問題 1

つぎの等式を満たす $\vec{x}$ を, $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ。

(1) $3\vec{x} - 4\vec{a} = \vec{x} - 2\vec{b}$　　(2) $2(\vec{x} - 3\vec{a}) = 5(\vec{x} + 2\vec{b})$

(解) (1) $3\vec{x} - \vec{x} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ $\therefore \vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$. (2) $2\vec{x} - 6\vec{a} = 5\vec{x} + 10\vec{b}$, $2\vec{x} - 5\vec{x} = 6\vec{a} + 10\vec{b}$, $\vec{x} = -2\vec{a} - \dfrac{10}{3}\vec{b}$.

問題 2

$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$ のとき、つぎを求めよ。

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値　　(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ

(解) 各ベクトルの成分を $a_i, b_i; i = 1, 2$ などとおく。(1) 条件 $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$ から, $a_1^2 + a_2^2 = 1$. また $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{3}$, $b_1^2 + b_2^2 = 3$. さらに $\sqrt{7} = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 + a_2^2 + b_2^2 - 2a_2b_2}$ より $7 = 1 - 2a_1b_1 + 3 - 2a_2b_2 = 4 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ となるから、$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 - 2$ 。したがって $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\dfrac{3}{2}$ となる。(2) 角の余弦から $\cos\theta = \dfrac{-3/2}{1 \times \sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり、この値は負であるから、角度は鈍角 $\left(\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$, つまり 90^o 以上 180^o 以下である。逆三角関数をもちいると、$\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5}{6}\pi = 150^o$ を得る。

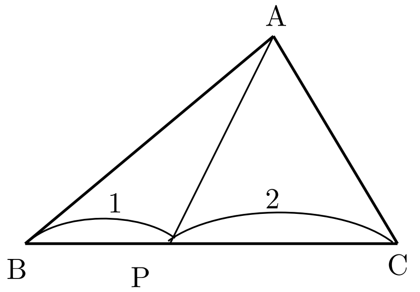
問題 3

平面上に $\triangle$ABC と点 P, Q はそれぞれつぎの関係が成り立っている。このとき、P, Q の位置を図示せよ。

P :　$3\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$　$\cdots$　①

(解)

点 P を定めるために $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおく。三角形 $\triangle ABP$ を考える。ベクトルの定め方から閉じているから、$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PA} = \vec{0} \cdots$ ② である。またもうひとつの三角形 $\triangle ACP$ から、$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PA} = \vec{0} \cdots$ ③ である。条件式 ① を合わせて並べると、



$$\begin{cases} 3\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2\vec{a} + \vec{c} & \cdots \quad ① \\ \vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{PA}} = \vec{0} & \cdots \quad ② \\ \vec{c} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} + \overrightarrow{\mathrm{PA}} = \vec{0} & \cdots \quad ③ \end{cases}$$

この関係式 ①, ② から、$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \dfrac{-1}{3}(\vec{a} - \vec{c})$, 関係式 ①, ③ から、$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \dfrac{2}{3}(\vec{a} - \vec{c})$ を得る。したがって、点 P は同じベクトル $(\vec{a} - \vec{c})$ のスカラー倍が異なるだけであるから、方向が反対向きの同じ直線上に並ぶ。つまり、点 P は辺 BC 上にあり、

$$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}| : |\overrightarrow{\mathrm{CP}}| = \left|\frac{-1}{3}(\vec{a} - \vec{c})\right| : \left|\frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{c})\right| = 1 : 2$$

となっている。つまり、辺 BC を比率 $1 : 2$ に内分する点である。

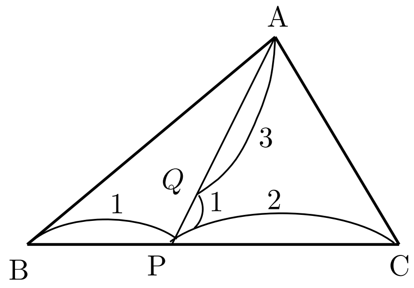
Q :　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BQ}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \mathbf{0}$

(解)

点 Q を定めるために、前問と同様に三角形 $\triangle ABQ, \triangle BQC, \triangle AQC$ を考える。この三角形を定めるベクトルは閉じているから、条件式を加えた 4 つの関係式が成り立っている。

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QA}} = \vec{0} \quad \cdots \quad ① \qquad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{0} \quad \cdots \quad ③ \\ \overrightarrow{\mathrm{BQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{0} \quad \cdots \quad ② \qquad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BQ}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \vec{0} \quad \cdots \quad ④ \end{cases}$$

この ① から、$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = -\vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$. また ③ から、$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \vec{c}$ を得る。これを式 ④ の $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}, \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ に代入すると、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} + 2(-\vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}) + (\overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \vec{c}) = \vec{0}$. $\therefore 4\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 2\vec{a} + \vec{c} = 3\overrightarrow{\mathrm{AP}}$. ここで用いた点 P はベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を辺 BC を $1:2$ に内分する前問の点である。これから、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから、点 Q は AP を $3:1$ に内分する点である。



問題 4

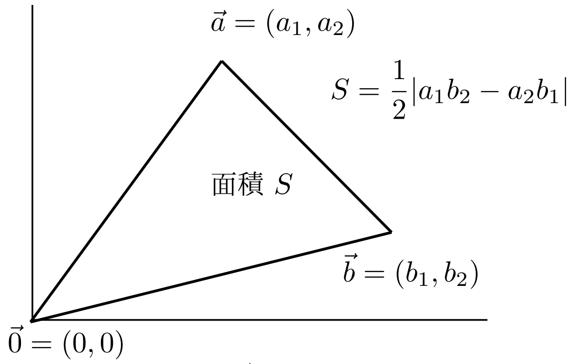
(1)　2 点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ と原点 O のつくる三角形において、$\triangle$OAB の面積は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = \frac{1}{2}\,|a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

となることを示せ。

(2)　3 点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ のつくる三角形において、$\triangle$ABC の面積はどうなるか？

(解) (1)



ベクトルのなす角 θ をもちいると、$S = \dfrac{1}{2}|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ が成り立つから、$S^2 = \dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\sin^2\theta = \dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\left(1-\cos^2\theta\right) = \dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\left(1-\left\{\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right\}^2\right) = \dfrac{1}{4}\left[|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2\right]$ であるから、前半の式が得られた。後半は展開をおこなえば得られる。

(2) では平行移動をおこなう。点 C を原点 $(0,0)$ にすると、点 A は $(a_1 - c_1, a_2 - c_2)$, 点 B は $(b_1 - c_1, b_2 - c_2)$ となるから、$S = \dfrac{1}{2}\,|(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (a_2 - c_2)(b_1 - c_1)|$ となる。

補足： 面積 S は非負であるから、不等号の関係式 $|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$ であり、これはシュワルツの不等式とよばれる。