★★★ 練習問題 ★★★

$\boxed{1.1}$ 平面に四辺形 $ABCD$ があり、それぞれの座標が $A(-4,-1), B(2,2), C(4,5), D(x,y)$ である。

(i) D の座標を定めよ。
(ii) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$, $\vec{d}=\overrightarrow{DA}$ とおくとき、$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ を計算せよ。(順序に注意！)
(iii) AC と DB との交点の座標をもとめよ。

【解】ベクトルを縦に書くと、$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-(-4)\\2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$

同様に $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-(-4)\\5-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$

点 $D(x,y)$ とおくと、$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

したがって $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ だから、

$\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$ より、$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-6-4\\6-3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ $\quad\therefore\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$

点 $E(z,w)$ とおく。$\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$ $\therefore\begin{cases}z+4=4\\w+1=3\end{cases}$

すなわち $E(0,2)$ である。

グラフ用紙に図を書いてみても得られます。

$\boxed{1.2}$ $A=(2,2), B=(8,2), C=(6,6)$ とし、$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CA}$ とおく。

(i) それぞれの頂点の内角 $\angle A, \angle B, \angle C$ をもとめ、和が π であることを確かめよ。(内角の和が 180°)
(ii) 三角形の重心の座標を G とするとき、 $\dfrac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}}{3}$ であることを示せ。
(iii) $D=(6,2)$ とすると、CD は AB と直交することを内積の計算で示せ。

ヒント：余弦の定理で各頂点の角度を $\angle A, \angle B, \angle C$ を

$$\cos\angle A=\frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|}$$

で求め、$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ で正弦値（角が鋭角）を定める。$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ で、正接も求められる。三角形の内角の和が π となることは、３つの角を $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ として

$$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1$$

も確かめるとよい。

加法定理 $\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$, $\sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$ などを 3 個に（2 個を繰り返す）もちいる。

重心は各頂点の対辺の中点を結ぶと、交点は $2:1$ となります。この比の値は、メネラウスの定

理から導かれるのですが、これが既知として、内分比のベクトル計算をみてください。またメネラウスの定理はどの三角形を切り取る直線は何か、考えてみましょう。

【解】辺の長さは絶対値から $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} 8-2 \\ 2-2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2+0^2} = 6,\ |\vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} 6-8 \\ 6-2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = 2\sqrt{5},\ |\vec{c}| = \left|\begin{pmatrix} 2-6 \\ 2-6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2} = 4\sqrt{2}$

(確かめ：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \begin{pmatrix} 6-2-4 \\ 0+4-4 \end{pmatrix} = \vec{0}$)

内積は $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 6\times(-2)+0\times 4 = -12,\ \vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = (-2)\times 4 + 4\times(-4) = -24\ \vec{c}\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = (-4)\times 6 + (-4)\times 0 = -24$ であるから、

余弦定理から内角とするから、絶対値をとると、$\cos\angle A = \dfrac{|-12|}{6\cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\angle B = \dfrac{|-24|}{4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}},\ \cos\angle C = \dfrac{|-24|}{2\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\boxed{1.3}$ つぎのベクトルの組 $\{\vec{a},\vec{b}\}$ について、内積とそのなす角をもとめよ。

(i) $\vec{a} = (1,3), \vec{b} = (4,2)$

(ii) $\vec{a} = (1,2), \vec{b} = (1,-3)$

(iii) $\vec{a} = (1+\sqrt{3},2), \vec{b} = (1-\sqrt{3},1)$

【解】(略)

(★研究課題)

$\boxed{1.4}$ ある直線 $y = ax$ に関して、点 $A(a_1,a_2)$ の鏡像が点 $B(b_1,b_2)$ であるとは、直線を鏡とみなしてちょうど反対側に点 B がその位置になることをいう。直線と点 A を与えられたとして、B を定める式とかんがえよ。（ヒント：距離が等しく、直線とは結んだ線分が直交する条件から定めてみよ。また、直線を $ax+by=c$ であるとき、どうなるだろうか？）

【解】(後半の部分で述べる。基本は、平行移動、回転と直交の行列をもちいた概念)