

2 行列と連立 1 次方程式

問題 1

加法 (+) の (1) 結合法則 $(A + B) + C = A + (B + C)$, (2) 交換法則 $A + B = B + A$, (3) 分配法則 $k(A + B) = kA + kB$, また行列積の (4) 結合法則 $(AB)C = A(BC)$, (5) 分配法則 $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$ を確かめよ。

(解) ほぼ明らか。 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right)$ の性質も利用することがある。注意として交換法則は不成立であることに気をつける。

問題 2

つぎの行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

について、計算せよ。

$$\begin{array}{lll} (1) AC & (2) CA & (3) CB \\ (4) CD & (5) DA & (6) DB \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{(解) (1) } 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 3 \times 3 \quad AC &= \begin{pmatrix} 9 & 19 & 29 \\ 12 & 26 & 40 \\ 15 & 33 & 51 \end{pmatrix} & (2) 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 2 \times 2 \quad CA &= \begin{pmatrix} 22 & 49 \\ 28 & 64 \end{pmatrix} \\ (3) 2 \times 3 \times 3 \times 1 = 2 \times 1 \quad CB &= \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \end{pmatrix} & (4) 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3 \quad CD &= \begin{pmatrix} 22 & 49 & 76 \\ 28 & 64 & 100 \end{pmatrix} \\ (5) 3 \times 3 \times 3 \times 2 = 3 \times 2 \quad DA &= \begin{pmatrix} 30 & 66 \\ 36 & 81 \\ 42 & 96 \end{pmatrix} & (6) 3 \times 3 \times 3 \times 1 = 3 \times 1 \quad DB &= \begin{pmatrix} 30 \\ 36 \\ 42 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問題 3

つぎの行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

について

$$\begin{array}{ll} (1) (A + B)^2 & (2) A^2 + 2AB + B^2 \\ (3) A^2 - B^2 & (4) (A + B)(A - B) \end{array}$$

を計算し、実数で成り立つものが、行列では不成立の場合があることを確かめよ。

$$\text{(解) (1) } (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(2) A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(4) (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 4

任意の正方行列は A は、 $B = A + {}^tA$ とおくと、対称行列であり、また $C = A - {}^tA$ とおくと、交代行列となることを示せ。

$$(\text{解}) \quad {}^tB = {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA = B$$

$${}^tC = {}^t(A - {}^tA) = {}^tA + {}^t(-{}^tA) = {}^tA - A = -A + {}^tA = -(A - {}^tA) = -{}^tC$$