連立方程式　ガウスの消去法

目次

1　連立方程式

鶴亀算（中国の数学書『孫子算経』にある、「雉兎同籠」が始まりとされる。それが江戸時代におめでたい動物とされるツルとカメに置き換えられて、この名前になった。`https://ja.wikipedia.org/wiki/`）

(1) 鶴と亀がいます。鶴は足が２本、亀は足が４本です。合わせた頭数は１４匹、足の数は４４本です。鶴は何羽、亀は何匹いるのでしょうか？（出典：中学受験の算数教室）

(2) 鶴と亀が合わせて 32 頭います。それぞれの足の和は 94 になるとき、鶴と亀は何頭ずついるでしょうか？（鶴は足 2 本、亀は足 4 本です）（出典：和算ナビ）

(3) ツルとカメが合わせて 8 匹、足の数が合わせて 26 本であるとき、ツルとカメは何匹（何羽）いるか。ただしツルの足は 2 本、カメの足は 4 本である。（出典：wikipedia/鶴亀算）

【解法１】（小学生で教える中学受験から算数問題）鶴亀算の一般的な解法に「とりあえず全部をツルであるとする」方法がある。これに従って例題を解くと、

8 匹すべてがツルであるとすると、足の数は全部で 2 × 8=16 本となる。これは実際の本数に比べて 26-16=10 本少ない。この 10 本の差を、ツルとカメを交換する操作によって補う（つまり、ツルを一羽ずつ減らし、カメを一匹ずつ増やしていく）。この操作を行う度に、ツルとカメの足の本数の差つまり 4-2=2 本ずつ、足の数が増えていく。10 本の差を埋めるには、10 ÷ 2=5 回この操作をすればよい。すると 8 匹のうち 5 匹がカメに置き換わり、8-5=3 匹はそのままとなる。したがって、ツルは 3 匹、カメは 5 匹となる。【別解法】として、面積の計算として解くこともよく知られている。

【解法２】（中学生に教える数学問題）鶴亀算は、中学校の数学における連立方程式の初歩的な問題にあたる。一般的に、x をツルの数、y をカメの数、a をツルとカメの個体数の総和、b を足の本数の総和とおくと、

$$\begin{cases} x+y=a \\ 2x+4y=b \end{cases}$$

の２元１次連立方程式で表される。

変数の消去法（あるいは代入法）(ひとつの方程式に適当な係数をかけて、もう一方の係数と同じ係数にそろえ、引き算によって、方程式に含まれる変数を減らす。代入法では、消去したい変数を左辺に移項して、係数が１となるようにして、もう一方の方程式に代入する。)

【wxMaxima】(Windows, Ubuntu Linux, free soft) Maxima（マキシマ）は、LISP で記述された数式処理システムである。GNU GPL に基づくフリーソフトウェアであり、現在も活発に開発が続けられている。Maple や Mathematica などの商用の数式処理システムと比べても遜色のない機能を持っている。

(% i1) solve([2* x + 3* y =a], [x]);

$$[x = -\frac{3y-a}{2}] \qquad (\%\ o1)$$

(% i2) solve([2*x + 4*y = 44, x+y=14],[x,y]);

$$[[x = 6\,, y = 8]] \qquad (\%\ o2)$$

(% i3) solve([2*x+4*y=94,x+y=32],[x,y]);

$$[[x = 17\,, y = 15]] \qquad (\%\ o3)$$

【Mathematica】Mathematica（マセマティカ）は、スティーブン・ウルフラムが考案し広く使われている数式処理システム。ウルフラム・リサーチの、ウルフラムが率いる数学者とプログラマのチームが開発し、同社の正規認定販売代理店により販売されている。(注：通常の教育としては、分野は広く、性能も高いが価格も！)

Solve[$\{x + y == a, 2x + 4y == b\}, \{x, y\}$]

$\{\{x \to \frac{1}{2}(4a-b), y \to \frac{1}{2}(-2a+b)\}\}$

2 基本変形、消去法

http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~yasuda/Chiba/Lec/senkeiK/rennritu-ma33U8.pdf

