1　行列の対角化

1.1　相似な行列

n 次正方行列 A, B に対して、

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}AP = B, \ (P : \text{nonsingular, 正則}) \leftrightarrow AP = PB$$

となる正則行列 P があるとき、A と B は相似 (similarity transformation) であるという。$A = PBP^{-1}$ としても同じですが、交換律に注意。

三角形の図形でも相似という概念がありました。対応する角度が等しいことで、この条件があれば、対応する辺の長さの比率が同じになりました。比率、すなわち三角比が図形に対する本質的な形を定めていることを抽出しています。これと同じと考えて理解してみましょう。

例 1　フィボナッチ数列はよく知られています。定義は $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n = 1, 2, 3, \cdots, (F_0 = 0, F_1 = 1)$ で、つまり

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55, \cdots$$

一般式 (Binet formula) は $F_n = \dfrac{\phi^n - \phi^{-n}}{\sqrt{5}}$、黄金比 (Golden ratio) $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ も知られていますね。変換式として

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

行列の相似をもちいて、$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P$ とできるならば、$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P$ と簡単にできます。この変形を対角化といい、行列の固有値を計算して求められます。練習問題を参照。

例 2　2 つの行列 A, B と、これに伴うある正則行列 P を与えます。これについて相似の階数や行列式などの計算を例として挙げます。

$$A = \begin{pmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix})$$

これらに対して、つぎの計算をしましょう。

(1) まず逆行列は $P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ となります。復習の計算をしてみましょう。

(2)　つぎに $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B$ を示して、したがって $A \sim B$ が証明できます。

(3) さらに行列式は $\det|A| = 3$, $\det|B| = 3$ と計算されて、階数も $\text{rank}|A| = 3$, $\text{rank}|B| = 3$, が成立します。

(4) 行列から定められた 3 次の多項式 $\psi_A(x) = \det\left|A - xE\right| = \det \begin{vmatrix} -13-x & -8 & -4 \\ 12 & 7-x & 4 \\ 24 & 16 & 7-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 5x - 3$

となります。ここで E は 3 次単位行列。$\det\left|A - xE\right|$ では対角成分にマイナスの係数が並ぶので $\det\left|xE - A\right|$ と定めることもありますが、固有値を定める方程式に違いは起こりません。

(5)　もう一方の行列 B については、$\psi_B(x) = \det\left|B - xE\right| = \det\begin{vmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix}$ も展開してみると、同じ多項式が得られ、これを行列の**固有多項式** (eigen polynomial) あるいは**特性多項式** (characteristic polynomial) といいます。この多項式をゼロにする値、方程式 $\psi_A(x) = 0$ あるいは 同じ方程式で $\psi_B(x) = 0$ の解が**固有値** (eigen value) です。固有ベクトルは固有値に対応するものですが、つぎの例で述べましょう。複素数解とか、重複解などになることもありますし、5 次以上の次数が高次の場合には、解の公式がありませんから（ガロアの定理、アーベルの定理)、とても面倒になります。当然、方程式にも複素数を係数とする場合がでてきます。それでなくても 3，4 次でも一般にはたいへんですよね。数値計算のプログラミング等を利用することになります。

(6)　有名な定理で行列のべき乗計算などにつかう、**ハミルトンの定理** (Hamilton) とは、固有多項式は実数係数で、整数あるいは分数とする方程式ですが、この変数値のもとの行列を代入します。 変数には $x^n \mapsto A^n, n = 1, 2, \cdots$、定数は $c \mapsto cE = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ とすると、上の求めた (4) の場合では多項式 $\psi_A(x)$ と $\psi_B(x)$ から、「3×3 の行列」の関係式として

$$-A^3 + A^2 + 5A - 3E, \qquad -B^3 + B^2 + 5B - 3E$$

とともに同じ式ですが、これがゼロ行列: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ という結果になります。ですから、$A^3 = A^2 + 5A - 3E = \begin{pmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{pmatrix}^2 + 5\begin{pmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ という行列計算ができるという定理です。確かめてみましょう。もちろん行列計算を B についても行ってみましょう。

1.2　相似行列の性質

n 次正方行列が $A \sim B$ であるとき、P を正則な行列とする。

まとめ：

(1)　$\det|A| = \det|P^{-1}AP| = \det|B||$

(2)　$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$

(3)　$\psi_A(x) = \det|A - xE|$ として　$\psi_A(x) = \psi_{P^{-1}AP}(x) = \psi_B(x)$

(4)　$\psi_A(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 \Rightarrow c_0A^3 + c_1A^2 + c_2A + c_3E = 0$(ゼロ行列)

2　行列の固有値、固有ベクトル

与えられた A から、対角行列 $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ さらに正則行列 $P = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$,（$\overrightarrow{x_i} = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$）をどう定めるのか？これが固有値 λ_i、固有ベクトル $\overrightarrow{x_i}$ に対応する。

☆三角形の面積は底辺と高さで定まる。形が異なっても底辺と高さが同じであれば、同じ面積となる。行列の値が異なっても相似であると、行列を特徴づける階数、行列式などが同じ値であることに注意。

定義：成分（要素）を複素数 $\mathbb{C}$ としたベクトル空間 V の線形変換 f において、

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \qquad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

