正則行列、逆行列, 余因子行列（2020 年 11 月）

1　正則行列、逆行列

与えられた n 次正方行列が正則（regular）とは、ある行列 X を定めて、

$$A.X = X.A = I_n \qquad I_n \text{は } n \text{ 次単位行列、} E_n \text{とも表すことが多い}$$

とできること。I は unity ですが、整数の加法演算の単位元 1 に似ているからで、E はドイツ語の eigen に由来する。X は正方行列で、逆行列（inverse matrix） という。記号では $X = A^{-1}$ と表す。実数の関係では、$ax = xa = 1$(常に交換可能であり、単位行列は実数の積演算での単位元 1 に対応) であるから、$x = \dfrac{1}{a} = a^{-1}$ であるが、$a \neq 0$ でなければならない。行列の場合では、交換可能な行列を選び、A についても、逆行列をもつ条件を考えなければならない。

2 次の場合では、公式として覚えてしまう方が手っ取り早い！

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

スカラー $\dfrac{1}{ad-bc}$ の行列との積があり、分数は $ad - bc \neq 0$ が必要である。要素 $(2,1)$ と $(1,2)$ の符号に注意。もし曖昧であれば、実際の積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で確認する。

行列式 (determinant) の定義：正方行列に対して、各行と列から 1 個づつ重複せずに取り出して、積を作り、順列の符号を掛けた和をとったもの。

- 2 次正方行列の場合；$\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$
- 3 次正方行列の場合；$\det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$

次数が少ない場合は、行列式などの定義をそのまま辿ることで理解できるが、より高次の場合、きちんとした一般の n 次での定義を定めるのは、置換の符号数をもちいる。置換とは数字列の並び替えをいうが、置換の符号数とは、２個の置換（番号の入れ替え）を**互換**と呼び、$\{\cdots i, \cdots j \cdots\} \to \{\cdots j, \cdots i \cdots\}$。たとえば、2 と 1 の互換（1 回の操作）をすると、 $\{2,3,1\} \to 3$！ $\{1,3,2\}$ となる。さらに 2 回の互換（2 回の操作）で $\{2,3,1\} \to \{1,2,3\}$ である。奇数回のグループと偶数回のグループは半分ずつに分かれる。3 個数字ででであれば $3! = 6$ 通りの場合があるが、3 個ずつとなる。この回数が偶数回 (ゼロは偶数) を偶置換、奇数回を奇置換という。

2 個の $\{1,2\}$；
偶置換　$\mathrm{sgn}\{1,2\} = +1$
奇置換　$\mathrm{sgn}\{2,1\} = -1,$

3 個の $\{1,2,3,\}$；
偶置換　$\mathrm{sgn}\{1,2,3\} = \mathrm{sgn}\{2,3,1\} = \mathrm{sgn}\{3,1,2\} = +1$
奇置換　$\mathrm{sgn}\{2,1,3\} = \mathrm{sgn}\{3,2,1\} = \mathrm{sgn}\{1,3,2\} = -1$

これらの置換について、上記の行列式での展開式と比較すると、プラスとマイナスの符号に対応している。3 次正方行列の場合；サラスの展開とよばれる公式である。

では 4 次行列より高次の場合の公式は？ $4! = 24$ 個の項数で、書き切れないし、$5! = 120$ 個となる。どうしたらよいかを考える。逆行列の計算では掃き出し法（sweep out）を行えばよい。 4 次以降の行列式では、後述で与える余因数展開をおこなう。

掃き出しで、逆行列をつくる：

最初に与えられた行列 A に単位行列を右側に付加した 2×4 型行列をつくって、

$A|E = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ここで縦棒は A と E を繋げたことを表す。

↓ 1 行目の掃き出し計算の変換行列：$S2.S1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -c/a & 1 \end{pmatrix}$

↓ 2 行目の掃き出し計算の変換行列：$S4.S3 = \begin{pmatrix} 1 & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a/(ad-bc) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b/(ad-bc) & a/(ad-bc) \end{pmatrix}$

これらの操作をおこなうことで、 変換行列で $S4.S3.S2.S1.A|E$ の形が、$E|A^{-1}$ として得られる：

A の掃き出し計算：$A|E \longrightarrow E|A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d/(ad-bc) & -b/(ad-bc) \\ 0 & 1 & -c/(ad-bc) & a/(ad-bc) \end{pmatrix}$

一般にも適用可能で、掃き出し計算による方法は、逆行列が存在するかどうか判定をしながら進行できるという便利なものです。逆行列が存在しな時点は、掃き出し計算のピボットがゼロばかりで、進行できない状況になる。3 次正方行列の計算では

