線形代数行列の基本変形と課題 2(解答)（2020 年 10 月）

★★★練習問題★★★

問 1　$A=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\2&4&6&8&10\end{pmatrix}$ とする。つぎの変形をおこなう行列 $F_i, G_i, H_i (i=1,2)$ をもとめよ。(行列積にピリオドをもちいています)

(i) $F_1.A=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\6&12&18&24&30\end{pmatrix}$　(ii) $G_1.A=\begin{pmatrix}2&4&6&8&10\\1&3&5&7&9\end{pmatrix}$

(iii) $H_1.A=\begin{pmatrix}-3&-5&-7&-9&-11\\2&4&6&8&10\end{pmatrix}$　(iv) $A.F_2=\begin{pmatrix}1&3&10&7&9\\2&4&12&8&10\end{pmatrix}$

(v) $A.G_2=\begin{pmatrix}1&7&5&3&9\\2&8&6&4&10\end{pmatrix}$　(vi) $A.H_2=\begin{pmatrix}1&3&11&7&9\\2&4&14&8&10\end{pmatrix}$

ヒント：P は行に対する操作（左側からの積）だから、3×3 の行列 (3 次正方行列)。各操作ごとの行列を考え、それらの積を求める。つぎの (iii) ではその結果 PA を右側から列の操作する (右側からの積) で 4×4 の行列 (4 次正方行列)。

前回に紹介した maxima などをもちい、数値結果の確認をしながら、計算するとよい。

【解】

行の変換行列(左側から 2×2 型変換行列をかける)

$$F_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad F_1.A=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\6&12&18&24&30\end{pmatrix}$$

$$G_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad G_1.A=\begin{pmatrix}2&4&6&8&10\\1&3&5&7&9\end{pmatrix}$$

$$H_1=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad H_1.A=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\0&-2&-4&-6&-8\end{pmatrix}$$

列の変換行列(右側から 5×5 型変換行列をかける)

$$F_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad A.F_2=\begin{pmatrix}1&3&10&7&9\\2&4&12&8&10\end{pmatrix}$$

$$G_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad A.G_2=\begin{pmatrix}1&7&5&3&9\\2&8&6&4&10\end{pmatrix}$$

$$H_2=\begin{pmatrix}1&0&-5&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad A.H_2=\begin{pmatrix}1&3&0&7&9\\2&4&-4&8&10\end{pmatrix}$$

問 2　$A=\begin{pmatrix}0&1&-3&-2\\1&1&-1&1\\7&4&2&13\end{pmatrix}$ とする。

(i)　A を階段行列（ガウスの消去法）に変形せよ。

(ii) $PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ここで $*$ はゼロでない定数に変形する P をもとめよ。

(iii) $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる Q をもとめよ。

ヒント：P は行に対する操作（左側からの積）だから、3×3 の行列 (3 次正方行列)。各操作ごとの行列を考え、それらの積を求める。つぎの (iii) ではその結果 PA を右側から列の操作する (右側からの積) で 4×4 の行列 (4 次正方行列)。

【解】(i) Step 1: 1 行 1 列成分がゼロだから、1 行目と 2 行目の交換をする。Step 2：3 行目を第 1 成分が 7 だから、１行目に (-7) をかけたものを 3 行目に加える。Step 3: この操作を繰り返して、つぎは 2 行 2 列の要素をもちいて、2 行目に (-1) をかけたものを 3 行目に加えればよい。

(ii) 行の掃き出し計算をおこなう。階段行列の結果から、$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり、2 行 2 列をゼロにするから、2 行目に (-1) をかけて、1 行目に加えると、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P.A$ となり、これまでの操作をまとめて、

$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix}$ を得る。

(iii) こんどは、列の掃き出しを行えばよい。既に要素 $(1, 1)$ と要素 $(2, 2)$ の値が 1 であるから、1 列目の (-2) 倍を 3 列目に、(-3) を 4 列目に加えるだけでもとめる行列が得られる。$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすればよい。

「補足」Maxima の命令：”echelon” は階段行列を求めること，”rank” は階数を求める.

$$echelon(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、これから、3 行の行数があっても、最後の行はゼロが並ぶだけの無意味です。つまり本質は 2 行しかない！

このような状態を階数（ランク）が 2 という。式では rank(A)=2 が分かる。さらにまた列の変換をしても本質性は変わらないので、見かけは 4 列であるが、2 列しかないことが $A.Q$ についてみると、明確となる。

$$P.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A.Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であってともに、“２行のみ”あるいは、“２列のみ” で行列の階数 (ランク) が $rank(A) = 2$ であることを示している。いいかえると、適当な正方行列 P, Q により、２次の単位行列にゼロを加えたものに帰着される。変換行列をかけることは、与えられた行列の「本質性」を変えないので、式で表すと、

$$rank(A) = rank(P.A) = rank(A.Q) = rank(P.A.Q) = 2$$

である。