

3 行列式

3.1 行列式の定義

順列 (permutation) とは n 個の数 $\{1, 2, \dots, n-1, n\}$ を並び替えした列 $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n\}$ をいい、すべてで $n!$ 個ある。このひとつひとつの順列は、偶順列と奇順列に分類される。 $\{1, 2, \dots, n\}$ から 2 つの任意の数を選び、その順序を交換する。この操作で異なった順列が得られる操作の繰り返し数を考え、回数の偶数、奇数で分ける。順列の符号数 $\text{sign}\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n\}$ とは偶順列で 1, 奇順列で -1 と定める。例えば、2 個の場合では、 $2!/2 = 1$ 個が偶順列、 $1!/2 = 1$ 個が奇順列：

$$\text{sign}\{1, 2\} = 1, \quad \text{sign}\{2, 1\} = -1$$

3 個の場合では、 $3!/2 = 3$ 個が偶順列、 $3!/2 = 3$ 個が奇順列：

$$\begin{aligned} \text{sign}\{1, 2, 3\} &= 1, & \text{sign}\{1, 3, 2\} &= -1, & \text{sign}\{2, 1, 3\} &= -1, \\ \text{sign}\{2, 3, 1\} &= 1, & \text{sign}\{3, 1, 2\} &= 1, & \text{sign}\{3, 2, 1\} &= -1 \end{aligned}$$

問題 1

- (1) 4 個の場合の順列 $4! = 24$ 個を書き並べ、偶順列か奇順列かを調べよ。
- (2) 順列はあみだ籤と一対一対応する。3 個あるいは 4 個の場合のそれぞれの順列に対応するあみだ籤をつくりなさい。その横棒が偶数か奇数で順列の符号数と対応していることを確かめよ。

定義 1

(行列式の定義) 正方行列 $A = (a_{ij})$ において、各行各列から 1 個ずつ選んで、積をつくり、その選んだ順列の符号数をかけた値とする。これを行列からの行列式 (determinant) という。

$$\det|A| = \sum_{p_1, \dots, p_n} \text{sign}(p_1, \dots, p_n) a_{1,p_1} a_{2,p_2} \cdots a_{n,p_n}$$

和はすべての順列にわたるから、 2×2 では 2 項、3 次の正方行列では $3! = 6$ 個あり、3 個ずつのはプラスとマイナスの項となる。4 次の正方行列では $4! = 24$ 個の項が表れ、それぞれは 4 個ずつの積で 12 個のプラスとマイナスとなる。4 次以上の場合には定義で計算するのではなく、行列の性質をもちいて変形してから、値をもとめる (展開するという)。

例題 1

つぎの式はよく用いられる基本的な式であるから、慣れておくほうがよい。サラスの展開とよばれる。

$$(i) \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (+1)a_1b_2 + (-1)a_2b_1 = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\begin{aligned} (ii) \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= (+1)a_1b_2c_3 + (+1)a_2b_3c_1 + (+1)a_3b_1c_2 \\ &\quad + (-1)a_1b_3c_2 + (-1)a_2b_1c_3 + (-1)a_3b_2c_1 \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \end{aligned}$$

問 1

行列式の値を求めよ。

$$(i) \det \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \quad (ii) \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad (iii) \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(答) (1) 1, (2) 6, (3) -6

問 2

つぎを示せ。

$$(i) \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 \quad (ii) \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

問 3

$$\det \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

問 4

$$\det \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \left(\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right)^2 = (ad - bc)^2$$

3.2 行列式の性質

定理 1

n 次正方行列に対して、行列の積における行列式は、それぞれの行列式の積に等しい。

$$\det|AB| = \det|A| \times \det|B|$$

定理 2

もし a_{11} 以外の行要素あるいは列要素がゼロであるとき、

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \times \det \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 3

