1 ベクトル空間

1.1 ベクトル空間と部分空間

定義 **1**

（ベクトル空間）ある全体空間を集合 V をとし、そのスカラーの空間を Λ とするとき、

(i)（ベクトル和）$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ ならば、$\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbf{V}$

(ii)（スカラー倍）$\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, スカラー $k \in \Lambda$ ならば、$k\,\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

が成り立つとき、この空間 V を**ベクトル空間** (vector space)、あるいは**線形空間** (linear space) とよぶ。つまりこの演算について、同じ空間 V に含まれるという性質で、これを空間 V は和の演算とスカラー倍の「演算に関して閉じている (closed)」という。あるいは、「線形性 (linearity) をもつ」という。

上の 2 つの項目はひとつにまとめてベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ とスカラー $a, b \in \Lambda$ について

$$a\,\mathbf{v} + b\,\mathbf{w} \in V$$

と表すこともできる。ここでスカラーの集合 Λ は $\mathbb{R}$(実数 real number の空間), $\mathbb{C}$(複素数 complex number の空間) などとする。

ベクトル空間の例：

(1) 2 次元の実数を成分とするベクトルや 3 次元ベクトルの全体、一般に n 次元ベクトルの集合などはベクトル空間をなす。実 (実数) ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ ともいう。

(2) $n = 1$ とした実数の全体 $\mathbb{R}$ も、和と積で閉じているから、ベクトル空間をなす。

(3) 複素数を成分とする数ベクトルの全体 $\mathbb{C}$ や、その成分からつくる組 $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) \,|\, z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2\}$ などもベクトル空間である。複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ ともいう。

(4) n 次多項式のつくる集まり (n 次以下多項式全体) や連続関数の全体もベクトル空間である。

(5) n 次正方行列の全体もベクトル空間 $\mathbf{M}_n$ をなす。

問 1

空間 $\mathbf{M}_n$ について、行列に関する和とスカラー倍を考えて、ベクトル空間をなすことを示せ。

定義 **2**

（ベクトル空間の部分空間）ベクトル空間 V の部分集合を W とするとき、$W \subset V$ がまた線形性、つまり元の空間の演算による和とスカラー倍で閉じているならば、W を V の (線形) 部分空間という。

連立方程式の解：

$m \times n$ 型の行列 A、n 次元ベクトルの変数 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ から定数項がゼロとしたつぎの連立方程式を

考え、$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の集まり：

$$\left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,;\, A\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$$

を、変数 x の同次連立方程式 $Ax = 0$ の**解空間**という。「同次」とは定数項がゼロである場合で、「斉次（せいじ）」ともいう。もし定数がゼロでないときは「非同次」、「非斉次」とよぶ。

問 2
実数の n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ において、同次連立方程式の解空間は $\mathbb{R}^n$ の (線形) 部分空間となることを示せ。

一次結合、ベクトルの生成する空間
　ここでは $\mathbb{R}^n$ の空間を考える。他のベクトル空間でも同じ定義が可能である。

$\boxed{\text{定義}}$ **3**
ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ の組がつくる**一次結合** (linear combination) とは、Λ によるスカラー倍とベクトル和をもちいた $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$ の形をいい、スカラー $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \Lambda$ を変化させてできる集合

$$V = \{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k \,|\, \mathbf{a}_i \in \Lambda, i = 1, 2, \cdots, k\}$$

を ベクトルの組 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ がつくる**部分空間**、あるいはこの**ベクトルの張る空間**という。記号では W とそのベクトルの組やカギカッコ <> で挟んだもの $W_{\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}}$ あるいは $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k \rangle$ で表す。

　いいかえると、ベクトル $\mathbf{v}$ を

$$\mathbf{v} \in W_{\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k \rangle$$

とすれば、適当なスカラーの列 $\{a_i, i = 1, 2 \cdots, k\}$ があって、

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$$

と表すことができる。「適当な…があって」を記号により、

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k \quad \exists a_i, i = 1, 2 \cdots, k$$

と簡単に表す。
　ここで用いた“E” (Exist, 存在する) をひっくり返した $\exists$ という記号は、「適当に選んで」、「選ぶことができる」、「存在する」という意味につかう。同様に頻繁にもちいる記号に $\forall$ がある。“A” を逆さまにしたもので、「すべてのもの」、「どんな値でも」、「任意の」などを数学命題のなかで表すためにもちいる。これは (All、すべて) に由来する。たとえば、部分であることを表すことは、$W \subset V$ であり、命題では

$$\forall v \in W \implies v \in V$$

を示せばよい。$\implies$ は、「ならば (imply)」という意味。

例題 1

3 次の連立方程式 (本数はひとつだけ)

$$2x + y - 4z = 0$$

は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ。

【解】解空間を $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 2x + y - 4z = 0\}$ とすれば、ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in W$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in W$ とすると、

