

3 線形写像と表現行列

3.3 線形写像

写像 (mapping) とは、関数 (function) が実数の空間を取り扱うことであったが、より広い範囲の集合に対する対応関係を調べる概念として定められる。

集合 U の要素 $x \in U$ から、集合 V の要素 $y = f(x) \in V$ を対応させるとき、

$$f : U \rightarrow V$$

と書く。2つのベクトル空間 V, W での写像 $f : V \rightarrow W$ が線形写像 (linear mapping) であるとは、条件：

$$(i) \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \Rightarrow f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) \in W$$

$$(ii) \forall \mathbf{v} \in V, \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow f(k\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v}) \in W$$

を満たすときをいう。

例題 1

(i) 線形写像である例：平面ベクトルの原点を中心とした時計と反対周りに θ だけ「回転」(rotation) させる対応は線形写像である。

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 :$$

$$\begin{cases} X = x \cos \theta - y \sin \theta \\ Y = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(ii) それぞれの座標の値 a, b ずつを増加 (減少) するような移動 (move, shift) は、線形写像とはならない。

$$\begin{cases} X = x + a \\ Y = y + b \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

基本的には原点が原点に対応しなければならないから。平行移動では原点对応になっていない。

問 1

回転を表す公式は、三角関数の加法定理:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

で求められる。これを示せ。

ベクトル空間 V から W への線形写像について、写像の表現行列 (representational matrix) とは n 次ベクトル空間 V の基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, m 次ベクトル空間 W の基底 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$ に関して、

$$(f_A(\mathbf{v}_1), f_A(\mathbf{v}_2), \dots, f_A(\mathbf{v}_n)) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) A$$

の形に表されるとき。この行列 $m \times n$ 型 A を写像の表現行列という。ただしそれぞれの空間の基底ベクトルのとりかたに依存するから、“基底ベクトル…に関する表現行列”とよぶことに注意す

る。また写像 f_A にインデックス A を付けている理由は、その与えられた写像から、その係数として行列 A が定まるからという意味です。

基底が与えられたとき、空間内のベクトルを表す係数を調べる。空間 \mathbb{R}^2 であるとき、基底ベクトルが標準基底 $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であれば、与えられたベクトルが $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ となるが、もし別の基底として、 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ が与えられたならば、スカラー α, β の係数を $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ となるように選ぶから、この関係式 $\begin{cases} a_1 = 1 \cdot \alpha + 3 \cdot \beta \\ a_2 = 2 \cdot \alpha + 4 \cdot \beta \end{cases}$ により、 $\alpha = (-2)a_1 + \frac{3}{2}a_2$, $\beta = a_1 - \frac{1}{2}a_2$ とする。よって任意のベクトル \mathbf{a} は基底ベクトルの組 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ に関して、 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = ((-2)a_1 + \frac{3}{2}a_2)\mathbf{v}_1 + (a_1 - \frac{1}{2}a_2)\mathbf{v}_2$ と表すことになる。

例題 2

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, \mathbb{R}^2 への写像 $f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ にたいして、

(1) $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ の空間の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を標準基底とした表現行列をもとめよ。

(2) \mathbb{R}^3 の基底を $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 、また \mathbb{R}^2 の基底を $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とした基底に関する表現行列をもとめよ。

【解】空間を構成している基底の像をもとめて、写像の表現行列を組み立てればよい。(1) \mathbb{R}^3 の標準基底では、 $\mathbf{e}_1: x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$ の場合、 $\mathbf{e}_2: x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$ の場合、 $\mathbf{e}_3: x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$ の場合を計算すると、 $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから、 $(f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3)) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. よって標準基底に関する表現行列は $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ である。

[注] 線形性から $f(\mathbf{x}) = x_1f(\mathbf{e}_1) + x_2f(\mathbf{e}_2) + x_3f(\mathbf{e}_3) = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. ゆえに表現行列はこのような計算をするまでもなく、係数から得られる。

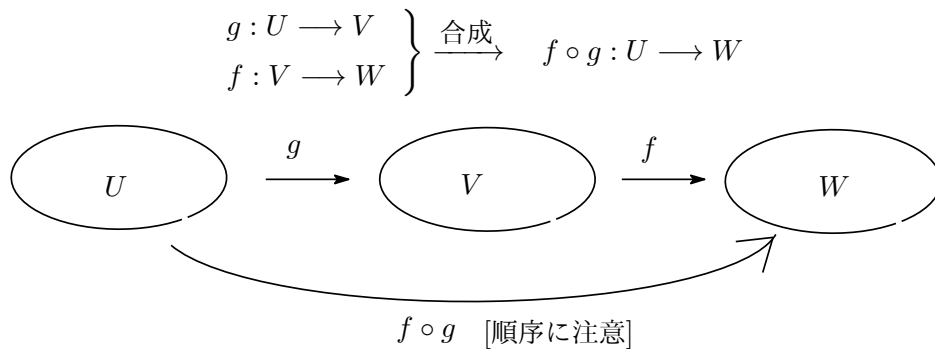
(2) $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$ の像を求め、それぞれのベクトルを \mathbb{R}^2 の基底 $\{\mathbf{b}_i, i = 1, 2\}$ で表してみる。まず $f(\mathbf{a}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ となるから、これを \mathbb{R}^2 の基

