

1 平面・空間のベクトル

1.1 ベクトルの内積

定義 1

(ベクトルの表し方) ベクトルとは向きと大きさをもった量で、線分の矢印で向き、その長さで大きさを表す。矢印の始まりと終わりを始点、終点といい、始点 A から終点 B までのベクトルを \overrightarrow{AB} と表す。

ベクトルを平行移動しても大きさと向きは変わらないから同じものと考え、始点、終点に依存しない書き方で、矢印を上を書いて \vec{a} , あるいはボールド体で \mathbf{a} とも書く。ベクトルを平面や空間のなかで考えるときには、各座標の成分をもちいて、

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

などと表現する。これを横ベクトルといい、縦に並べた場合を縦ベクトルとよぶ。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ベクトルの大きさを表す長さはノルムといい、 $|\mathbf{a}|$ と表す。実数での絶対値の記号と同じを使う。 xy 平面上のベクトルで、始点を原点 $(0, 0)$ と点 $P(a, b)$ を結んだベクトルは $\overrightarrow{OP} = (a, b)$ となり、 $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ である。また空間ベクトルであれば、 $\mathbf{a} = (a, b, c)$ であれば、三平方の定理、和算では鉤股弦 (こうこげん) の定理から、 $|\mathbf{a}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ となる。

一般の場合も同じであるから、3 次元の空間ベクトルで説明する。

定義 2

(ベクトルの和、スカラー倍)

$$\text{和: } \mathbf{a} = (a, b, c), \mathbf{b} = (p, q, r) \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a + p, b + q, c + r)$$

$$\text{スカラー倍; ベクトル } \mathbf{a} = (a, b, c), \text{ スカラー } k \Rightarrow k\mathbf{a} = (ka, kb, kc)$$

問題 1

これとベクトルの和、スカラー倍から、つぎの計算をせよ。

座標平面上に 2 点 $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$ がある。それぞれを原点 O との結ぶベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ とするとき、

$$(1) \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (2) \mathbf{a} - \mathbf{b} \quad (3) -\mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (4) 2\mathbf{a} - \mathbf{b} \quad (5) \frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b} \quad (6) \frac{\mathbf{a} + 4\mathbf{b}}{5}$$

を求め、平面上に図示せよ。

「補足」平面上の三角形 OAB に対して、重心は $\frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ で表せます。

問題 2

$\mathbf{a} = (2, -3)$, $\mathbf{b} = (-1, 2)$ のとき、つぎの値を求めよ。

$$(1) |\mathbf{a}| \quad (2) |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \quad (3) |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

問題 3

原点 O とする座標平面上の 3 点 $A = (1, 1)$, $B = (2, 4)$, $C = (-3, 11)$ とするとき、つぎの値を求めよ。

- (1) $|\vec{OA}|$ (2) $|\vec{AB}|$ (3) $k|\vec{AC}| = 1$ となる k
 (4) $\vec{AB} = \vec{CD}$ となる点 D の座標 (5) $|\vec{BC}|$ (6) $|k\vec{AD}| = 1$ となる k

定義 3

(ベクトルの内積) 2 つの 3 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a, b, c)$, $\mathbf{b} = (p, q, r)$ に対する内積 (スカラー積) とは、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ap + bq + cr$$

という成分同士の積を加えたものと定める。

一般に n 次元ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ では

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

で与えられる。内積の表示はカッコをもちいた形 (\mathbf{a}, \mathbf{b}) でも使われる。

問題 4

つぎの法則などが成り立つことを確認せよ。

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
 (3) $k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$ (4) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
 (5) $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ (6) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$
 (7) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$

定義 4

内積とノルムから、ベクトルのなす角 θ をつぎで定める。

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{\sum_i a_i b_i}{\sqrt{\sum_i a_i^2} \sqrt{\sum_i b_i^2}}$$

問題 5

(1) 平行四辺形 ABCD で、 $\vec{AB} = \mathbf{a}$, $\vec{AD} = \mathbf{b}$ として、平面ベクトル $\mathbf{a} = (a, b)$, $\mathbf{b} = (c, d)$ においてはベクトルのなす角 θ とするとき、平行四辺形の面積は

$$S = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta = |ad - bc|$$

であり、これから、 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ が成り立つことを示せ。(シュワルツの不等式)

(2) 3 次元ベクトルの場合では

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

また等号が成り立つときはどういう場合か。(答: 同じ直線上に並んでいる)

問題 6

空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, -1, 1)$, $B(1, -1, 0)$, $C(3, 4, 5)$ が与えられている。つぎを求めよ。

- (1) ノルム: $|\vec{OA}|$ (2) 内積: $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$
 (3) 挟む角: \vec{OA} と \vec{OB} のなす角 (4) 面積: $\triangle ABC$ の面積 S