基本変形の行列　$n \times m$: n 行、m 列の行列　$\{a_{ij}; 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$

行列 $A = (a_{ij})$ から $B = (b_{ij}) = PA$ へと操作行列 P をもちいて、左側から積演算をおこなう：

(i) p 行を k 倍する $\Leftrightarrow b_{p\cdot} = ka_{p\cdot}$

(ii) p 行 + q 行 $\times k \Leftrightarrow b_{p\cdot} = a_{p\cdot} + a_{q\cdot} \times k$; pivot a_{pq}, $k = \dfrac{-1}{a_{pq}}$

(iii) p 行と q 行の行交換（並び変え） $\Leftrightarrow b_{p\cdot} = a_{q\cdot}, b_{q\cdot} = a_{p\cdot}$

3 階段行列

つぎの操作はガウスの消去法における連立方程式の解法に関連する。

(% i1) A:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad (\%\ o1)$$

(% i4) echelon(matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]));

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\%\ o4)$$

操作の説明：

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} r_1 = [1,2,3] \\ r_2 = [4,5,6] \\ r_3 = [7,8,9] \end{cases}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} r_4 = r_1/a_{11} = [\boxed{1},2,3] \\ r_5 = r_2 + r_4 \times (-4) = [4,5,6] + (-4) \times [1,2,3] = [0,-3,-6] \\ r_6 = r_3 + r_4 \times (-7) = [7,8,9] + (-7) \times [1,2,3] = [0,-6,-12] \end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} r_7 = r_4 = [1,2,3] \\ r_8 = r_5/(-3) = [0,-3,-6]/(-3) = [0,\boxed{1},2] \\ r_9 = r_6 + 6 \times r_8 = [0,-6,-12] + 6 \times [0,1,2] = [0,0,0] \end{cases}$$

4 Gause による解法

つぎの連立方程式を解け。$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 4x + 5y + 6z = b \\ 7x + 8y + 9z = c \end{cases}$

階段行列に変形数操作により $\begin{cases} x & +2y & +3z & = a \\ & y & +2z & = \dfrac{4a-b}{3} \\ & y & +2z & = \dfrac{7a-c}{6} \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x & +2y & +3z & = a \\ & y & +2z & = \dfrac{4a-b}{3} \\ & & 0 & = a-2b+c \end{cases}$

最後の式は $(4a-b)/3 - (7a-c)/6 = 0$ より得る。

解は

(i) $a - 2b + c \neq 0$ のとき、解なし。

(ii) $a - 2b + c = 0$ のとき、 t を任意定数とし、

$$\begin{cases} z = t \\ y = \dfrac{4a-b}{3} - 2t = \dfrac{4}{3}a - \dfrac{1}{3}b - 2t, \\ x = a - 2\left(\dfrac{4}{3}a - \dfrac{1}{3}b - 2t\right) - 3t = -\dfrac{5}{3}a + \dfrac{2}{3}b + t, \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3}a + \dfrac{2}{3}b + t, \\ y = \dfrac{4}{3}a - \dfrac{1}{3}b - 2t, \\ z = t \end{cases}$$

★★★　練習問題　★★★

$\boxed{\text{問 1}}$ 連立方程式が解をもつ（解なしでない場合、すなわち (i) 無数に多くの解をもつ場合と (ii) 一意解をもつ場合）ためには、定数にどんな関係があればよいか？（ヒント：階段行列への式変形を述べよ）

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = a \\ 2x + 2z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases}$$

（答え） $a - b/2 - c = 0$

$\boxed{\text{問 2}}$ つぎの連立方程式は無数に多くの解をもつ場合であることを示し（掃き出し計算の過程を述べる）この解に含まれる任意定数の個数はいくつ必要か？

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3w = 1 \\ 4x + 2y - 4z + 5w = 3 \\ 2x + y - 3z + 2w = 2 \\ 2x + y + z + 4w = 0 \end{cases}$$

（答え） 2 個