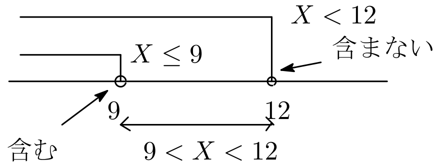
**正規分布「練習問題」の解答**

$\boxed{1}$ 仮定から $X \sim N(10,4)$ である。いま新たな変換を $Z = \dfrac{X-10}{\sqrt{4}} = \dfrac{X-10}{2} \sim N(0,1)$ とおくと $Z$ は標準正規分布にしたがう。正規分布表を用いて、値と確率の対応計算を読み取る。

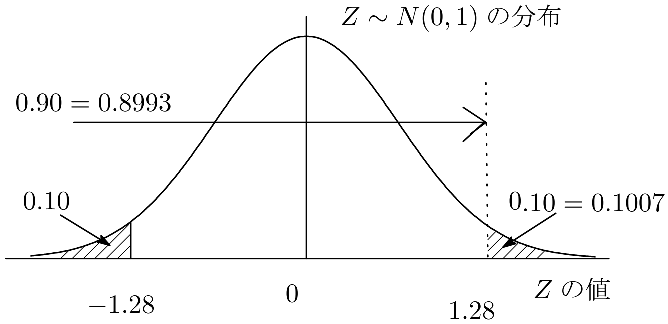
(1) $P(X \le 13) = P(\dfrac{X-10}{2} \le \dfrac{13-10}{2}) = P(Z \le 1.5) = \Phi(1.5) = 0.9332$

(2) $P(X > 11) = 1 - P(X \le 11) = 1 - P(\dfrac{X-10}{2} \le \dfrac{11-10}{2}) = 1 - 0.6915 = 0.3085$ ($\because$ 第 1 の等号は補事象の関係式)

(3) $P(9 < X < 12) = P(X < 12) - P(X \le 9) = P(X \le 12) - P(X \le 9) = P(Z \le 1) - P(Z \le -0.5) = \Phi(1) - \{1 - \Phi(0.5)\} = 0.8413 - 1 + 0.6915 = 0.5328$

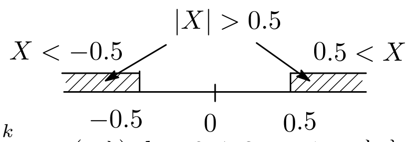



(4) $P(X \le c) = 0.1$ の関係式は $Z$ について $P(Z \le c') = 0.1$ ただし $\dfrac{c-10}{2} = c'$ 正規分布表から $c' = -1.28$ が読み取れるから $c = 2c' + 10 = 7.44$




★正規分布のような連続型分布に対する確率計算は、区間の端点が含む、含まないに関わらず同じ値になる。つまり等号であっても不等号であっても同じ確率となることに注意。

$\boxed{2}$ 測定器具の誤差値を $X$ とおくと、$X \sim N(0, 0.2^2)$。求める確率は $P(|X| > 0.5) = P(X < -0.5$ または $0.5 < X)$。$Z = \dfrac{X-0}{0.2} = 5X \sim N(0,1)$ であるから $P(|X| > 0.5) = P(X < -0.5) + P(X > 0.5) = P(Z < -2.5) + P(Z > 2.5) = 0.007 + 0.007 = 0.01$




$\boxed{3}$ パラメータ $\lambda$ のポアソン分布の密度関数は $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda), k = 0, 1, 2, \cdots$ このときに $k$ と $k+1$ との値をとる確率の比較は $P(X = k+1) = \dfrac{\lambda^(k+1)}{(k+1)!} \exp(-\lambda) = \dfrac{\lambda}{k+1} \dfrac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) = \dfrac{\lambda}{k+1} P(X=k)$ また 0 のときは $P(X=0) = \exp(-\lambda) = e^{-\lambda}$ であることを利用する。

アルゴリズム: step 1; let $i := 0$, $pa := \exp(-\lambda), F := pa$,
step 2; if $U < F$, let $X = i$, stop,
step 3; let $pa := c/(k+1) * pa$, $F := F + pa$, $i = i + 1$,
step 4; goto step 2.

★２項分布 $B(n,p)$ において $np = \lambda$ とおき，$n \to \infty, p \to 0$ とするとポアソン分布 $Po(\lambda)$ に近づく。☆

★ 2 項分布での $P(X=k+1), P(X=k)$ の関係式は

$$\begin{aligned}
P(X=k+1) &= \binom{n}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-(k+1)} \\
&= \frac{\overbrace{n\cdot n-1\cdots n-k}^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{p}{1-p}\cdot p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}\cdot\frac{\overbrace{n\cdot n-1\cdots n-k+1}^{k}}{k!}\cdot p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}P(X=k)
\end{aligned}$$

☆

$\boxed{4}$ 確率変数 $X$ を表の出る数とすると,2 項分布にしたがうから $X\sim B(400,\frac{1}{2})$。ここで 2 項分布の正規近似をおこなうと $n=400, p=1/2$ から, $np=400\times\frac{1}{2}=200, np(1-p)=100=10^2$. したがって 2 項分布を正規分布 $N(200,10^2)$ で近似する。さらに半数補正をつかうと

$$\begin{aligned}
P(180\le X\le 210) &= P(179.5\le X-1/2\le 210.5) \\
&= P\left(\frac{179.5-200}{10}\le Z\le\frac{210.5-100}{10}\right) \\
&= P(-2.05<Z<1.06) \\
&= \Phi(1.05)-(1-\Phi(2.01)) \\
&= 0.8531-1+0.9798=0.8329
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ 各 $i=1,2,\cdots,12$ で独立な確率変数 $X_i$ は区間 $[0,1]$ 上の一様分布とすると $EX_i=\frac{1}{2}, V(X_i)=EX_i^2-(EX_i)^2=\int_0^1 x^2\,dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$。この１２個の和をとると，$X=\sum_{i=1}^{12}X_i$ の平均と分散は $EX=\sum_i EX_i=12\cdot\frac{1}{2}=6$, $V(X)=\sum_i V(X_i)=12\cdot\frac{1}{12}=1$. したがって $Z=X-6=\sum_i EX_i-6$ の平均と分散は $E(Z)=0, V(Z)=1$ となる。この 12 個の和に対する一様分布に対して，中心極限定理を考え，正規分布で近似する。

x x x ▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪ x x x