

### 1.3 行列の階数

連立方程式の解法で行った 3 つの変形操作を行の基本操作という。この操作は、つぎの 3 種類の行列を左側から乗算することと同じである。

基本操作の行列 :  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$  を  $m \times n = 3 \times 4$  型とする。

(1) ひとつの行を  $k$  倍 (ゼロは除く) する。

例 : 3 行目を  $k$  倍する :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 & kd_3 \end{pmatrix}$$

(2) 2 つの行を入れ替える。

例 : 2 行目と 3 行目を入れ替える :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

(3) ある行に他の行を何倍かしたものを加える。

例 : 3 行目を  $k$  倍して、この行を 2 行目に加える :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + ka_3 & b_2 + kb_3 & c_2 + kc_3 & d_2 + kd_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

#### 問題 1

3 行 4 列型の行列に対して、「列の基本操作」を行うときには、4 行 4 列 (4 次) の正方行列を右側からかける操作をおこなう。

(1) ひとつの列を  $k$  倍 (ゼロは除く) する。

(2) 2 つの列を入れ替える。

(3) ある列に他の列を何倍かしたものを加える。

このような操作をおこなうためにどんな行列を考えればよいか。

#### 定義 1

階段行列と行列の階数一般の  $m \times n$  型の行列が与えられたとする。この行列に関して、3 種類の「行の基本変形」の操作を行う。

行に関する基本変形の結果から、階段状に 1 の値が左上から右下に向かっていく。

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & \cdots & & \cdots & n \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(1) ピボット要素  $\boxed{1}$  の列では、上下の要素はすべて 0 である。

(2) ピボット要素  $\boxed{1}$  の行は、左側はすべて 0 で \* 印はゼロでない数。

このとき、 $r$  個の行までピボット要素を含むが、それよりも以降の行がすべてゼロ行となれば、このとき、行列の階数 (rank) は  $r$  といい、 $\text{rank}(A) = r$  と表す。

**定理 1**

$n$  変数  $\mathbf{x}$  に関する連立方程式:  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  がただ一つの解 (一意解) をもつ必要十分条件は拡大係数行列  $[A \mid \mathbf{b}]$  の階数も係数行列の階数に等しく、 $n$  となること。

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A \mid \mathbf{b}]) = n$$

連立方程式の解が唯一つしかないときは、任意定数をもちいないときで、係数行列を階段行列に変形していったときに、すべての列でのピボット要素が 1 にできるときであり、これに拡大係数行列まで広げた行列の階数とが同じ数になる場合である。

**問題 2**

掃き出し (基本変形) 計算によって、つぎの行列を階段行列に変形し、その階数を求めよ。ただし  $a$  は定数とする。

$$\begin{array}{lll} (1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ (4) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} & (5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

**問題 3**

つぎの行列を基本変形によって、階段行列に変形せよ。

$$\begin{array}{ll} (1) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \\ (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

**1.4 逆行列****定義 2**

(逆行列の定義):  $n$  次正方行列  $A$  に対して、つぎを満たす  $n$  次正方行列  $X$  を逆行列という。

$$AX = XA = I_n (n \text{ 次の単位行列})$$

もし逆行列をもつときにはただ一つ定まる。これを  $X = A^{-1}$  と表す。逆行列をもつとき、行列  $A$  は正則 (regular) といい、正則でないときには特異 (singular) という。

**定理 2**

$n$  次正方行列  $A$  について、つぎの命題は同値 (お互いに必要十分条件) である。

$$(1) \text{rank}(A) = n$$

(2) 連立方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の解は、自明な  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  に限る。

(3)  $\text{rank}(A) = n$

(4) 行列  $A$  は正則である。

#### 問題 4

基本変形での 3 つの行列を考える。つぎの 4 次のときについて、すべて正則であり、その逆行列を求めよ。( $k \neq 0$ )

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 問題 5

つぎの行列が逆行列をもつ条件を定め、そのときでの逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

#### 問題 6

つぎの行列が逆行列をもつ条件を定め、そのときでの逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & a & 1 & 0 \\ c & b & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & a & ab & 0 \\ 0 & 1 & b & bc \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 問題 7

$2 \times 2 = 4$  個の正方行列から作ったブロックで構成される正方行列  $\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$  (ここで  $\mathbf{0}$  はゼロ行列とする) において、 $A, C$  の逆行列があるならば、この逆行列がつぎで与えられることを確かめよ。 $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ \mathbf{0} & C^{-1} \end{pmatrix}$