$A|E = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ から始めればよい。その逆行列は？　$E|A^{-1}$ であるが、空白が狭くて書き切れない！！

2　逆行列と余因子行列

2 次までは書き表すことができたが、3 次の逆行列を直接、明示的にはとても書き切れない。しかしそこを敢えて書き下してみよう。行列式でも、項数は 3 個ずつの積が $3! = 6$ 項並んだ和であり、これがひとつの要素であり、これが、$3\times 3 = 9$ 個の縦横に並ぶ。

親密な関係をもつ余因子行列または余因数行列（cofactor matrix）$\tilde{A}$ (A tilde ティルダと読む) を述べよう。

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a_1} & \widetilde{b_1} & \widetilde{c_1} \\ \widetilde{a_2} & \widetilde{b_2} & \widetilde{c_2} \\ \widetilde{a_3} & \widetilde{b_3} & \widetilde{c_3} \end{pmatrix}$　(行列の転置がなされていることに注意)

逆行列 A^{-1} では $A.A^{-1} = A^{-1}.A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

余因子行列 $\widetilde{A}$ では $A.\widetilde{A} = \widetilde{A}.A = \det|A|.E = \begin{pmatrix} \det|A| & 0 & 0 \\ 0 & \det|A| & 0 \\ 0 & 0 & \det|A| \end{pmatrix}$　(単位行列のスカラー倍)

3　行列、逆行列、行列式の性質

よく用いられる行列と逆行列の性質：

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$ (元に戻る)　　(ii) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ (積の順序が逆に)

(iii) ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ (順序によらない)　　(iv) $\det|A^{-1}| = \dfrac{1}{\det|A|}$ (逆数になる)

(v) $\det|A.B| = \det|A| \cdot \det|B|$ （それぞれの積に等しい）　(vi) $\det|{}^tA| = \det|A|$(順序によらない)

ここで ${}^tA$ は対角成分で折り返す転置行列（transpose）を表す。左側に書く意味は行列のべき乗と区別するため。

4　3 次の逆行列の計算、クラーメルの公式、余因数

定義から

$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ とし、逆行列を $A^{-1}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ とすれば、積（ドット積）が単位行列ですから、

$$A.A^{-1}=E \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \& \ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \& \ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

まず上記の第 1 項について、x_1, y_1, z_1 について解くと、連立方程式の解法（クラーメル (Cramel) の公式）により

$$x_1=\frac{1}{\det|A|}\det\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{\det|A|}(-1)^{1+1}\det\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{b_2c_3-b_3c_2}{\det|A|}=\frac{\widetilde{a_1}}{\det|A|}$$

$$y_1=\frac{1}{\det|A|}\det\begin{vmatrix} a_1 & 1 & a_3 \\ b_1 & 0 & b_3 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{\det|A|}(-1)^{2+1}\det\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{(-1)(b_1c_3-b_3c_1)}{\det|A|}=\frac{\widetilde{a_2}}{\det|A|}$$

$$z_1=\frac{1}{\det|A|}\det\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{\det|A|}(-1)^{3+1}\det\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{\det|A|}=\frac{\widetilde{a_3}}{\det|A|}$$

つぎの上記の第 2 項について、x_2, y_2, z_2 について解くと

$$x_2=\frac{1}{\det|A|}\det\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{\det|A|}(-1)^{1+2}\det\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{(-1)(a_2c_3-a_3c_2)}{\det|A|}=\frac{\widetilde{b_1}}{\det|A|}$$

$$y_2=\frac{1}{\det|A|}\det\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ b_1 & 1 & b_3 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{\det|A|}(-1)^{2+2}\det\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{a_1c_3-a_3c_1}{\det|A|}=\frac{\widetilde{b_2}}{\det|A|}$$

$$z_2=\frac{1}{\det|A|}\det\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{\det|A|}(-1)^{3+2}\det\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=\frac{(-1)(a_1c_2-a_2c_1)}{\det|A|}=\frac{\widetilde{b_3}}{\det|A|}$$

さらに上記の第 3 項について、x_3, y_3, z_3 について解くと

$$x_3=\frac{1}{\det|A|}(-1)^{1+3}\det\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{\det|A|}\det\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\frac{a_2b_3-a_3b_2}{\det|A|}=\frac{\widetilde{c_1}}{\det|A|}$$

$$y_3=\frac{1}{\det|A|}\det\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ b_1 & 0 & b_3 \\ c_1 & 1 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{\det|A|}(-1)^{2+3}\det\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}=\frac{(-1)(a_1b_3-a_3b_1)}{\det|A|}=\frac{\widetilde{c_2}}{\det|A|}$$

$$z_3=\frac{1}{\det|A|}\det\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{\det|A|}(-1)^{3+3}\det\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{\det|A|}=\frac{\widetilde{c_3}}{\det|A|}$$

