確からしさの考え方、確率の問い解答

問２．１

与えられた確率 $P(A)=1/3, P(B)=1/4, P(AB)=1/6$ に対して，つぎの確率を計算しなさい。ただし $\overline{A}=A$ の補事象。(i) $P(\overline{A})$ (ii) $P(\overline{A}\cup B)$ (iii) $P(A\cup\overline{B})$ (iv) $P(A\overline{B})$ (v) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$

(解) (i) $P(\overline{A})=1-P(A)=1-1/3=2/3$. (ii) $P(\overline{A}\cup B)==1-P(A\overline{B})=1-\{P(A)-P(AB)\}=1-1/3+1/6=5/6$. (iii) $P(A\cup\overline{B})=1-P(B)+P(AB)=11/12$. (iv) $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=1/3-1/6=1/6$. (v) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(AB)=1-1/6=5/6$. □

問２．２

事象列 $A_n, n\geq 1$ に対して

$$P(A_1A_2\cdots A_n)\geq\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-(n-1)=1-\sum_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})$$

(解) まず確率の和は和事象の大きいことと、補事象の関係式から $\sum_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})\geq P(\cup_{i=1}^{n}\overline{A_i})=1-P(\cap_{i=1}^{n}A_i)$ が成り立つ。これを代入することで $\sum_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})-(n+1)=\sum_{i=1}^{n}\{P(A_i)-1\}+1=-\sum_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})+1=1-\sum_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})$ したがって移項をすれば $P(A_1A_2\cdots A_n)\geq\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-(n-1)=1-\sum_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})$ を得る。□

問２．３

つぎを示せ。また一般化 (n 個) の事象列についてはどうなるか。

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(B)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$$

(解) 2 個の場合には

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

であり、ここの B のかわりに $B\cup C$ を考える。左辺は $P(A\cup B\cup C)$ となる。また右辺の第 2 項は $P(B\cup C)$ でこれは 2 個の場合を適用できるから $P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)$ となる。さらに右辺の第 3 項は、集合の積と和についての分配律をもちいて $P(A(B\cup C))=P(AB\cup AC)$ となるから、2 個の集合 AB と AC の和集合の場合が当てはめられる。$AB\cap AC=ABC$ であるから、これらをまとめれば証明すべき式を得る。

一般に n 個の場合に成り立つ式は以下のようになる：$P(\cup_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)-\{P(A_1A_2)+P(A_1A_3)+\cdots+P(A_{n-1}A_n)\}+\{P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2A_4)+\cdots+P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)\}\cdots+(-1)^nP(A_1A_2\cdots A_n)$ □

問２．４

２つの事象 (A,B) が独立ならば，$(A,\overline{B})$, $(\overline{A},B)$ $(\overline{A},\overline{B})$ も独立となることを示せ。

(解) つぎの問２．６と同じ問題です。□

問２．５

つぎの等式を示せ。

$$P(AB)-P(A)P(B)=P(\overline{A})P(B)-P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})-P(A\overline{B})=P(\overline{A}\,\overline{B})-P(\overline{A})P(\overline{B})$$

(解) 確率の加法性のみをもちいて成り立つ関係式をつかう。たとえば事象 B を分割して,A が起こった場合と、起こらないとき、言い換えて補事象（否定）$\overline{A}$ が起こった場合に分ける。同時に起こることがありえないから、積事象（共通）は空事象であるから、$P(B)=P(BA\cup B\overline{A})=P(BA)+P(B\overline{A})=P(AB)+P(\overline{A}B)$ したがって $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$ を得る。このようにして $P(AB)-P(A)P(B)=P(B)-P(A)P(B)-\{P(B)-P(AB)\}=P(\overline{A}B)-\{1-P(A)\}P(B)=P(\overline{A}B)-P(\overline{A})P(B)$, 他も同様。□

