

1.2 連立 1 次方程式

定義 1

n 個の未知数 x_1, x_2, \dots, x_n として、 m 本の方程式を考える。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

なる連立 1 次方程式で

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ を係数行列、} (A \mid b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ を}$$

拡大係数行列という。

$$\text{さらに } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ とおけば、連立方程式は } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ と書ける。}$$

問題 1

つぎの連立方程式の係数行列、拡大係数行列を求めよ。また方程式を行列とベクトルをもちいて表せ。

$$(1) \quad \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 5y = 7 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} 2x = -3y \\ y + z = 7 \end{cases}$$

定義 2

(ベクトルの 1 次結合) 同じ形のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ が与えられたとき、スカラー $c_i, i = 1, 2, \dots, m$ をもちいた 1 次結合 (linear combination) とは

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_m\mathbf{a}_m$$

をいう。

係数行列が n 次の正方行列で、 A を $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ という形の列ベクトルに分割すれば

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$$

の形に表現できる。

問題 2

(1) ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 次結合で表せ。 (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ の 1 次結合で表せ。

問題 3

つぎのベクトル \mathbf{a} は、 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ の 1 次結合で表すことができるか調べ、もしできるならば、その表現を求めよ。

$$(1) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

定義 3

(連立 1 次方程式の基本変形)

- (1) 一つの式にある数を定数倍する (掛け算か割り算)
- (2) 2 つの式の順序を入れ替える (上段と下段)
- (3) ある式に他の式を定数倍したものを加える (加えて係数が消去されるよう)

例題 1

基本変形をもちいた解法 : 掃き出し法 (sweep out) とよぶ。

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \begin{cases} 2x + 3y = 8 & \cdots & \text{L1} \\ x + 2y = 5 & \cdots & \text{L2} \end{cases} & \iff & \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \\ \text{(II)} \quad & \begin{cases} -y = -2 & \cdots & \text{L1} + \text{L2} \times (-2) \\ x + 2y = 5 \end{cases} & \iff & \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \\ \text{(III)} \quad & \begin{cases} -y = -2 \\ x = 1 & \cdots & \text{L2} + \text{L1} \times 2 \end{cases} & \iff & \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \text{(IV)} \quad & \begin{cases} x = 1 & \cdots & \text{L2} \\ -y = -2 & \cdots & \text{L1} \end{cases} & \iff & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \\ \text{(V)} \quad & \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 & \cdots & \text{L2} \times (-1) \end{cases} & \iff & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

問題 4

つぎの連立方程式を掃き出し法で解け。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} & (2) \quad & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases} \\ (3) \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_3 = 8 \\ x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases} & (4) \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

問題 5

つぎの連立方程式がただ一組の解をもつための定数 k の条件を定めよ。またこのときの解を求めよ。

$$\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ x + y + w & = & 1 \\ x + z + w & = & 1 \\ y + z + (k - 2)w & = & 1 \end{cases}$$

(ヒント : 階段行列に変形する。 $k = 0$ のとき解なし。)