底で表さなければならない。そのために係数を a_{11}, a_{12} とおいて、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{b}_1 + a_{12}\mathbf{b}_2 = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. すなわち、連立方程式 $\begin{cases} 2 = a_{11} + 3a_{12} \\ 11 = 2a_{11} + 4a_{12} \end{cases}$ から、 $a_{11} = \frac{25}{2}, a_{12} = -\frac{7}{2}$ を得る。これを続けて $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = a_{21}\mathbf{b}_1 + a_{22}\mathbf{b}_2 = a_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. すなわち、連立方程式 $\begin{cases} -2 = a_{21} + 3a_{22} \\ -2 = 2a_{21} + 4a_{22} \end{cases}$ から、 $a_{21} = 1, a_{22} = -1$. さらに続けて 3 番目の基底の像を表現する係数を求めると、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = a_{31}\mathbf{b}_1 + a_{32}\mathbf{b}_2 = a_{31}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. すなわち、連立方程式 $\begin{cases} 1 = 4a_{31} + 3a_{32} \\ 4 = 2a_{31} + 4a_{32} \end{cases}$ から、 $a_{31} = 4, a_{32} = -1$. 以上をまとめると、

$$\begin{aligned} & (f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3)) \\ &= (a_{11}\mathbf{b}_1 + a_{12}\mathbf{b}_2, a_{21}\mathbf{b}_1 + a_{22}\mathbf{b}_2, a_{31}\mathbf{b}_1 + a_{32}\mathbf{b}_2) \\ &= (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \begin{pmatrix} 25/2 & 1 & 4 \\ -7/2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって $\begin{pmatrix} 25/2 & 1 & 4 \\ -7/2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ がこの 2 つの基底に関する表現行列である。 (終)

つぎに線形写像の合成を考える。2 つの写像の合成 (composition) とは、



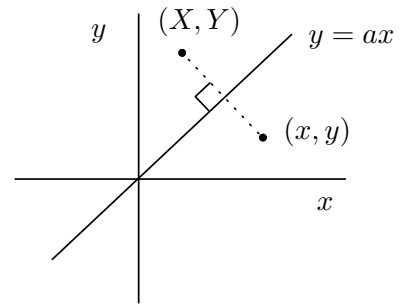
もし、標準基底による f, g の表現行列が A, B であれば、 $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \mathbf{x} \in U, f(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}, \mathbf{y} \in V$ であるから、 $(f \circ g)(\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x}, \mathbf{x} \in U$ となる。合成に対する表現行列が、それぞれの表現行列の積になっている。

問 2

回転を表す線形写像では角度から定まる。このとき合成写像すなわち、回転を 2 回繰り返すことは、行列の積が三角関数の加法定理を表している。これを確認せよ。

問 3

2次元平面原点を通る直線に関して、対称な位置をもつ点を考える。つまり直線 $y = ax$ に関する線対称な移動は原点を中心とする回転とみなせる。つまり線形写像とみなせる。この表現行列が $\frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix}$ となることを示せ。また直線 $2x + 3y = 1$ を $y = 2x$ に関して線対称移動した場合の図形の方程式（直線の方程式）が $6x + 17y = 5$ となることを示せ。



3.4 写像の核と像

線形写像 $f: V \rightarrow W$ において、

$$f \text{ の核 (kernel) : } \text{Ker}(f) = \{v \in V; f(v) = \mathbf{0} \in W\} = f^{-1}(\mathbf{0})$$

$$f \text{ の像 (image) : } \text{Im}(f) = \{f(v) \in W; v \in V\} = f(V)$$

と定めて、このような記号をもちいる。括弧は省略することもある。

いままでの学んだことから、 $m \times n$ 型行列 A の同次連立方程式の解空間 $W_A = \text{Ker} f_A$ 、ここで表現行列を A とする線形写像 f_A においては、解空間と核は $W_A = \text{Ker}(f_A)$ の関係である。また空間 W が行列 A から列ベクトル $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ で生成される $W = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ ならば、 $\text{Im}(f_A) = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ である。したがって

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker} f_A) + \dim(\text{Im} f_A) &= \dim(W_A) + \dim(\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle) \\ &= (n - \text{rank} A) + \text{rank} A \\ &= n = \dim(V) \end{aligned}$$

これを階数・退化次数の定理 (rank-nullity theorem) という。 $m \times n$ 型行列 A の階数 ($\text{rank}(A)$) と退化次数 $\dim(\text{Ker}(f_A))$ の和が変数空間の次元 ($\dim(V) = n$) との関係を述べている。より一般化したものがつぎの次元定理 (dimensional theorem) である。