もし上三角部分あるいは下三角部分の要素がゼロであるとき、行列式の値は対角成分の要素の積に等しい。

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1,n-1} a_{nn}$$

定理 4

一つの列、あるいは行の和を分解する。 つぎは第 i 列の値 $a_{.i} + b_{.i}$ を分解ですが、行も同様 (det を省略)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} + b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 5 (掃き出し計算の基本的な性質と行列式)

(I) 行の定数倍: ある一つの行を k 倍すると行列の値は k 倍となる。行列の定数 (スカラー) 倍との違いに注意する。 $\det[kA] = k^n \det[A]$ と n 乗に注意。

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k a_{i1} & k a_{i2} & \cdots & k a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(II) 他の行を定数倍して加える: 一つの行に他の行の定数倍を加えても行列式の値は変わらない。

$$\det \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + k a_{j1} & a_{i2} + k a_{j2} & \cdots & a_{in} + k a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

(III) 2つの行の入れ替え: 2つの行の入れ替えをおこなうと行列式の値の符号が変わる。

$$\det \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = (-1) \times \det \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

3.3 余因子展開

余因子行列の定義から説明します。

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ から、第 i 行と第 j 列を取り除いた $n-1$ 次の正方行列を A_{ij} と表し、符号付きの値として $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det[A_{ij}]$ とおく。これを要素として、 n 次の正方行列の転置行列を $\tilde{A}$ とする。これを A の余因子行列という。転置の操作が加わっていることに注意する。

例題 2

[1] $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ においては、 $\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \det[d] = d$, $\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \det[c] = -c$, $\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \det[b] = -b$, $\tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \det[a] = a$. したがって転置の操作を施し、 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. さらに $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det[A] & 0 \\ 0 & \det[A] \end{pmatrix}$ が成り立っている。

$$\begin{aligned}
[2] \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \text{ においては、} \tilde{a}_{11} &= (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = -11, \tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \\
-2, \tilde{a}_{31} &= (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 9, \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = 8, \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \\
-3, \tilde{a}_{23} &= (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = -4, \tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = -6, \tilde{a}_{23} = \\
(-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} &= 4, \tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3. \text{ したがって } \tilde{A} = \begin{pmatrix} -11 & -2 & 9 \\ 8 & -3 & -4 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \\
\text{また } \det|A| = 7, \quad A^{-1} &= \begin{pmatrix} -11/7 & -2/7 & 9/7 \\ 8/7 & -3/7 & -4/7 \\ -6/7 & 4/7 & 3/7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

定理 6

行列とその余因子行列、逆行列の関係：

$$A \tilde{A} = \tilde{A} A = \det|A| I_n = \begin{pmatrix} \det|A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det|A| & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \det|A| \end{pmatrix}$$

定理 7

(余因数展開) 行列とその余因子行列との関係はつぎの形を書きかえたものである。

$$\text{行} \quad \sum_k a_{ik} \tilde{a}_{jk} = \det|A| \delta_{ij} \quad \text{列} \quad \sum_k a_{ki} \tilde{a}_{kj} = \det|A| \delta_{ij}$$

クラメルの公式: x, y, z の連立方程式

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases} \text{ の解を求めるために、行列式を用いた形で、} A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{ と}$$

してクラメルの公式として、つぎが知られている。形が明快で覚えやすい。しかし一般の大きな次数の具体的な数値計算には適当ではない。いま係数行列 A の各列を置き換えた 3 つの行列に対して、

$$A_1 = \begin{bmatrix} \boxed{d_1} & b_1 & c_1 \\ \boxed{d_2} & b_2 & c_2 \\ \boxed{d_3} & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & \boxed{d_1} & c_1 \\ a_2 & \boxed{d_2} & c_2 \\ a_3 & \boxed{d_3} & c_3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \boxed{d_1} \\ a_2 & b_2 & \boxed{d_2} \\ a_3 & b_3 & \boxed{d_3} \end{bmatrix} \text{ とおくとき、その行列式の}$$

