1　ベクトル空間

定義：集合 V がベクトル空間 (vector space) であるとは、各要素に対し、スカラー倍と和に関して閉じている：

(i) $\vec{x}, \vec{y} \in V \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in V$

(ii) scalar α, $\vec{x} \in V \Rightarrow \alpha\vec{x} \in V$

線形空間 (linear space) という場合もあり、要素に関して、スカラー倍と和の演算でひとつの閉じた世界をなしている。より広範囲の対象を扱う意味をもたせて、集合に数学的な構造をもつことが基本となっているので、単にベクトルだけではないのです。また、いわゆるベクトルの集まりと実数をスカラーと考えて、高校の数学では、代数学のなかで取り扱いますが、下記に述べるよう、基本構造の概念ですから、非常に広い範囲を対象としています。多項式の集まりや行列の集まりもベクトル空間とみなして、解析を考えることもあります。スカラーも複素数を取り扱うこともこれからでてきます。ベクトル空間という、座標が定まっていて、平面や空間での解析にも使いましたが、出発点としてはこれをイメージしていいのですが、広い応用をもつことも頭にいれておきましょう。

集合の要素には２つの演算：“和”と“スカラー倍という積”が定められているとします。

定義： ２つの部分空間 V, W があるとき、包含関係

$$W \subset V \Leftrightarrow \text{if}\, \vec{x} \in W,\, \text{then}\, \vec{x} \in V$$

を満たすとき、W を空間 V の部分空間 (subspace) という。

定義：ベクトルの組 $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}\}$ が 一次独立 (linearly independent), あるいは 一次従属 (linearly depentend) とは、一次結合 (linear combination):ベクトルをスカラー倍したものの和、$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x_i} = 0$(ゼロベクトル) のとき、(i) スカラーの値がすべての $i = 1, 2, \cdots, n$ で $\alpha_i = 0$ に限るならば、一次独立という、(ii) そうでないときには一次従属という。つまりゼロでないスカラー係数で、ゼロベクトルを作っている場合が一次従属という。この概念は二律背反で、ベクトルの組はいずれかになる。(「すべてがゼロ」の否定は「少なくとも一つがゼロでない」ことに注意）

例えば、

(i) ３次元でのベクトルの組：$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ は一次独立、なぜならば、$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}$ とすると、$\alpha_i = 0, i = 1, 2, 3$ に限るから。簡潔にいうと「向きがバラバラで、一次結合では和を原点に持ってこれない」。

(ii) 一次従属の例：$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$ なぜならば、３個ともゼロでないスカラー値で $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 1$ と選んで、$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}$ と一次結合の値がゼロとできるからである。「３番目のベクトルを選んで、和が原点にできる」

定義：ベクトルの張る (spanning)（ベクトルの組が生成する (generating)）空間 W の次元 (dimension) とは、一次独立なベクトルの個数をいう。いいかえると階段行列にした場合、行列の階数に等しい。

記号：ベクトルの組を“鍵かっこ”$\langle \cdots \rangle$ で括ります。組を表すための“波かっこ”$\{, \cdots, \}$ は略すこともあります。dim は次元の dimension の略。個数を表すので、正の整数値をとります。ゼロは原点だけとか、一点のみなどの特別な場合。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad W &= \langle \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}\} \rangle \\ &= \{\alpha_1 \vec{x_1} + \alpha_2 \vec{x_2} + \cdots + \alpha_n \vec{x_n} \,|\, \text{for all scalar}\, \alpha_i, i = 1, 2, \cdots, n\} \end{aligned}$$

(ii) $\dim(W) = k \Longleftrightarrow W = \{\vec{x_i}, i = 1, 2, \cdots, n$ のうちから k 個の一次独立なベクトルで生成される $\}$

2　例題

例題１

(i) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \in W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$　　(ii) $\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix} \notin W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

なぜなら、(i) は連立方程式: $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+3y\\x+4y\end{pmatrix}$ つまり、$\begin{cases} 2 = 2x+3y \\ 3 = x+4y \end{cases}$ において、ゼロでない解 $x = -1/5, y = 4/5$ をもつから、２つのベクトルの一次結合で表すことができるから。(ii) はこのような連立方程式については解なし（存在しない）である。よって一次結合の形にはならない。いいかえると２個の生成するベクトル空間の内部にはなく、外部にあるベクトルである。

例題２ 行列 $A: \begin{pmatrix}3&1&1&2\\2&0&1&1\\3&3&0&3\end{pmatrix}$ にベクトル$\vec{b}: \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$ を加えると $A|\vec{b}: \begin{pmatrix}3&1&1&2&4\\2&0&1&1&3\\3&3&0&3&1\end{pmatrix}$ となり、掃き出しの行操作 $P, P2$、また列操作 $Q, Q2$ を行い、それぞれの階段行列と階数を計算すると

$$A \quad\rightarrow\quad P.A: \begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad P.A.Q: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A|\vec{b} \quad\rightarrow\quad P2.(A|\vec{b}): \begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad P2.(A|\vec{b}).Q2: \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