定理 1

次元定理 線形写像 $f: V \rightarrow W$ において

$$\dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) = \dim(V)$$

が成り立つ。ここで、 $\dim(\text{Im} f)$ を線形写像の階数 $\text{rank}(f)$ と書くこともある。

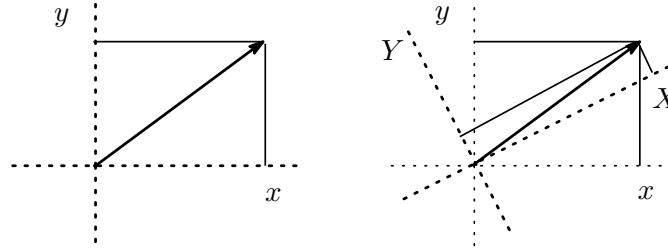
問 4

つぎの線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} x$ について、 $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$ の基底ベクトルと次元をもとめよ。

【解】 $\text{Ker}(f)$ の基底ベクトル $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ で、次元は 1。また $\text{Im}(f)$ の基底ベクトル $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ で、次元は 2。 (終)

3.5 基底の変換行列

同じ空間でも基底の選び方はいくつもあり、その基底が異なれば、同一の線形写像を表す式も違ってくる。しかし表現行列が異なるが、一定の関係法則が成り立つ。つまり同じベクトルでも、その空間での座標系の定め方で異なった表し方がなされる。



例。 \mathbb{R}^2 において、2つの基底ベクトル（一次独立で空間を生成する）の組； $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ と $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\}$ があったとする。この組の関係を調べる。それぞれが基底であるから、お互いに一方のベクトルは他方のベクトルの組で生成されるから、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

となるスカラー a, b, c, d を選べる。これは行列表現でまとめると

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

もし標準基底でない場合には $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\}$ と $\left\{ \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} \right\}$ があったとすれば、同じように適当なスカラーを選ぶことによって

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bw_1 \\ av_2 + bw_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 + dw_1 \\ cv_2 + dw_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

となるから、基底をならべてつくる行列では、これはつぎのように表現できる。

$$\begin{pmatrix} v'_1 & w'_1 \\ v'_2 & w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

このように一般にベクトル空間 V に2つの基底の組 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ があるとすると、ある正則行列 P で、基底のつくる行列の関係式：

$$(v'_1, v'_2, \dots, v'_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) P$$

ここでベクトルを並べてつくった行列には、“,” で区切っている。

3.6 基底の変換行列と表現行列の組合せ

ベクトル空間 V から別のベクトル空間 W に写像する $f: V \rightarrow W$ への表現行列とそれぞれのベクトル空間での基底の変換を組み合わせることを考える。

$V(n \text{ 次元空間})$	\rightarrow 線形写像 : f	$W(m \text{ 次元空間})$
基底 $\{\mathbf{v}_i, i = 1, 2, \dots, n\}$	\rightarrow (写像の表現行列 : A) \rightarrow	基底 $\{\mathbf{w}_i, i = 1, 2, \dots, m\}$
\Downarrow (基底の変換 : P)		\Downarrow (基底の変換 : Q)
基底 $\{\mathbf{v}'_i, i = 1, 2, \dots, n\}$	\rightarrow (写像の表現行列 : B) \rightarrow	基底 $\{\mathbf{w}_i, i = 1, 2, \dots, m\}$

定理 2

空間 V から空間 W の線形写像 f があるとき、空間 V での基底変換 $P: \mathbf{v}' = P\mathbf{v}$ と空間 W での基底変換 $Q: \mathbf{w}' = P\mathbf{w}$ とし、それぞれ基底に関する表現行列が $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w} A$ および $f(\mathbf{v}') = \mathbf{w}' B$ とすれば、

$$B = Q^{-1} A P$$

が成り立つ。

定理 3

ベクトル空間 V 内に 2 つの基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ と $\{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ があり、その基底の変換行列を P とする。この上の線形写像が基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ に関する表現行列を A とする; $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}' A$ 。もう一方の基底に関する表現行列 B は

$$B = P^{-1} A P$$

と表される。

例題 3

\mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への線形写像 f が

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を満たすとき、それぞれの標準基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めなさい。

【解】 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ は \mathbb{R}^2 の基底である。標準基底のベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ となるから、

$$\begin{aligned} \left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right) &= \left(2f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), -f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \right) \\ &= \left(2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって、表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ である。 (終)

◇ ◇ ◇ 練習問題 ◇ ◇ ◇

問題 1

つぎの \mathbb{R}^3 の解空間の次元と基底の 1 組を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(答) (1) 1 次元、 $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ (2) 1 次元、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

問題 2

つぎのベクトルの組が \mathbb{R}^3 の基底となるための a の条件を定めよ。

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

(答え) $a \neq 2, -1$

問題 3

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - 4y \\ 4x + 2y \end{pmatrix}$ について、基底を $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ および

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めよ。

$$(答え) \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -5 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

問題 4

つぎの \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^3 への線形写像の表現行列を求めよ。

- (1) yz 平面に関する面对称移動
- (2) z 軸のまわりに θ 回転させる

(答え)

$$(1) \text{ 点 } (x, y, z) \text{ が } yz \text{ 平面に対称となる点は } (-x, y, z) \text{ であるから、} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$