★★★　練習問題　★★★

$\boxed{1}$ 【線形変換の像】xy 平面 $(\mathbb{R}^2)$ の点 (a,b) は直線 $y=x$ 上にあり、標準基底に関する線形変換 f の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ とする。このとき (a,b) はこの変換でどのような点に移動するか求めよ。

$\boxed{2}$ 【線形変換の核】

$\mathbb{R}^3$ の線形変換は $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) \mapsto \begin{pmatrix} 2x+z \\ x+y+z \\ -4x+2y-z \end{pmatrix}$ に移す。この変換にもとづく 点 (a,b,c) が、$f(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるとき、点 (a,b,c) の関係を満たす図形をもとめよ。

$\boxed{3}$ 【表現行列】線形変換 f は、点 $(1,-1) \mapsto (2,3)$, $(2,1) \mapsto (-1,0)$ に移る。この変換について、標準基底に関する表現行列を求めよ。

$\boxed{4}$ 【平面に射影するベクトル】$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ の正規直交基底を定め、この空間への射影変換 f の標準基底に関する表現行列 A_f をもとめよ。

ヒント：グラム・シュミットの方法を適用して、2 個のベクトルから正規直交基底 $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ をつくる。$W = < \vec{v_1}, \vec{v_2} >$ であり、$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ から、W への射影 $f(\vec{x})$ は、内積をスカラー倍とした一次結合の式 $f(\vec{x}) = \mathrm{Proj}_W(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{v_1})\vec{v_1} + (\vec{x}, \vec{v_2})\vec{v_2}$ で表される。このベクトル変換において標準基底の対応を求めれば、$A_f = (f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3}))$ で得る。

$\boxed{5}$ 【回転を表す行列】行列を n 乗する関係式：$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$ が成り立つ。これは 2 次元ベクトル空間において、原点を中心として角度 θ 回転を表す線形変換の表現行列から明らかである（証明不要)。

この関係式をつぎの場合に計算し、三角関数の加法定理を確認せよ。

(i) $n=2$ の場合　(ii) $n=3$ の場合　(iii) $n=-1$(逆行列) の場合

★「補足 1」角度を α と β とし、その表現行列の積が $\alpha+\beta$ の加法定理となる。この意味は「線形写像の合成が表現行列の積に対応する」ことである。また合成関数の微分が、それぞれの微分の積に等しい。

「補足 2」複素数 $i=\sqrt{-1}$(虚数単位) をもちいたオイラー・ド=モアブルの公式 (複素数の指数関数 $w=e^z$)：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta}$$

を調べよ。

【解】

$\boxed{1}$ 線形写像 $f : V = \mathbb{R}^2 \mapsto W = \mathbb{R}^2$ の像を求める問題で、表現行列、基底から計算しよう。

$\boxed{}$ 標準基底で表すことは、$P = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ であり、同様に $Q = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ となる。すなわち表現行列を使うことと同じである。ここでコンマ $(,)$ をつかって、並べるが省略してもよい。$A_f = Q^{-1}.A.P$ をもとめればよい。よって $A = \begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 4\end{pmatrix}$、$Q = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$、$P = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$、$A_f = \begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 4\end{pmatrix}$ となる。もし $V \mapsto W$ で表すと、

$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 4\end{pmatrix} \overrightarrow{v}$ より、$f(\overrightarrow{e_{v1}}) = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $f(\overrightarrow{e_{v2}}) = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.　　$\therefore \begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$

つぎに変換の関係式と $w_1 = v_1 + 3v_2,\ w_2 = -2v_1 + 4v_2,$ 直線上の条件：$v_1 = v_2$ から、v_1, v_2 を消去すると、$w_1 = 2w_2$ を得る。すなわち xy 座標では $x = 2y$ であるから、$y = \dfrac{1}{2}x$ と書ける。

【注】表現行列は標準基底をもちいる限りには、点を代入して、移った点をもとめて、その関係を推測すればよい。像を求めることが目的であるから、いろいろな点を V の点に対して、変換の式に代入すると

(v_1, v_2)	$\to$	(w_1, w_2)	
$(0,0)$	$\to$	$(0,0)$	原点ー原点の対応
$(1,0)$	$\to$	$(1,-2)$	標準基底
$(0,1)$	$\to$	$(3,4)$	標準基底
$(1,1)$	$\to$	$(4,2)$	$x = 4, y = 2$
$(2,2)$	$\to$	$(8,4)$	$x = 8, y = 4$
$(3,3)$	$\to$	$(12,6)$	$x = 12, y = 6$
$(-1,-1)$	$\to$	$(-4,-2)$	$x = -4, y = -2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	

となるから、像は $y = \dfrac{1}{2}x$ の直線であると推測できるであろう。

$\boxed{2}$ 同時連立方程式の解空間：$\{(x, y, z) \mid 2x + z = 0, x + y + z = 0, 4x - 2y + z = 0\}$ を求めるから、この連立方程式は無数に多くの解をもち、１個の任意定数をもちいて、$x = c, y = c, z = -2c$ と解ける。すなわち $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$

このベクトル空間は１個のベクトルで張られる空間、$\mathbb{R}^3$ の直線であり、 原点を通り、方向ベクトルが $(1, 1, -2)$ とする直線：$\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-2}$ である。

すなわち、$(1, 1, 2), (3, 3, 6), (5, 5, 20), (-4, -4, -8), \cdots$ などの方向比率をもつ点は、すべて移った先が原点となる。

