

1 ベクトル  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  のとき、(1) ベクトルの差  $\vec{b} - \vec{a}$  に対するノルム (ベクトルの長さ)  $\|\vec{b} - \vec{a}\|$  を求めよ。(2) 2つのベクトルが直交する (垂直となる) ための条件をかけ。

【解】(1)  $\vec{b} - \vec{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$  であるから、 $\|\vec{b} - \vec{a}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

(2)  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$  をもちいる。直交するから、余弦の値  $\cos \theta = \cos(\pi/2) = \cos 90^\circ = 0$  より、分子の内積  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$  これがもとめる条件である。

2 3つのベクトル  $(a_1, a_2)$ ,  $(b_1, b_2)$ ,  $(c_1, c_2)$  が同一直線上にあるための条件を求めよ。

【解】それぞれのベクトルが表す平面の点を A, B, C とおけば、A と B を結ぶ直線をもとめ、その直線が C を通ればよい。直線の方程式は  $y - b_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - b_1)$  で、C の値  $x = c_1, y = c_2$  を代入する。したがって

$c_2 - b_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(c_1 - b_1)$  と得られる。この式をさらに変形すると  $b_1 c_2 - b_2 c_1 + (-1)\{a_1 c_2 - a_2 c_1\} + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$  である。外積の定義から

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ (-1)\{a_1 c_2 - a_2 c_1\} \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

であるから、さらにベクトルの内積、3次の行列式をもちいて

$$\left( \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と表すことができる。

3 点  $(a, b)$  を通り、方向ベクトルが  $(m, n)$  で与えられた。この直線をパラメータ  $t$  をもちいて、 $x = a + mt$ ,  $y = b + nt$  と表すとき、これをパラメータ表示という。2点  $(x_1, x_2)$ ,  $(y_1, y_2)$  を結んでつくる直線をパラメータ表示で表せ。

【解】2点を結ぶ方向ベクトル  $(m, n)$  は  $(m, n) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$  であり、点  $(x_1, x_2)$  を通るから、

$$\begin{cases} x = x_1 + (y_1 - x_1)t, \\ y = x_2 + (y_2 - x_2)t \end{cases} \quad t \text{ はパラメータ}$$

と表せる。

4 2つの直線が  $m_1 x + n_1 y = p_1$ ,  $m_2 x + n_2 y = p_2$  で与えられたとき、2直線のなす角  $\theta$  とするとき、 $\cos \theta$  の値を求めよ。

【解】それぞれの直線が  $x$  軸とのなす角を  $\theta_1, \theta_2$  とおけば、 $\tan \theta_i = -\frac{m_i}{n_i}$ ,  $i = 1, 2$  で、2直線のなす角は、 $\theta = \theta_1 - \theta_2$  と

なる。正接の加法定理をもちい (和の式ではなく、差の式) 代入することで、 $\tan \theta = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$

ここにおいて、 $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$  をもちいて、正接から余弦をもとめる。

$$\tan^2 \theta = \left( \frac{(-\frac{m_1}{n_1}) - (-\frac{m_2}{n_2})}{1 + (-\frac{m_1}{n_1})(-\frac{m_2}{n_2})} \right)^2 = \left( \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{m_1 m_2 + n_1 n_2} \right)^2$$

結果は、

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$$

ここで2乗値の平方根には絶対値が必要であることに注意。また分子は内積、分母はノルムの積となっている。

5 点  $(x_0, y_0)$  から直線  $ax + by + c = 0$  に引いた垂線を引く。(1) 垂線の方程式をパラメータ表示で表せ。(2) 垂線の長さを求めよ。

【解】(1) 垂線の方程式は、ベクトルの直交性をもちいる。まず原点  $(0, 0)$  通り、直線  $ax + by + c = 0$  に垂直な直線の方程式は  $bx - ay = 0$  (あるいは  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$  という表現が覚えやすい) である。パラメータ表示をすると、 $x = at, y = bt, t$  はパラメータ。よって点  $(x_0, y_0)$  を通るときには、平行移動させて、 $x = x_0 + at, y = y_0 + bt$  が求める垂線のパラメータ表示の方程式である。

(2) この点は直線上にあるから、 $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$  で、そのときの  $t$  の値は、 $t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$  となる。このときの垂線の長さ  $d$  は

$$d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}$$

よって  $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  が垂線の長さとなる。

(以上)