

ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ とする。

(1) ベクトルの内積とノルム : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2, \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$

(2) 配分法則 : $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

(3) 結合法則 : k はスカラーとするととき、 $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(4) 角の余弦 :

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

問題 1

つぎの等式を満たす \vec{x} を, \vec{a}, \vec{b} で表せ。

(1) $3\vec{x} - 4\vec{a} = \vec{x} - 2\vec{b}$ (2) $2(\vec{x} - 3\vec{a}) = 5(\vec{x} + 2\vec{b})$

問題 2

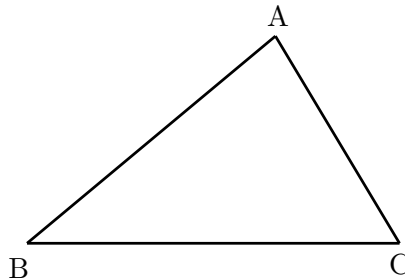
$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$ のとき、つぎを求めよ。

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値 (2) \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ

問題 3

平面上に $\triangle ABC$ と点 P, Q はそれぞれつぎの関係が成り立っている。このとき、 P, Q の位置を図示せよ。

$$P : 3\vec{AP} = 2\vec{AB} + \vec{AC} \quad Q : \vec{AQ} + 2\vec{BQ} + \vec{CQ} = \vec{0}$$



問題 4

(1) 2点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ と原点 O のつくる三角形において、 $\triangle OAB$ の面積は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

となることを示せ。

(2) 3点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ のつくる三角形において、 $\triangle ABC$ の面積はどうなるか?

ヒント : ベクトルのなす角 θ をもちいると、 $S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta, \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ が成り立つ。