よって　$\mathrm{rank}(A) = 2$ および $\mathrm{rank}(A|\vec{b}) = 3$ である。したがって

$$\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} \notin W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

「補足１」

種明かしは、空間ベクトル $(x, y, z) = (3, 2, 3), (1, 0, 3), (1, 1, 0)$ の３個に対する関係は

$$3 * x - 3 * y - z = 0$$

であり、残りの $(x, y, z) = (2, 1, 3)$ も同じ関係式を満たすことに注意する。すなわちたとえば、$(x, y, z) = (20, 10, 30)$ や $(x, y, z) = (5, 3, 6)$ であっても、この関係は成り立つ。幾何的にみると、この関係式は３次元空間の平面の方程式であり、この関係を満たすことは同じ平面上にある点（３次元ベクトルの点）を意味する。２個のベクトルを付け加えて 3×6 型行列で

$$A_d: \begin{pmatrix}3&1&1&2&20&5\\2&0&1&1&10&3\\3&3&0&3&30&6\end{pmatrix}$$

とおくと、行の掃き出し計算で

$$P.A_d = P.\begin{pmatrix}3&1&1&2&20&5\\2&0&1&1&10&3\\3&3&0&3&30&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1/2&1/2&5&3/2\\0&1&-1/2&1/2&5&1/2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

よって

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(P.A_d) = 2$$

となり、付け加えた行列の階数がもとの行列と等しい、変化していない。

しかし、$(x, y, z) = (4, 3, 1)$ の場合は、

$$3 * (4) - 3 * (3) - (1) = 2 \neq 0$$

でこの点は、平面上にない。

$$\begin{pmatrix}20\\10\\30\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix}\in W=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

「補足２」上の行列 Ad をよくみると、付け加えた $\vec{c}=\begin{pmatrix}20\\10\\30\end{pmatrix},\vec{d}=\begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix}$ はこの前列から作られたとみなせることがわかる。すなわち $\dfrac{1}{10}\vec{c}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}20\\10\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ 第４列 これは前列の 10 倍（定数倍）をしている。またヤヤコシイが、定数倍とくると、和が考えられる。（第１列）+(第４列)= (第６列) と気がつくかも知れない。

$$\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix}$$

としている。これから、

$$\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}+10\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}20\\10\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\12\\33\end{pmatrix}\in W,\quad \begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix}\in W$$

であることも自明（明らかに成り立つ）な命題です。（たとえば、$23\times(3)+12\times(-3)+6\times(-1)=0$）空間 W は、“条件を満たすベクトル” のスカラー倍や２つの和をつくってもこれらのベクトルは同じ空間の世界に閉じている。

★★★　練習問題　★★★

$\boxed{1}$ 「行列の集まりもベクトル空間！」を示せ。

行列の和、スカラー倍は定められている。大きさ $m\times n$ 型の集まりを M_{mn} とするとき、

(i) $A,B\in M_{mn}\to A+B\in M_{mn}$　(ii) $k:scalar, A\in M_{mn}\to kA\in M_{mn}$

$\boxed{2}$ つぎの連立方程式;

$$\begin{cases} x+2y-4z &= 0\\ 2x-2y+z &= 0\\ 3x-2y &= 0\end{cases}$$

の解は無数に多くの解をもつ不定形である。この解がつくる集合（解集合とよぶ）W は

(i) ベクトル空間をなすことを示せ。（ヒント：２つの解と解を加えるとこれも解となる、解のスカラー倍も解）

(ii) このベクトル空間 W を生成するベクトルはいくつ必要か？またそのベクトル空間をベクトルで表せ。
(ヒント：方程式の個数（本数）と不定形の解を表す任意定数の個数、あるいは係数行列の階数)

$\boxed{3}$ つぎのベクトルの組が (i) 一次独立となる a の条件と (ii) 一次従属となる b の条件をもとめよ。

(i) $\left\{\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$　　(ii) $\left\{\begin{pmatrix}b\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\boxed{4}$ M_{22} の部分空間：$Z=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{array}{l}a+3b-c-5d=0,\\2a+6b-3c-14d=0\end{array}\right\}$ とするとき、Z を生成するベクトルの組（２つの行列）を求めよ。

ヒント：$\begin{cases}a+3b-c-5d=0,\\2a+6b-3c-14d=0\end{cases}$ を解くと、$\begin{cases}a+3b-d=0,\\c+4d=0\end{cases}$ となるから、$a=-3b+d, c=-4d$

これから $Z = \left\{ \begin{pmatrix} -3b+d & b \\ -4d & d \end{pmatrix} \;\middle|\; -\infty < b, d < \infty \right\} = \left\{ b \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; -\infty < b, d < \infty \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ となる $x_i, y_i, z_i, w_i, i = 1, 2$ が求めるもの。

(以上)