

1 線形写像（一次変換）

ベクトルからベクトルを対応させる関数を考える。このときには対応を「関数 (function)」とはいわず、写像 (mapping) とよぶ。実数だけではなく、より一般的な集合から集合への対応を写像とよぶからである。しかし和とスカラー倍を保つという仮定のもとで議論する。

定義： V, W をベクトル空間とする。 V から W への写像 (mapping) を**線形写像** (linear mapping) という。

- (i) 任意 (any, arbitrary) の $\vec{x}, \vec{y} \in V$ に対し、 $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.
- (ii) 任意の $\vec{x} \in V$, スカラー α に対し、 $f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$.

1 次元実数値関数 $f(x) = ax$ であれば、 $a(x + y) = ax + ay$, $a(\alpha x) = \alpha(ax)$ ですから、当たり前ですね。しかし $f(x) = ax + b (b \neq 0)$ では成り立ちません。 $f(0) = 0$ でなければなりません。ベクトル空間では $f(\vec{0}) = \vec{0}$ です。かならず原点-原点対応と覚えておきましょう！この性質は、もとの空間での和、スカラー倍の演算が、写像した空間での演算に対応するといえます。すなわち演算が保たれるということで、一次変換とは同義語で用いる場合がありますが、線形写像とは自分自身への対応の場合です。

2 核と像

線形写像 $f : V \mapsto W$ において、

写像 f の核 (kernel) $\text{Ker}(f) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0} \in W\}$

写像 f の像 (image) $\text{Im}(f) = \{f(\vec{v}) \in W \mid \vec{v} \in V\}$

と表します。核は 1 点とはかぎらず、多くの点から構成される V の部分空間をなし、像も W の部分空間である。複素数の虚部を表す記号とはもちいる箇所の違いで区別しておく。ベクトル空間 X を構成する一次独立なベクトルの最大個数は空間の次元であり、 $\dim(X) = n$ とすると、その部分空間 $Y \subset X$, 直交補空間 $Y^\perp \subset X$ とすると、 $Y \oplus Y^\perp = X$ を構成する一次独立なベクトルの個数は $\dim(Y) + \dim(Y^\perp) = \dim(X) = n$ を満たします。

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$$

これを**次元定理** (Theory of Dimension) という。

例 $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$ とし、 $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{w} = f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x - z \\ 2x - y + z \end{pmatrix}$ とする。このとき (i) $\text{Ker}(f)$, (ii) $\text{Im}(f)$

の基底と次元を求めよう。

定義にもとづいて、(i) $f(\vec{v}) = \vec{0}$ をベクトル成分で書くと、 $\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ であるから、いいかえると、 \vec{v} は (同次形) 連立方程式方程式の解空間にほかならない。方程式の解は、1 個の任意定数; $-\infty < c < \infty$ をもちい、 $x = c, y = 3c, z = c$ である。したがって、 c は任意の定数で動くから、その空間は $\langle \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ の 1 個の基底ベクトルで張られる空間で、このベクトルが基底である。よって $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ 。

(ii) 像は $-\infty < x, y, z < \infty$ に対して、どのような空間になるかということである。 $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}$ から、行列の掃き出し計算 (階段行列への変形) から、 $\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$ で、 $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ 。また 3 列目のベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と i 一次結合で表せたから、した

がって、 $\langle \vec{w} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ 。よって 2 個の一次独立な $W = \mathbb{R}^2$

のベクトル $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ で W 空間が張られ、これを像の 2 個の基底とする。したがって $\text{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$,

$\dim(\text{Ker}(f)) = 1$, $\text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ 。

3 変換行列と表現行列

空間を定める基底は一通りではない。ある一つのベクトルを表す基底は、別の基底によっても表現することができる。ここではベクトル空間から自己の空間へ写像する変換行列と、2つのベクトル空間に対して基底ベクトルでの関係を明示する行列、表現行列を考える。いずれも線形写像を満たす。

3.1 変換行列

同一のベクトル空間への写像 $f: V \mapsto V$ の例を挙げる。

拡大/縮小 同じ方向ベクトルでのスカラー λ 倍で (拡大 $\lambda > 1$, 縮小 $\lambda < 1$):

$$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \quad (\text{正規化は } \lambda = 1/|\vec{x}|)$$

射影 (projection) \vec{x}, \vec{a} に対して、 \vec{x} の \vec{a} への**正射影** (orthogonal projection) とは

$$\text{Proj}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

なぜなら、2つのベクトルのなす角度を θ とすると、内積の定義から $\vec{x} \cdot \vec{a} = |\vec{x}| |\vec{a}| \cos \theta$ で $\lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{a}|}$ とな