【注】３次元空間における直線を表す方程式の一般形は、通る点 (a, b, c) と方向ベクトル (A, B, C) で定まり、$\dfrac{x-a}{A} = \dfrac{y-b}{B} = \dfrac{z-c}{C}$ と書ける。パラメータ t を用いるならば、$x = a + At, y = b + Bt, z = c + Ct(-\infty < t < \infty)$. 線形写像の場合、原点を通る (原点原点対応) から、$a = b = c = 0$ でなければならない。直線は１次元であり、一方、次元の関係: $3 - 1 = 2$ からは線形写像の像が、ある平面をなすこと、次元が 2 であること、２本の直線でつくる平面、２個の一次独立なベクトルで表される。

$\boxed{3}$ 条件から $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ で標準基底に関して表せばよい。$V = \langle \overrightarrow{e_{v1}}, \overrightarrow{e_{v2}} \rangle$, $W = \langle \overrightarrow{e_{w1}}, \overrightarrow{e_{w2}} \rangle$ とおき、これから表現行列を $A_f = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ とおけば、この標準基底と線形写像の定義で、関係する連立方程式ができる。

V の標準基底;$\overrightarrow{e_{v1}}$,$\overrightarrow{e_{v2}}$	W の標準基底; $\overrightarrow{e_{w1}}$,$\overrightarrow{e_{w2}}$
$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 1 \cdot \overrightarrow{e_{v1}} + (-1) \cdot \overrightarrow{e_{v2}}$	$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{e_{w1}} + 3 \cdot \overrightarrow{e_{w2}}$
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{e_{v1}} + 1 \cdot \overrightarrow{e_{v2}} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = (-1) \cdot \overrightarrow{e_{w1}} + 0 \cdot \overrightarrow{e_{w2}}$

V の基底の変換により $f(\overrightarrow{e_v 1}) = A_f\, \overrightarrow{e_v 1} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$,

$f(\overrightarrow{e_v 2}) = A_f\, \overrightarrow{e_v 2} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$

すなわち上段、下段の式から

$$f(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}) = 1 \cdot f(\overrightarrow{e_{v1}}) + (-1) \cdot f(\overrightarrow{e_{v1}}) = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \cdots\cdots ①$$

$$f(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}) = 2\cdot f(\overrightarrow{e_{v1}}) + 1\cdot f(\overrightarrow{e_{v1}}) = 2\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\cdots\cdots ②$$

を得るから、これを解く。①+② から、$(1+2)\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ であり、この値 $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1\end{pmatrix}$ を ② に代入すると、$2\begin{pmatrix}1\\1/3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ から、$\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5/3\\-2\end{pmatrix}$ となる。ゆえに $A_f = \begin{pmatrix}1/3 & -5/3\\1 & -2\end{pmatrix}$.

【注】標準基底に関する表現行列を求める場合には、P, Q の基底での変換は単位行列であるから、そのままの要素で表現され、簡潔である。

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ とおく。最初のベクトルを正規化すると、ノルムは $|\overrightarrow{a_1}| = \sqrt{1^2+0^2+1^1} = \sqrt{2}$ であるから、$\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ となる。つぎは $\overrightarrow{a_2}$ のベクトルを部分空間 $\langle\overrightarrow{v_1}\rangle$ へ射影して、直角三角形をつくる。

$\overrightarrow{a_2} - \mathrm{Proj}_{\overrightarrow{a_1}}(\overrightarrow{a_2}) = \overrightarrow{a_2} - \frac{(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2})}{|\overrightarrow{a_1}^2|}\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix}-1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$ となり、内積の計算をすると、ゼロであるから、直交化した。これを正規化して、2 番目の正規直交基底 $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ を得る。これらから、一般のベクトル $\vec{x}$ をこのベクトル空間 $W = \langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\rangle$ へと $f(\vec{x}) = \mathrm{Proj}_W(\vec{x}) = (\vec{x},\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1} + (\vec{x},\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_2}$ により射影できる。変数として、たとえば $\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおき、スカラー係数 $(\vec{x},\overrightarrow{v_1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)$, $(\vec{x},\overrightarrow{v_2}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-x+2y+z)$ と計算し、$f(\vec{x}) = A_f\,\vec{x}$ の形にすればよい。$f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)\overrightarrow{v_1} + \frac{1}{\sqrt{6}}(-x+2y+z)\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}1/2x+1/2z\\0\\1/2x+1/2z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/6x-2/6y-1/6z\\-2/6x+4/6y+2/6z\\-1/6x+2/6y+1/6z\end{pmatrix} =$ $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}x + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}y + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}z$ となり、これから、$A_f = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ で射影の表現行列として計算できた。射影の基本的な性質として、「表現行列のべき乗をすると元の行列に等しい」ことが成り立つから、射影したものをもう一度射影する（べき乗、積で合成すること）しても同じであるから。べき乗で確かめることもできる。

また直交補空間 $W^\perp$ は残りの基底をつくり、平面を表す W の方程式の原点から立てた法線となる。

$\boxed{5}$ $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\\\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta+\cos^2\theta\end{pmatrix}$

2 倍角の式が得られている。

逆行列の公式も $n=-1$ で等式として成り立っていることもほぼ明らかで、時計回りに回転されること、$-\theta$ にすることがこの式からも得られる。

合成関数では $f(x) = Ax \to f(f(x)) = Af(x) = A(Ax) = A^2x$ からも、このような拡張性 (交換律は不成立であるが、結合律は成立) と一致性が保たれなければならないことに注意しよう。

(以下略)