★★★　練習問題　★★★

$\boxed{1}$ 【線形変換の像】xy 平面 $(\mathbb{R}^2)$ の点 (a, b) は直線 $y = x$ 上にあり、標準基底に関する線形変換 f の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ とする。このとき (a, b) はこの変換でどのような点に移動するか求めよ。

$\boxed{2}$ 【線形変換の核】

$\mathbb{R}^3$ の線形変換は $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) \mapsto \begin{pmatrix} 2x + z \\ x + y + z \\ -4x + 2y - z \end{pmatrix}$ に移す。この変換にもとづく 点 (a, b, c) が、$f(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるとき、点 (a, b, c) の関係を満たす図形をもとめよ。

$\boxed{3}$ 【表現行列】線形変換 f は、点 $(1, -1) \mapsto (2, 3)$, $(2, 1) \mapsto (-1, 0)$ に移る。この変換について、標準基底に関する表現行列を求めよ。

$\boxed{4}$ 【平面に射影するベクトル】$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ の正規直交基底を定め、この空間への射影変換 f の標準基底に関する表現行列 A_f をもとめよ。

ヒント：グラム・シュミットの方法を適用して、2 個のベクトルから正規直交基底 $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ をつくる。$W = < \vec{v_1}, \vec{v_2} >$ であり、$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ から、W への射影 $f(\vec{x})$ は、内積をスカラー倍とした一次結合の式 $f(\vec{x}) = \mathrm{Proj}_W(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{v_1})\vec{v_1} + (\vec{x}, \vec{v_2})\vec{v_2}$ で表される。このベクトル変換において標準基底の対応を求めれば、$A_f = (f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3}))$ で得る。

$\boxed{5}$ 【回転を表す行列】行列を n 乗する関係式：$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$ が成り立つ。これは 2 次元ベクトル空間において、原点を中心として角度 θ 回転を表す線形変換の表現行列から明らかである（証明不要)。

この関係式をつぎの場合に計算し、三角関数の加法定理を確認せよ。

(i) $n = 2$ の場合　(ii) $n = 3$ の場合　(iii) $n = -1$(逆行列) の場合

★「補足 1」角度を α と β とし、その表現行列の積が $\alpha + \beta$ の加法定理となる。この意味は「線形写像の合成が表現行列の積に対応する」ことである。また合成関数の微分が、それぞれの微分の積に等しい。

「補足 2」複素数 $i = \sqrt{-1}$(虚数単位) をもちいたオイラー・ド=モアブルの公式 (複素数の指数関数 $w = e^z$)：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta}$$

を調べよ。