る。射影は \vec{a} を正規化したベクトル $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ の λ - 拡大/縮小; $\lambda \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ の調整をおこない、スカラー λ の値がちょうど \vec{x} からの影の長さ $|\vec{x}| \cos \theta$ になればよいから。

鏡映 (reflection) 鏡面が $\langle \vec{m} \rangle$ であるとき、

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 2\text{Proj}_{\vec{m}}(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \frac{\vec{x} \cdot \vec{m}}{\vec{m} \cdot \vec{m}} \vec{m}$$

回転 (rotation) 角度 θ , ψ として

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \vec{x},$$

2次元空間 \mathbb{R}^2 では、標準基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を原点中心で θ だけ回転する。 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$

$0 < \theta < \pi/2$ ならば、正の x 軸から第1象限に留まり、正の y 軸の点は第2象限へ移る。したがって、 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x_1 f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + x_2 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} x_1 \cos \theta + (-1)x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \vec{x}$ と得られる。これから、分かるように基底の変換先ベクトルが基本形の表現を定める。

\mathbb{R}^3 の標準基底を用いて、変換行列は

例 $\mathbb{R}^2 \in \vec{x}, \vec{y}$ から同じ空間への変換で、 $\vec{y} = f(\vec{x}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 。成分を書き下すと、

$$\begin{cases} y_1 = -3/5x_1 + 4/5x_2 \\ y_2 = 4/5x_1 + 3/5x_2 \end{cases} \text{ であるから、} \begin{cases} \frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{x_1 + (-3/5)x_1 + 4/5x_2}{2} = \frac{x_1 + 2x_2}{5}, \\ \frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{x_2 + 4/5x_1 + 3/5x_2}{2} = \frac{2x_1 + 4x_2}{5}, \end{cases} \text{ この式から } \vec{x} \rightarrow \vec{y}$$

への対応において、中点が直線 $Y = 2X$ 上の点での線形関係を持ちます。いいかえるとベクトルの 2 点は座標 (X, Y) での直線 $Y = 2X$ に関して線対称である。このようにこの関係をベクトルの回転で考えると $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とし、 $Proj_{\vec{u}}(\vec{x}) = Proj_{\vec{u}}(\vec{y})$ という関係は 2 点の垂直 2 等分線が \vec{u} なる関係で、直線に関して対称な点を計算することができます (例終わり)

3 次元の回転は各軸を中心とする、2 次元平面の回転の合成に帰着される。 z 軸を中心として、角度 γ 回転させると、 z 軸の値は変わらないから、 xy 平面の 2 次元回転、すなわち $\begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

3.2 表現行列

ベクトル空間においては、その点 (ベクトル) は基底によって定まり、基底の一次結合で表される。2 つのベクトル空間 V, W の結びつきとして、ある線形写像 f が与えられたとき、この関係を表す式、表現行列 A_f をもとめる。ここでは例を説明し、一般に成り立つ性質を述べることにする。

例 3 次元空間 V から 2 次元空間 W への線形写像; $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ が与えられたとし、もし

基底が $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ として条件を立てた時の、表現行列

A_f を求める。一方標準基底は $\vec{e}_{v1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_{v2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_{v3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_{w1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_{w2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表しておく。

$\{\vec{e}_{v1}, \vec{e}_{v2}, \vec{e}_{v3}\} \mapsto \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ の表現行列 P と、もうひとつの空間 W 内の基底変換: $\{\vec{e}_{w1}, \vec{e}_{w2}\} \mapsto \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ の表現行列 Q とする。

STEP 1 :与えられた空間 V の基底 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ を標準基底で $\{\vec{e}_{v1}, \vec{e}_{v2}, \vec{e}_{v3}\}$ の表現行列 P で表す。

空間 V 内の基底を $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると、空間 $V \mapsto V$ 内の基底変換: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{e}_{v1}$,

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_{v2}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{e}_{v3}$ より、 V の標準基底をもちいて

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = (\vec{e}_{v1}, \vec{e}_{v2}, \vec{e}_{v3}) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{e}_{v1}, \vec{e}_{v2}, \vec{e}_{v3})P$$

となる。

STEP 2 :与えられた空間 W の基底 $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ を標準基底で $\{\vec{e}_{w1}, \vec{e}_{w2}\}$ の表現行列 Q で表す。

空間 W 内の基底: $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とするから、空間 $W \mapsto W$ 内の基底変換は W の標準基底をもちい

