ベクトル空間の基底と次元（その１）

1　ベクトル空間の基底

ベクトル空間を V とすると、各要素に対し、スカラー倍と和が定義されており、閉じた世界つまり、(i) $\vec{x}, \vec{y} \in V \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in V$ (ii) scalar α, $\vec{x} \in V \Rightarrow \alpha\vec{x} \in V$ という条件を満たしていました。より広範囲の対象を扱えるのは、このような少ない条件を満たすものであれば、ベクトル空間としての性質や計算をすることができるからです。これからは複素数 (complex number) を取り扱う場合もでてきますし、内積、行列などの要素（成分）は実数ではないこともあります。ベクトルの１次独立、生成する空間という概念から、空間の基底と次元の定義をします。

定義：ベクトル空間 V において、ベクトルの組 $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_{n-1}}, \overrightarrow{a_n}\}$ が基底 (base) あるいは基 (base) とは,

(i) ベクトルの組が一次独立 $\leftrightarrow c_1\overrightarrow{a_1} + c_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + c_{n-1}\overrightarrow{a_{n-1}} + c_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0} \to c_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n-1, n$

(ii) 空間 V を生成する（張る）$\leftrightarrow V = \langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_{n-1}}, \overrightarrow{a_n} \rangle$

2　基底のいろいろ

最初に標準基底 (standard base) を定義します。いままで習ってきたものがいわゆるこの基底なのです。実数が値としてスカラーとするから real の R から、その書体 $\mathbb{R}$ とします。２，３次元の**標準基底**とは, ベクトル空間も $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ と表し、

$$\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

より明確に書くと、任意のベクトルが一次結合の形で

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

となり、ベクトルの和、スカラー倍がはっきりしています。２つのベクトルの組 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ が一次独立であることの性質も

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = 0 \,\&\, k_2 = 0$$

なども明らかです。この関係を一般化した**基底**とは、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

となるならば、

$$\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

上で選んだ基底の組 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ は、無数に多くの選び方、ベクトルの組を選ぶことができます。しかし構成する個数は限られています。今の場合は 2 個です。これが次元と定義します。異なった基底の組にはどんな関係があるのでしょうか？初めに与えられたベクトル空間における関係、つまりその構造はどう表現されるのでしょうか？これらを考えていきます。

3　内積（スカラー積）と外積（ベクトル積）

3次元ベクトルでは、$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ が2項演算として、内積と外積が定義されます。

3.1　内積

内積（ドット積、スカラー積）は、ドットあるいは丸かっこなどを使い、

$$\vec{x}.\vec{y} = (\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos\theta$$

とします。ベクトルのノルム（大きさ）$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, |\vec{y}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$、また θ はベクトルのはさむ角。もしスカラーが複素数であれば、complex から書体として $\mathbb{C}$ とします。共役複素数 (conjugate complex) $z = x + iy$ から $\overline{z} = x - iy$ とか、絶対値 $|z|^2 = z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$ をもちいます。複素数での内積は、共役複素数を使い、

$$(\vec{z}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + z_3\overline{w_3}$$

複素数では、積の順序を変えると、内積の値は共役数の関係となります。なぜならば、共役を繰り返すと $z = \overline{(\overline{z})}$, また $z\overline{w} = \overline{\overline{z}w}$ の関係から

$$(\vec{z}, \vec{w}) = \overline{(\vec{w}, \vec{z})} \Leftrightarrow z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + z_3\overline{w_3} = \overline{w_1}z_1 + \overline{w_2}z_2 + \overline{w_3}z_3 = \overline{w_1\overline{z_1} + w_2\overline{z_2} + w_3\overline{z_3}}$$

となりからです。

内積はいろいろな分野に表れます。有名な不等式；Cauchy-Schwarz

$$|\vec{x}.\vec{y}|^2 \leq (\vec{x}.\vec{x})(\vec{y}.\vec{y}) = |\vec{x}|^2\,|\vec{y}|^2$$

この関係式は $\cos^2\theta \leq 1$ より、$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 = |\vec{x}|^2\,|\vec{y}|^2\,\cos^2\theta \leq |\vec{x}|^2\,|\vec{y}|^2$ すなわち

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$$

ですから、内積の大きさをそれぞれのベクトルのノルムで評価しています。数列や積分式に関するこの不等式も覚えているでしょう。

3.2　外積

外積（ベクトル積、クロス積）は、ベクトル解析、物理学でよく用いられます。3次元の実数 $\mathbb{R}$ をスカラーとする、3次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の場合を定義します。内積に対して、外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の値は3次元ベクトルです。2つのベクトルが作る平面 $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ の法線ベクトル（垂直、もとのベクトルとは直交する）で、その大きさ (ベクトルの長さ)

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$$

(ここで θ はベクトルのはさむ角) とします。これは平行四辺形の面積を表し、2つのベクトルの面積を大きさとするからです。その成分を具体的に表すと多少複雑です。ここでは2次正方行列からの行列式を用いて表しましょう。3行2列の行列から、(i)　1行目を取り除いた行列式 (determiant) $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$, を使い（これを要素 (1,1) の余因数という)、(ii)　2行目は要素（1,2）の余因数、$(-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = (-1)(a_1b_3 - a_3b_1)$, (iii)　3行目は要素 (1,3)