を満たすとき、$\lambda \in \mathbb{C}$ を f の**固有値** (eigen value) といい、$\vec{x}$ を λ に対する f の**固有ベクトル** (eigen vector) という。また

$$W_\lambda = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$$

を λ に対する写像 f の**固有空間** (eigen space) という。

定理：(i) ベクトル空間 V 上の線形写像 f と、この線形写像の表現行列 A_f とするとき、写像 f の固有値と行列 A の固有値は一致する。（注）基底の取り方によらず、固有多項式は一致するから、したがって固有値も同じ値である。(ii) 対角化可能 (相似を関係づける正則行列の存在) のための必要十分条件は

$$\dim(W_{\lambda_i}) = n_i, n = n_1 + \cdots + n_r, \text{固有値の重複度の和が全体となる}$$

線形写像の $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ の表現行列で表されるとき、固有値 λ と対応する固有ベクトル $\vec{x}_\lambda$ は $A\vec{x}_\lambda = \lambda\vec{x}_\lambda$ であるから、$(A-\lambda E)\vec{x}_\lambda = 0$ という非同次形の連立方程式となるから、係数部分での $\det|A-\lambda| = 0$ から、多項式の解として λ を定め、それぞれの解をもとの関係式に代入して固有ベクトルを決める。不定形 (無数に多くの解) の中から、正規化（ノルムを 1 に）あるいは整数となるものを選び、これを固有ベクトル $\vec{x}_\lambda$ とする。固有値は方程式の解として定まるが、固有ベクトルのほうは選択によって異なるが、生成する次元は一定であることに注意する。

[補足] 数式処理 (Maxima, wxMaxima) をもちいると、過程を簡潔な答えが出力されますが、その結果を説明しておきます。確認のために使用してみてください。この問題だけでなく、参考書の問題や WEB に掲載されている問題等の試行をしてみると、実際の筆記計算との比較で利用できます。面倒な計算は計算力を高めることになりますが、無駄な努力も時間の無駄かも知れません。

ベクトルの入力	[カンマ区切りの行ベクトル]
行列 (matrix) の入力	行列名:matrix([第 1 行], [第 2 行], [第 3 行],...)；
行列式 (determinant)	determinant(行列名)；
逆行列 (inverse)	invert(行列名)；
転置 (transpose)	transpose(行列名)；
階数（rank）	rank(行列名)；
行列の（ドット）積、内積	(行列名).(行列名) A.B;
べき乗 (n 乗)	（行列名）^^n;
固有値 (s を付ける)	eigenvalues(行列名)；
固有ベクトル	eigenvectors（行列名）；
特性多項式	charpoly(行列名、変数)；
数式の展開	expand(数式)；
因数分解	factor（多項式）；
和、差、積、割算 (分数計算)	+ , -, * , /

★★★ 練習問題 ★★★

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ とするとき、(i) $(A-3E)\vec{x} =$ を解け。 (ii) $(A-5E)\vec{x} = 0$ を解け。E は 2 次単位行列。(iii) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき、$AP = PB$ を示せ。(iv) 行列 P は上の連立方程式からどう作られたか？ (v) A,B の行列式が等しいことを示せ。

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求めよ。

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ に対して、$A \sim B$ となる対角行列 $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ と正則行列 $P = (\vec{x_1}, \vec{x_2})$ をもとめよ。

$\boxed{4}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 3 \\ -3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ に対し、固有多項式 $\psi_A(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ を示し、A^{10} を求めよ。

★★★ 答え

($\boxed{1}$ 答え）この問題は、固有値が $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5$ を求めることであり、それぞれの固有空間は、$W_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる。次元の和が 2 で対角化可能であり、連立方程式（不定形の解が無数に多くなる場合）の解として $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすれば、これから、正則行列 $P; AP = PB$ あるいは $A = PBP^{-1}$, $B = P^{-1}AP$ が成り立つ。A と相似な対角行列 B が求められた、すなわち対角化をすることができた。

($\boxed{2}$ 答え）固有多項式は $\psi_A(x) = (x-1)(x-3)$ となり、固有値 $\lambda_1 = 1$ に対して、固有ベクトル $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$, $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}$, ここで $(c \neq 0)$ を得る。

（補足）$W_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ であるから、$\dim(V) = 2 = W_{\lambda_1} \oplus W_{\lambda_2} = 1 + 1$ を満たすから、対角化することができる。

($\boxed{3}$ 答え）固有値、固有ベクトルを計算する、とくに固有ベクトルは任意定数 c の値を適切に選ぶ。

$A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, から固有多項式を解いて、固有値 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$, を求める。つぎは各固有値に対して、連立方程式 $\det \begin{vmatrix} 8 - \lambda x & -10 \\ 5 & -7 - \lambda x \end{vmatrix} = 0$ の解（不定形で任意定数をふくむ）から、たとえば、$\lambda_1 = 3$ に対し、$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 2$ に対し、$\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし、$P = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ となり、確かめると
$A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

($\boxed{4}$ 答え）3 次行列の固有多項式を展開し、$\psi_A(x) = \det \begin{vmatrix} -x & 3 & -2 \\ -2 & -5-x & 3 \\ -3 & -7 & 4-x \end{vmatrix} = x^3 + x^2 + x + 1$. これから、10 乗の計算を $x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$, $x^{10} = x^{4 \times 2 + 2}$ を利用する。すなわち、$A^{10} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(補足) 以上は固有多項式 (特性多項式) を解いてもすべて実数（実数解）しか出てこなかったが、$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ という複素数を要素に表れる場合もある。2 次方程式を解く場合には当然複素解もあるから。これを確かめてみよ。