問2．6

つぎの４つの命題は同値であることを示しなさい。

(a) 事象 A と B は独立　　(b) 事象 A^c と B は独立
(c) 事象 A と B^c は独立　　(d) 事象 A^c と B^c は独立

（解） ２つの事象 (A,B) が独立ならば，$(A,\overline{B})$, $(\overline{A},B)$ $(\overline{A},\overline{B})$ も独立となることを示す。前問の関係式 $P(AB)-P(A)P(B)=P(\overline{A})P(B)-P(\overline{A}B)$ から、$P(AB)=P(A)P(B)$ ならば、$P(\overline{A})P(B)=P(\overline{A}B)$ が得られる。よって２つの事象 (A,B) が独立ならば，$(\overline{A},B)$ も独立。他も同様。□

問2．7

もし $P(A|B)>P(A)$ ならば，$P(B|A)>P(B)$ を示せ。

（解） 条件付き確率の定義から、$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$ から $\frac{P(A|B)}{P(B|A)}=\frac{P(A)}{P(B)}$ を得る。したがって $P(A|B)-P(A)=\frac{P(A)}{P(B)}\{P(B|A)-P(B)\}$ であるから、命題が成り立つことはあきらか。□

問2．8

事象列 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ が独立で $P(A_i)=p, i=1,2,\cdots,n$ とおくとき，

(a) 少なくとも一つの事象が起こる確率は？

(b) 少なくとも m 個の事象が起こる確率は？

(c) ちょうど m 個の事象が起こる確率は？

（解） $X_i(\omega)=1_{A_i}(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in A_i\\ 0 & A_i\end{cases}$ とおけば $P(A_i)=p_i=E[X_i]=E[1_{A_i}]$. また和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ はパラメータ n,p の２項分布にしたがう。つまり $P(X_1+X_2+\cdots+X_n=x)=\begin{pmatrix}n\\x\end{pmatrix}p^x(1-p)^{n-x}, x=0,1,2,\cdots,n$. 事象の関係は { 少なくとも１つの A_iが起こる } $=\{\sum_i X_i\geqq 1\}$ となるから $P($少なくとも１つの A_iが起こる$)=P(\sum_i X_i\geqq 1)=1-P(\sum_i X_i=0)=1-(1-p)^n$ 同様に $P($少なくとも m 個の A_iが起こる$)=P(\sum_i X_i\geqq m)=\sum_{x=m}^n\begin{pmatrix}n\\x\end{pmatrix}p^x(1-p)^{n-x}$. さらに $P($ちょうど m 個の A_iが起こる$)=P(\sum_i X_i=m)=\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}p^m(1-p)^{n-m}$. □

問2．9

箱の中には $1,2,\cdots,n$ と数字の記されたボールが入っている。r 個のボールをとりだすとき，最大の数字が m となる確率を計算せよ。

(a) もとに戻してからボールを取り出すとき (復元抽出)。

(b) もとには戻さずにボールを取り出すとき（非復元抽出)。

（解） 確率変数 X_i を i 番目に取り出した数字を表すとする。また $X_{max}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_r\}$ とする。(a) 復元抽出であれば、各 i で独立で $P(X_i=x)=1/n, x=1,2,\cdots,n$。よって $P(X_i\geq m)=\sum_{1\leq x\leq m}1/n=m/n$。$P(X_{max}\leq m)=P(X_1\leq m,X_2\leq m,\cdots,X_r\leq m)=P(X_1\leq m)P(X_2\leq m)\cdots P(X_r\leq m)=(m/n)^r$. $P(X_{max}=m)=P(X_{max}\leq m)-P(X_{max}\leq m-1)=(m^r-(m-1)^r)/n^r$

(b) 非復元抽出では独立とならないないから、条件付き確率を計算すればよい。$P(X_1=i_1)=1/n, i_1\in\{1,2,\cdots,n\}$, $P(X_2=i_2|X_1=i_1)=1/(n-1), i_2\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus i_1$, $P(X_3=i_3|X_1=i_1,X_2=i_2)=1/(n-2), i_3\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{i_1,i_2\}$, したがって $P(X_{max}\leq m)=\frac{\binom{m}{r}}{\binom{n}{r}}$。

$P(X_{max}=m)=P(X_{max}\leq m)-P(X_{max}\leq m-1)=\frac{\binom{m-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}$ □