余因子行列の定義は、上のティルダーのついている数を余因数とよび、その行列が余因子行列（あるいは余因数行列）である。

$$A.\widetilde{A}=\widetilde{A}.A=\det|A|.I_3=\begin{pmatrix} \det|A| & 0 & 0 \\ 0 & \det|A| & 0 \\ 0 & 0 & \det|A| \end{pmatrix}$$

このように逆行列にほぼ類似の定め方である。これを行列の成分（要素）で表してみよう。注意として対角成分以外はゼロになることから、つぎの関係式がある。

$$
\begin{aligned}
a_1\widetilde{a_1}+a_2\widetilde{a_2}+a_3\widetilde{a_3} &= a_1b_2c_3-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1 \\
&= \det|A| \\
b_1\widetilde{a_1}+b_2\widetilde{a_2}+b_3\widetilde{a_3} &= b_1b_2c_3-b_2b_1c_3-b_1b_3c_2+b_3b_1c_2+b_2b_3c_1-b_3b_2c_1 \\
&= \det\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{第 1 列と第 2 列が同じだから}) \\
c_1\widetilde{a_1}+c_2\widetilde{a_2}+c_3\widetilde{a_3} &= c_1b_2c_3-c_2b_1c_3-c_1b_3c_2+c_3b_1c_2+c_2b_3c_1-c_3b_2c_1 \\
&= \det\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{第 1 列と第 3 列が同じだから}) \\
a_1\widetilde{b_1}+a_2\widetilde{b_2}+a_3\widetilde{b_3} &= 0 \\
b_1\widetilde{b_1}+b_1\widetilde{b_1}+b_1\widetilde{b_1} &= \det|A| \\
c_1\widetilde{b_1}+c_2\widetilde{b_2}+c_3\widetilde{b_3} &= 0
\end{aligned}
$$

(以下略)

★★★　まとめ　★★★

• 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ の逆行列と余因子行列は

行列式　$\det|A| = a_1b_2-a_2b_1,$

逆行列　$A^{-1}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$

余因子行列　$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$

• 3 次正方行列 (3rd matrix) $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det|A|$、逆行列 A^{-1} と余因子行列 $\widetilde{A}$ は

行列式 (determinant)

$$
\begin{aligned}
\det|A| &= a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1 \\
&= a_1(b_2c_3-b_3c_2)+(-1)a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1) \\
&= a_1\cdot\det\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\cdot\det\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\cdot\det\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= a_1(b_2c_3-b_3c_2)+(-1)b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2) \\
&= a_1\cdot\det\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\cdot\det\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\cdot\det\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

逆行列 (invert)　$A^{-1}=\dfrac{1}{\det|A|}\begin{pmatrix} \widetilde{r_1} \\ \widetilde{r_2} \\ \widetilde{r_3} \end{pmatrix}$

余因子行列 (adjoint)　$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} \widetilde{r_1} \\ \widetilde{r_2} \\ \widetilde{r_3} \end{pmatrix}$ ただし、

$$
\begin{aligned}
\widetilde{r_1} &= \left(\det\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix},\quad (-1)\det\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix},\quad \det\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right) \\
\widetilde{r_2} &= \left((-1)\det\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix},\quad \det\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix},\quad (-1)\det\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\right) \\
\widetilde{r_3} &= \left(\det\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix},\quad (-1)\det\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix},\quad \det\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

★★★　練習問題　★★★

$\boxed{\text{問 1}}$

つぎの行列式をもとめ、因数分解せよ。その結果をもとの行列から考えよ。(i) はヴァンデルモントの行列。

(i) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$　　(ii) $\begin{pmatrix} a & bc & b+c \\ b & ca & c+a \\ c & ab & a+b \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{問 2}}$

4 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の $\det|A|$ をもとめよ。また余因子行列 $\widetilde{A}$ を計算して、

$A.\widetilde{A} = \widetilde{A}.A = \det|A|.E$ が成り立つことを確かめよ。

$\boxed{\text{問 3}}$

正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & -b & -a & 0 \end{pmatrix}$ の行列式をもとめよ。ヒント：行の和を計算しながら、因数を括りだす。

(答え) $(a^2 - b^2 + c^2)^2$