一般基底：	W の一般基底：
条件：	$f:\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ -x_2+x_3 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

目的：

V の標準基底に関する表現行列

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = (\overrightarrow{e_{v1}}, \overrightarrow{e_{v2}}, \overrightarrow{e_{v3}}) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{e_{v1}}, \overrightarrow{e_{v2}}, \overrightarrow{e_{v3}})P$$

W の標準基底に関する表現行列

$$(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) = (\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w1}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w1}})Q$$

$V \mapsto W$ への標準基底に関する表現行列

$$(f(\overrightarrow{e_{v1}}), f(\overrightarrow{e_{v2}}), f(\overrightarrow{e_{v3}})) = (\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w1}}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w1}})A$$

[$V \mapsto W$ への一般基底に関する表現行列

$$(f(\overrightarrow{v_1}), f(\overrightarrow{v_2}), f(\overrightarrow{v_3})) = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})\, A_f$$

STEP 4 :最後に線形変換 $f : V \mapsto W$ の基底から基底への表現行列 A_f を求めよう。V の基底から、変換値を計算し、それらを W の基底で表すと、

- $f(\overrightarrow{v_1}) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\overrightarrow{w_1} + 0\overrightarrow{w_2} = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$
- $f(\overrightarrow{v_2}) = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\overrightarrow{w_1} + 1\overrightarrow{w_2} = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$
- $f(\overrightarrow{v_3}) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{w_1} + 2\overrightarrow{w_2} = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

したがって

$$(f(\overrightarrow{v_1}), f(\overrightarrow{v_2}), f(\overrightarrow{v_3})) = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})\, A_f$$

が基底 $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ と基底 $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}$ に関する表現行列 A_f として求められる。以上の結果から、つぎの関係式が成り立っている。

表現行列の関係定理

$$f : V \mapsto W, \quad \begin{matrix} P : V \text{ の標準基底変換、} \\ Q : W \text{ の標準基底変換} \end{matrix} \Rightarrow \text{基底の表現行列：} A_f = Q^{-1}AP$$

★★★　練習問題　★★★

$\boxed{1}$　$\mathbb{R}^3$ の基底; $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ に対し、グラム・シュミット法で正規直交基底をつくると $\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sqrt{6}/3\\\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\right\}$ となることを確かめよ。また3つのベクトルからつくる3次正方行列が直交行列となることも確かめよ。

$\boxed{2}$　つぎの線形変換 f に対し、$\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する表現行列 A をもとめよ。

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-x\\z\\y\end{pmatrix}$$

ヒント：$f(\vec{x}) = A\vec{x}$, $\vec{x} = x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}$ から、行列 A をもとめる。同じことで、$(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3})) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})A$

$\boxed{3}$　(1)　$\mathbb{R}^2$ における基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ と $\mathbb{R}^3$ における基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ に関する線形写像

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-y\\y\\x\end{pmatrix}$$

の表現行列 A_f をもとめよ。

ヒント：基底の変換行列 $P = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, また $\begin{pmatrix}-y\\y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ から、標準基底に関する表現行列 $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$。これから 求める表現行列 $A_f = \begin{pmatrix}3 & 1\\-4 & -2\\2 & 0\end{pmatrix}$ となる。

(2) 線形写像が

$$g(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x+y\\-x\\-2x+3y\end{pmatrix}$$

で与えられるとき、表現行列 $A_g = \begin{pmatrix}-2 & 6\\4 & -6\\-1 & 5\end{pmatrix}$ が、表現行列の関係定理の公式；

$$A_g = Q^{-1}.B.P$$

を満たすことを確かめよ。

「補足」 もし数式処理 (maxima) をインストールしているならば、つぎの操作で一般基底の変換に関する表現行列が求められる。２つの写像が共通の基底をつかうので，同時に計算する．

【maxima の命令】

(1) 変換の行列を入力： `F:matrix([0,-1],[0,1],[1,0]);` `G:matrix([1,1],[-1,0],[-2,3]);`

(2) V, W の一般基底の行列を入力： `P:matrix([1,-1],[1,1]);` `Q:matrix([1,1,0],[1,0,-1],[1,1,1]);`

(3) 一般基底の表現行列を計算： `AF:invert(Q).A.P;` `AG:invert(Q).B.P;`

以上で AF, BG を得る。