て $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{e}_{w1}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{e}_{w2}$ より、

$$(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = (\vec{e}_{w1}, \vec{e}_{w2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (\vec{e}_{w1}, \vec{e}_{w2})Q$$

となる。

STEP 3 :線形変換 $f : V \mapsto W$ の標準基底から標準基底への表現行列 A を求める。このために標準基底から標準基

底への変換の値は、 $f(\vec{e_{v1}}) = \begin{pmatrix} 1+0 \\ -(0)+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\vec{e_{v2}}) = \begin{pmatrix} 0+1 \\ -(1)+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(\vec{e_{v3}}) = \begin{pmatrix} 0+0 \\ -(0)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって

$$(f(\vec{e_{v1}}), f(\vec{e_{v2}}), f(\vec{e_{v3}})) = (\vec{e_{w1}}, \vec{e_{w1}}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{e_{w1}}, \vec{e_{w1}})A$$

ここまですとまとめると

	線形写像 $V \mapsto W$:	V の一般基底 :	W の一般基底 :
条件 :	$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$	$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

目的 :

V の標準基底に関する表現行列

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = (\vec{e_{v1}}, \vec{e_{v2}}, \vec{e_{v3}}) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{e_{v1}}, \vec{e_{v2}}, \vec{e_{v3}})P$$

W の標準基底に関する表現行列

$$(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = (\vec{e_{w1}}, \vec{e_{w1}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (\vec{e_{w1}}, \vec{e_{w1}})Q$$

$V \mapsto W$ への標準基底に関する表現行列

$$(f(\vec{e_{v1}}), f(\vec{e_{v2}}), f(\vec{e_{v3}})) = (\vec{e_{w1}}, \vec{e_{w1}}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{e_{w1}}, \vec{e_{w1}})A$$

$[V \mapsto W$ への一般基底に関する表現行列

$$(f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), f(\vec{v}_3)) = (\vec{w}_1, \vec{w}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2)A_f$$

STEP 4 :最後に線形変換 $f : V \mapsto W$ の基底から基底への表現行列 A_f を求めよう。 V の基底から、変換値を計算し、それらを W の基底で表すと、

- $f(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\vec{w}_1 + 0\vec{w}_2 = (\vec{w}_1, \vec{w}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$
- $f(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\vec{w}_1 + 1\vec{w}_2 = (\vec{w}_1, \vec{w}_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$
- $f(\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{w}_1 + 0\vec{w}_2 = (\vec{w}_1, \vec{w}_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

したがって

$$(f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), f(\vec{v}_3)) = (\vec{w}_1, \vec{w}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2)A_f$$

が基底 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ と基底 $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ に関する表現行列 A_f として求められる。以上の結果から、つぎの関係式が成り立っている。

表現行列の関係定理

$$f : V \mapsto W, \begin{matrix} P : V \text{ の標準基底変換,} \\ Q : W \text{ の標準基底変換} \end{matrix} \Rightarrow \text{基底の表現行列 : } A_f = Q^{-1}AP$$

[1] \mathbb{R}^3 の基底; $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に対し、グラム・シュミット法で正規直交基底をつくと
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$ となることを確かめよ。また3つのベクトルからつくる3次正方行列が直交行列となることも確かめよ。

[2] つぎの線形変換 f に対し、 \mathbb{R}^3 の標準基底に関する表現行列 A をもとめよ。

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

ヒント: $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, $\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ から、行列 A をもとめる。同じことで、 $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)A$

[3] (1) \mathbb{R}^2 における基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ と \mathbb{R}^3 における基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する線形写像

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

の表現行列 A_f をもとめよ。

ヒント: 基底の変換行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, また $\begin{pmatrix} -y \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から、標準基底に関する表現行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。これから求める表現行列 $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

(2) 線形写像が

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x \\ -2x+3y \end{pmatrix}$$

で与えられるとき、表現行列 $A_g = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ が、表現行列の関係定理の公式;

$$A_g = Q^{-1} \cdot B \cdot P$$

を満たすことを確かめよ。

「補足」 もし数式処理 (maxima) をインストールしているならば、つぎの操作で一般基底の変換に関する表現行列が求められる。

【maxima の命令】

- (1) 変換の行列を入力: `F:matrix([0,-1],[0,1],[1,0]); G:matrix([1,1],[-1,0],[-2,3]);`
 - (2) V, W の一般基底の行列を入力: `P:matrix([1,-1],[1,1]); Q:matrix([1,1,0],[1,0,-1],[1,1,1]);`
 - (3) 一般基底の表現行列を計算: `AF:invert(Q).A.P; AG:invert(Q).B.P;`
- 以上で AF, BG を得る。