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \quad 2y_1 + y_2 - 4y_3 = 0$$

であるから、加え合わせると

$$2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - 4(x_3 + y_3) = 0$$

したがって、$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$ となる。同様に

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in W \quad \Longrightarrow \quad k\mathbf{x} = (kx_1, kx_2, kx_3) \in W, \forall k$$

すなわち W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。

[注意] 同じような方程式の解集合：$2x + y - 4z = c$, ただし $c \neq 0$ は「同次」連立方程式ではなく、「非同次」連立方程式であり、部分空間の条件を満たさない。

例題 2

$\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ のベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ をつぎの条件で定めるとき、部分空間となるかどうか調べよ。

(1) $M_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; x_1 + x_2 = 0\}$

(2) $M_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; x_1 x_2 = 0\}$

(3) $M_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; 2x_1 - x_2 = x_n\}$

(4) $M_4 = M_1 \bigcup M_3$

(5) $M_5 = M_1 \bigcap M_3$

は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ。

ここで $M_1 \bigcup M_3$ は 2 つのうち、少なくとも一方を満たすベクトルを表す。少なくとも一つということは同時に満たしてもよいから、3 通りの場合がある。これに対して $M_1 \bigcap M_3$ は、共通部分を意味するから、 2 つの条件を同時に満たすことを意味する。

【解】M_1, M_3, M_5 は部分空間となる。M_2, M_4 は部分空間とならない。部分空間とならないことは、反例を考えればよい。満たさないものを探す。

(1) は $x_1 + x_2 = 0$ と $y_1 + y_2 = 0$ から、$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0$ が成り立つから。

(2) では、M_2 のベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ が反例である。この 2 つの和が条件を満たさない。

(4) では, ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_3$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix} \notin M_1 \bigcup M_3$ で反例となる。

(5) においては、M_1 と M_3 が部分空間となっていて、一般論として、２つの部分空間の共通集合は、やはり部分空間となることが示せる。

(終)

例題 3

与えられたベクトルが、あらかじめ定めていたベクトルの組の張る空間 $W_{a,b}$ の要素となるかどうかを調べよ。

(1)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \qquad \text{ここで } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in W_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \quad \text{ここで } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

【解】空間 $W_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ から、ある点をとれば、ベクトルの生成する空間の定義式から、 $x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b}$ であるから、一次結合の関係式を満たすような係数の値 x, y があるかどうかを調べればよい。

(1)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x + 4y \end{pmatrix}$$

となるから、成分どうしを比較した連立方程式において、解があるかどうかということに帰着される。未知数が 2 個、方程式が 2 個の連立方程式である。係数行列、拡大係数行列の階数を、掃き出し計算によって変形して求めると

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$
$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 4/5 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix} = 2$$

となり、階数が等しい。したがって連立方程式の解が存在する。つまり

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$$

(2) 次数が増えても同様に考えられる。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x + 4y \\ 5x + 7y \end{pmatrix}$$

未知数が 2 個で 3 本の関係式となっていて、係数行列、拡大係数行列の階数を、掃き出し計算によって変形して求めると

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

となる。したがって連立方程式の解が存在しない。つまり一次結合で表される係数は存在しない。記号では、要素とはならないから、

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$$

(終)

練習問題

問題 1

つぎの集合は $\mathbb{R}^2$ の部分空間となるかどうか調べよ。

$$(1)\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; x+y=0 \right\} \qquad (2)\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; x+y=1 \right\}$$

$$(3)\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; y=x^2 \right\} \qquad (4)\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; x^2-y^2 \leq 0 \right\}$$

問題 2

つぎの集合は $\mathbb{R}^3$ の部分空間となるかどうか調べよ。

$$(1)\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; y \geq z \right\} \qquad (2)\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3} \right\}$$

$$(3)\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3} \right\} \qquad (4)\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ y+2z=0 \end{array} \right\}$$

$$(5)\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ y+z-1=0 \end{array} \right\} \qquad (6)\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; y^2+z^2=2yz \right\}$$

問題 3

つぎは $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるかどうか調べよ。要素を省略して、条件のみを記して表している。

(1) $S_1 = \{x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=0\}$
(2) $S_2 = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0\}$
(3) $S_3 = \{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2=1\}$
(4) $S_4 = \{x_1=x_2, x_3=x_4, x_5=x_6, \cdots, x_{n-1}=x_n\}$ (ただし n は偶数とする)

問題 4

与えられたベクトルが、張られた部分空間の要素がどうか調べよ。ここで張られた部分空間 $W_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\cdots}$ は括弧 (かっこ) をもちいた $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \cdots \rangle$ で表している。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$

(3) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$