値から、解は

$$x = \frac{\det|A_1|}{\det|A|}, \quad y = \frac{\det|A_2|}{\det|A|}, \quad z = \frac{\det|A_3|}{\det|A|}$$

で与えられ、より高次の場合も同様な式で表現される。が、行列式をそれぞれ求めるには手間のかかることで効率はよくない。

問題 2

つぎの行列の余因子行列を求めよ。またそれを持ちいて逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(答) \tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -14 & -1 & 9 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{18} \tilde{A}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(答) \tilde{A} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & -10 & -8 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \tilde{A}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(答) \tilde{A} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 14 & 16 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{-1}{6} \tilde{A}$$

$$(4) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

$$(答) \tilde{A} = \begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ -cd & ac & 0 \\ df - be & -af & ab \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{abc} \tilde{A}$$

問題 3

つぎの 4 次正方行列の余因子行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

$$(1) \text{ の答 ; } abcd \begin{pmatrix} 1/a & -1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & -1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \end{pmatrix} \quad (2) \text{ の答 ; } (ad - bc) \begin{pmatrix} d & -b & 0 & 0 \\ -c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -b \\ 0 & 0 & -c & a \end{pmatrix}$$

問題 4

クラメルの公式を持ちいて解をもとめよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(答) x = -1/3, y = 1/3, z = 1$$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(答) x = 2, y = 3/2, z = -1/2$$

問題 5

つぎの行列を余因数展開により、証明せよ。

$$(1) \det \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ b & x & -1 & 0 \\ c & 0 & x & -1 \\ d & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2) \det \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & -b & -a & 0 \end{vmatrix} = (a^2 - b^2 + c^2)^2$$

$$(3) \det \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d & e \end{vmatrix} = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^5$$

補足：表計算ソフトの利用

Excel, OpenOffice などに代表される表計算ソフトには行列の転置や積、逆行列の計算を行う関数が用意されています。行列の計算を行う関数は、引数と戻り値が配列（複数のセルからなる範囲、例えば「A2:B3」は 2 次の正方行列の配列を意味しています）であり、配列数式と呼ばれます。予め、出力する配列部分をアクティブにしておき、その範囲に「配列数式」を入力するために、[Ctrl] + [Shift] + [Enter] と同時に押します。

行列の和：(範囲) + (範囲)

まず結果を打ち出す範囲をアクティブにし、数式バーに等号を入れ、加えられる行列（範囲）を選びアクティブにし、つぎにプラス（和）を入れ、つぎに加える行列（範囲）をアクティブにします。そこで単に Enter と入れたものは、数式配列の入力とはなりませんから、[Ctrl] + [Shift] + [Enter] と押します。結果が先に選んでアクティブにした範囲に結果の行列が表示されます。

行列の転置：TRANSPOSE(配列)

行列の転置（行列の入れ替え）を行う関数は TRANSPOSE 関数です。元の行列の大きさが 3 行 2 列の場合、2 行 3 列のセル範囲を選択した状態で下記のように数式を入力し、[Ctrl] + [Shift] + [Enter] を押すと結果が得られます。

行列の積：MMULT(配列, 配列)

行列の積を計算する関数は MMULT 関数です。2 つの行列の積で求まる行列の大きさに等しいセル範囲を選択した状態で数式を入力し、[Ctrl] + [Shift] + [Enter] を押すと結果が得られます。区切りには”,”をもちいます。

逆行列：MINVERSE(配列)

逆行列を計算する関数は MINVERSE 関数です。求まる逆行列の大きさに等しいセル範囲を選択した状態で数式を入力し、[Ctrl] + [Shift] + [Enter] を押すと結果が得られます。ただし、MINVERSE 関数は、行列式が 0 で逆行列を求められないケースでも値を返します。元の行列と逆行列の積 (MMULT) を求めて検算します。

行列式：MDETERM (配列)

行列式を計算する関数は MDETERM 関数です。MDETERM 関数は戻り値が配列ではないので配列数式ではありません。そのため、通常の間数と同様に入力して結果が得られます。