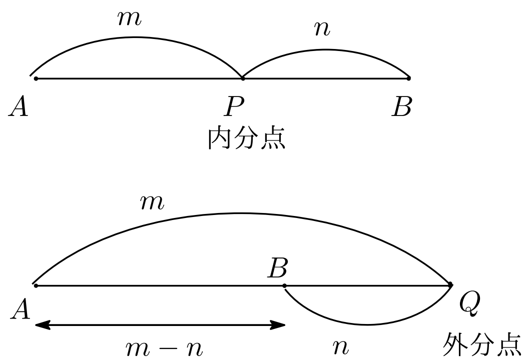
問題 1

外分点と内分点との関係はつぎの図で定められる。内分点の関係式で $P \to B$, $B \to Q$ と置き換え、さらに $m \to m-n$, $n \to n$ と置き換えてとして、$\vec{q}$ を求める。このことから



線分 AB を $m:n$ に**外分** (external division) する点 Q の座標は

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \overrightarrow{OQ} = \frac{-n}{m-n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{-n}{m-n}\vec{a} + \frac{m}{m-n}\vec{b}\end{aligned}$$

であることを示せ。

(解) 原点 $\vec{0}$ から、点 A へのベクトル $\vec{a}$, 点 B へのベクトル $\vec{b}$ とおけば、内分点 P へのベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p} = \frac{n}{m+n}\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b}$$

で与えられる (m, n の順序に注意)。外分点 Q をもとめるには、内分点の P には B が対応するから、$m \to m-n$, $n \to n$, $\vec{p} \to \vec{b}$, $\vec{b} \to \vec{q}$ の対応で入れ替えれば、

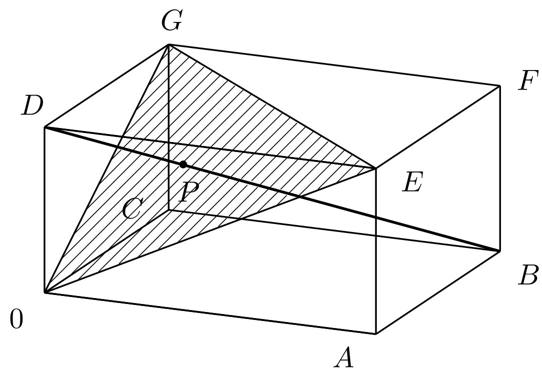
$$\vec{b} = \frac{n}{(m-n)+n}\vec{a} + \frac{m-n}{(m-n)+n}\vec{q} = \frac{n}{m}\vec{a} + \frac{m-n}{m}\vec{q}$$

の形で与えられる。これを変形すると、$m\vec{b} - n\vec{a} = (m-n)\vec{q}$, よって

$$\vec{q} = \frac{(-n)\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

問題 2

直方体において対角線 BD と 3 つの頂点がつくる平面 OEG の交点を P とする。比率 DP : DB を求めよ。



(解) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DG} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{c}$ とおくと、$\overrightarrow{OG} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{a} + \vec{c}$ を得る。これから、$\overrightarrow{DB} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ となる。ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は三角形 △OEG の中にあるから、2 つのベクトル $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OG}$ をもちいて、適当な係数 s,t (スカラー倍) と和で $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OG} + t\overrightarrow{OE}$ の形で表される。ここで $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$, である。よって $\overrightarrow{OP} = s(\vec{c} + \vec{b}) + t(\vec{a} + \vec{c}) = t\vec{a} + s\vec{b} + (s+t)\vec{c}$

となる。一方、P は対角線 DB の上にあるから、この線分の内点となる。ただし内点の比率はまだ分からないから、その係数を k とおき、ベクトル $\overrightarrow{DB}$ を辺の表すベクトルから求めて、$\overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DB} = k(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$ となる k の形となる。これらの 3 つのパラメータ s, t, k は P が一点で定まるから、三角形 △ODP の関係式として $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DO} = 0$, すなわち、$[t\vec{a}+s\vec{b}+(s+t)\vec{c}]+[-k(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})]+[-\vec{c}] = 0$ を整理すると、$(t-k)\vec{a}+(s-k)\vec{b}+(s+t+k-1)\vec{c} = \vec{0}$

$$t-k=0, s-k=0, s+t+k-1=0$$

から, $k+k+k-1=0$, $k=\dfrac{1}{3}$ となる。すなわちノルム（長さ）では $DP : DB = 1:3$ の比率 ($DP : PB = 1:2$ の比率) である。

問題 3

$\vec{p} = (-1, 5, 0)$ を、3 つのベクトル $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (-2, 1, 0)$, $\vec{c} = (2, -3, 1)$ から適当なスカラー係数 s, t, u をもちいて、$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ の形で表せ。

(解) $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ を縦ベクトルで表すと

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

連立の形では

$$\begin{cases} -1 &= s-2t+2u \\ 5 &= -2s+t-3u \\ 0 &= 3s+u \end{cases}$$

これを解く。$s=1$, $t=2$, $u=-3$ が求めるスカラー倍の係数。

問題 4

3 点 $A(3, 2, 1)$, $B(2, 0, -2)$, $C(1, 1, 0)$ の定める平面 ABC 上に点 $P(2, 3, z)$ があるよう z の値を求めよ。(要修正)B をこのように修正してください。

(解) 点 (a, b, c) を通る平面の方程式は $A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$ とおけます。A: $A(x-3)+B(y-2)+C(z-1)=0 \cdots$ ①、B: $A(x-2)+B(y-0)+C(z+2)=0 \cdots$ ②, C: $A(x-1)+B(y-1)+C(z-0)=0 \cdots$ ③ となります。この連立な関係式は $Ax+By+Cz$ が共通の値ですから、① = ②, ① = ③, ① = ③ とおけば、

$$\begin{cases} -3A-2B-C=2A+2C \\ -3A-2B-C=-A-B \\ -2A-2C=-A-B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A+2B+3C=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A-B-2C=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{3}C \\ B=-\dfrac{5}{3}C \\ C=C \end{cases}$$

したがって、$(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 1)$ あるいは $(1, -5, 3)$ が法線ベクトルとなります。求める平面の方程式は式 ① であれば、$A(3, 2, 1)$ を通るから $\dfrac{1}{3}(x-3) - \dfrac{5}{3}(y-2) + (z-1) = 0$ となって、この平面のなかに点 $(2, 3, z)$ を代入して成立すればよいから、$\dfrac{1}{3}(2-3) - \dfrac{5}{3}(3-2) + (z-1) = 0$ から、$z=3$ が求める値です。