の余因数 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_1 b_2$ とします。まとめて

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ (-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ (-1)(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と定義します。定義ですから、この覚えておきましょう。ノルムは

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2}$$

となります。

3.3 内積、外積の性質

(i) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$ (直交、垂直のとき) (ii) $\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (平行のとき)

(iii) $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k\vec{b})$ (iv) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(v) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ (vi) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$

上のうち (v) を証明してみます。左辺を計算しましょう。かっこは計算の順序を示しますから、$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ (-1)(b_1 c_3 - b_3 c_1) \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$ がはじめです。これと $\vec{a}$ との外積ですから、$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ (-1)(b_1 c_3 - b_3 c_1) \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$ を計算しますが、結果は３次元のベクトルです。

(i) 第１行成分は

$$\begin{aligned} & a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3(-1)(b_1 c_3 - b_3 c_1) \\ = \ & (a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 - (a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1 \quad \because b_1, c_1 \text{で括る} \\ = \ & (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1 \because a_1 b_1 c_1 \text{をキャンセルできるよう加える} \\ = \ & (\vec{a}.\vec{c}) b_1 - (\vec{a}.\vec{b}) c_1 \quad \because \text{内積の定義} \end{aligned}$$

(ii) 第２行成分は同様に

$$\begin{aligned} & (-1)\{a_1(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3(b_2 c_3 - b_3 c_2)\} \\ = \ & (a_1 c_1 + a_3 c_3) b_2 - (a_1 b_1 + a_3 b_3) c_2 \because b_2, c_2 \text{で括る} \\ = \ & (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_2 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_2 \because a_2 b_2 c_2 \text{をキャンセルできるよう加える} \\ = \ & (\vec{a}.\vec{c}) b_2 - (\vec{a}.\vec{b}) c_2 \because \text{内積の定義} \end{aligned}$$

(iii) 第３行成分では

$$\begin{aligned} & a_1(-1)(b_1 c_3 - b_3 c_1) - a_2(b_2 c_3 - b_3 c_2) \\ = \ & (a_1 c_1 + a_2 c_2) b_3 - (a_1 b_1 + a_2 b_2) c_3 \because b_3, c_3 \text{で括る} \\ = \ & (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_3 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_3 \because a_1 b_1 c_1 \text{をキャンセルできるよう加える} \\ = \ & (\vec{a}.\vec{c}) b_3 - (\vec{a}.\vec{b}) c_3 \because \text{内積の定義} \end{aligned}$$

これらをまとめると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ (-1)(b_1 c_3 - b_3 c_1) \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\vec{a}.\vec{c}) b_1 - (\vec{a}.\vec{b}) c_1 \\ (\vec{a}.\vec{c}) b_2 - (\vec{a}.\vec{b}) c_2 \\ (\vec{a}.\vec{c}) b_3 - (\vec{a}.\vec{b}) c_3 \end{pmatrix} \because \text{２つのベクトルの差に分けると} \\ &= \begin{pmatrix} (\vec{a}.\vec{c})\, b_1 \\ (\vec{a}.\vec{c})\, b_2 \\ (\vec{a}.\vec{c})\, b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\vec{a}.\vec{b})\, c_1 \\ (\vec{a}.\vec{b})\, c_2 \\ (\vec{a}.\vec{b})\, c_3 \end{pmatrix} \because \text{内積はスカラーですから括ります} \\ &= (\vec{a}.\vec{c}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (\vec{a}.\vec{b}) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \because \text{ここまでくれば結果です} \\ &= (\vec{a}.\vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\, \vec{c} \end{aligned}$$

★ Jacobi identity に応用してみることが練習問題にあります。

★★★　練習問題　★★★

つぎの命題を証明しましょう。計算は同じものの繰り返しであれば、省略して構いません。

$\boxed{1}$ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$　※積の順序を変えると符号が変わる、ベクトルは向きが逆になる。外積はベクトルの方向が $\vec{a}$ から $\vec{b}$ に向かって“右ねじ”の進む方向

$\boxed{2}$ 3つのベクトル（$\mathbb{R}^3$ の標準基底）$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと、

つぎが成り立ちます。$\vec{i} \to \vec{j} \to \vec{k}$ の順に注意。同じもの積は $\vec{0}$, 逆にすると符号が反転する。この性質で外積を定義してあるテキストがあります。調べてみましょう。

(i) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$
(ii) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}$
(iii) $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j}$
(iv) $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k}$

$\boxed{3}$ 絶対値の符号をもちいていますから、行列式との区別をします。この理由は裏返しても面積は負の値にはなりません。

$$|\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a})| = |\vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b})| = \left| \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|$$

※3つのベクトルを三辺とする平行六面体の体積であり、順序をかえると符号が変わるが絶対値をとれば、その体積は変わらないから等しい

$\boxed{4}$ $\vec{a}.(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}.(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$　※外積は2つのベクトルからつくり、その値はそれぞれとは直交するような向きをもつ。内積がゼロになります。行列の形でも意味付けられます。

$\boxed{5}$ ヤコビの恒等式 (Jacobi identity): きれいな関係式ですから、計算して味わいます。

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$