空間のベクトル $\vec{a}=(a_1,\, a_2,\, a_3), \vec{b}=(b_1,\, b_2,\, b_3)$ とする。

(1) ベクトルの内積とノルム： $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\ \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$

(2) 空間内に x 軸、y 軸、z 軸を定め、点 P の座標が (a,b,c) であるとき、距離は $\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2}$ であり、始点 A, 終点 B とする有向線分 AB のベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と表し、このノルム (大きさ) を $\mathrm{AB}=|\overrightarrow{AB}|$ と簡潔に表す。2 点 $\mathrm{A}(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3)$, $\mathrm{B}(\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\mathrm{b}_3)$ において、A,B の距離 (distance) を AB と示し,

$$AB=|\vec{b}-\vec{a}|=|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

で与える。

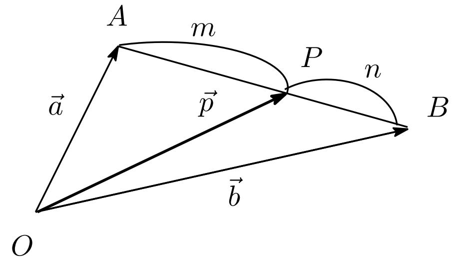
(3) 角の余弦：

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

(4) 内分する点のベクトル：

線分 AB を $m:n$ に**内分** (internal division) する点 P の座標は

$$\vec{p}=\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}=\frac{n}{m+n}\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}$$



(5) 直線の方程式：点 (x_1,y_1,z_1) を通り、**方向ベクトル** (a,b,c) とするときには

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\,(=k)$$

あるいはこの一定の値、定数 k をもちいて

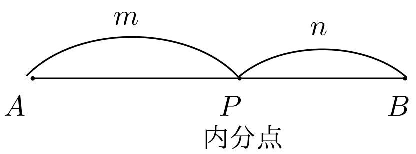
$$\begin{pmatrix}x-x_1\\ y-y_1\\ z-z_1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

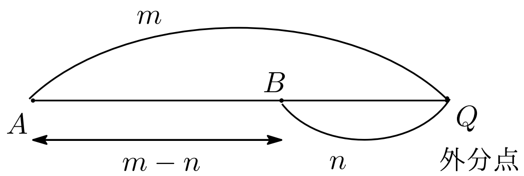
(6) 平面の方程式：点 (x_1,y_1,z_1) を通り、**法線ベクトル** (a,b,c) とするときには

$$a\,(x-x_1)+b\,(y-y_1)+c\,(z-z_1)=(a,b,c)\cdot\begin{pmatrix}x-x_1\\ y-y_1\\ z-z_1\end{pmatrix}=0$$

問題 1

外分点と内分点との関係はつぎの図で定められる。内分点の関係式で $P \to B$, $B \to Q$ と置き換え、さらに $m \to m-n$, $n \to n$ と置き換えてとして、$\vec{q}$ を求める。このことから





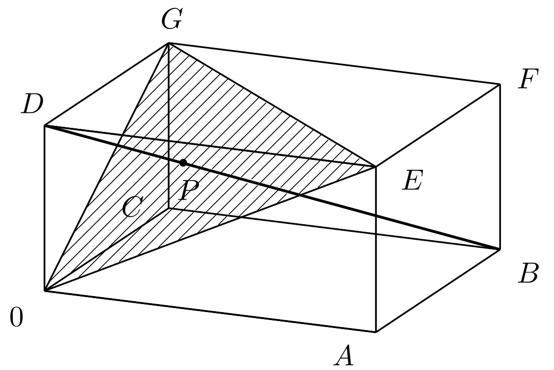
線分 AB を $m : n$ に**外分** (external division) する点 Q の座標は

$$
\begin{aligned}
\vec{q} &= \overrightarrow{OQ} = \frac{-n}{m-n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{OB} \\
&= \frac{-n}{m-n}\vec{a} + \frac{m}{m-n}\vec{b}
\end{aligned}
$$

であることを示せ。

問題 2

直方体において対角線 BD と 3 つの頂点がつくる平面 OEG の交点を P とする。比率 DP : DB を求めよ。



ヒント : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DG} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{c}$ とおくと、$\overrightarrow{OG} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{a} + \vec{c}$ を得る。これから、$\overrightarrow{DB} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ また $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OG} + t\overrightarrow{OE}$ の形である。$\overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DB} = k(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$ となる k の形。これらの関係式 s, t, k から k を求めればよい。

問題 3

$\vec{p} = (-1, 5, 0)$ を、3 つのベクトル $\vec{a} = (1, -2, 3)$,$\vec{b} = (-2, 1, 0)$,$\vec{c} = (2, -3, 1)$ から適当なスカラー係数 s, t, u をもちいて、$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ の形で表せ。

問題 4

3 点 $A(3, 2, 1)$, $B(2, 0, -2)$, $C(1, 1, 0)$ の定める平面 ABC 上に点 $P(2, 3, z)$ があるよう z の値を求めよ。(**要修正**)B をこのように修正してください。