

## 確からしさの考え方、確率の問い解答

### 問2. 1

与えられた確率  $P(A) = 1/3, P(B) = 1/4, P(AB) = 1/6$  に対して、つぎの確率を計算しなさい。ただし  $\bar{A} = A$  の補事象。(i)  $P(\bar{A})$  (ii)  $P(\bar{A} \cup B)$  (iii)  $P(A \cup \bar{B})$  (iv)  $P(A\bar{B})$  (v)  $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

(解) (i)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 1/3 = 2/3$ . (ii)  $P(\bar{A} \cup B) = 1 - P(\overline{\bar{A} \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \{P(\bar{A}) - P(A\bar{B})\} = 1 - 1/3 + 1/6 = 5/6$ . (iii)  $P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(B) + P(AB) = 11/12$ . (iv)  $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 1/3 - 1/6 = 1/6$ . (v)  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(AB) = 1 - 1/6 = 5/6$ . □

### 問2. 2

事象列  $A_n, n \geq 1$  に対して

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1) = 1 - \sum_{i=1}^n P(\bar{A}_i)$$

(解) まず確率の和は和事象の大きいことと、補事象の関係式から  $\sum_{i=1}^n P(\bar{A}_i) \geq P(\cup_{i=1}^n \bar{A}_i) = 1 - P(\cap_{i=1}^n A_i)$  が成り立つ。これを代入することで  $\sum_{i=1}^n P(\bar{A}_i) - (n+1) = \sum_{i=1}^n \{P(A_i) - 1\} + 1 = -\sum_{i=1}^n P(A_i) + 1 = 1 - \sum_{i=1}^n P(A_i)$  したがって移項をすれば  $P(A_1 A_2 \cdots A_n) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1) = 1 - \sum_{i=1}^n P(\bar{A}_i)$  を得る。□

### 問2. 3

つぎを示せ。また一般化 ( $n$  個) の事象列についてはどうなるか。

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$$

(解) 2 個の場合には

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

であり、ここの  $B$  のかわりに  $B \cup C$  を考える。左辺は  $P(A \cup B \cup C)$  となる。また右辺の第 2 項は  $P(B \cup C)$  でこれは 2 個の場合を適用できるから  $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC)$  となる。さらに右辺の第 3 項は、集合の積と和についての分配律をもちいて  $P(A(B \cup C)) = P(AB \cup AC)$  となるから、2 個の集合  $AB$  と  $AC$  の和集合の場合が当てはめられる。 $AB \cap AC = ABC$  であるから、これらをまとめれば証明すべき式を得る。

一般に  $n$  個の場合に成り立つ式は以下のようになる： $P(\cup_{i=1}^n A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - \{P(A_1 A_2) + P(A_1 A_3) + \cdots + P(A_{n-1} A_n)\} + \{P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_4) + \cdots + P(A_{n-2} A_{n-1} A_n)\} \cdots + (-1)^n P(A_1 A_2 \cdots A_n)$  □

### 問2. 4

2 つの事象  $(A, B)$  が独立ならば、 $(A, \bar{B}), (\bar{A}, B), (\bar{A}, \bar{B})$  も独立となることを示せ。

(解) つぎの問2. 6 と同じ問題です。□

### 問2. 5

つぎの等式を示せ。

$$P(AB) - P(A)P(B) = P(\bar{A})P(B) - P(\bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) - P(A\bar{B}) = P(\bar{A}\bar{B}) - P(\bar{A})P(\bar{B})$$

(解) 確率の加法性のみをもちいて成り立つ関係式をつかう。たとえば事象  $B$  を分割して、 $A$  が起こった場合と、起こらないとき、言い換えて補事象 (否定)  $\bar{A}$  が起こった場合に分ける。同時に起こることがありえないから、積事象 (共通) は空事象であるから、 $P(B) = P(BA \cup B\bar{A}) = P(BA) + P(B\bar{A}) = P(AB) + P(\bar{A}B)$  したがって  $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$  を得る。このようにして  $P(AB) - P(A)P(B) = P(B) - P(A)P(B) - \{P(B) - P(AB)\} = P(\bar{A}B) - \{1 - P(A)\}P(B) = P(\bar{A}B) - P(\bar{A})P(B)$ , 他も同様。□

## 問2. 6

つぎの4つの命題は同値であることを示しなさい。

- (a) 事象  $A$  と  $B$  は独立      (b) 事象  $A^c$  と  $B$  は独立  
(c) 事象  $A$  と  $B^c$  は独立      (d) 事象  $A^c$  と  $B^c$  は独立

(解) 2つの事象  $(A, B)$  が独立ならば,  $(A, \bar{B}), (\bar{A}, B), (\bar{A}, \bar{B})$  も独立となることを示す。前問の関係式  $P(AB) - P(A)P(B) = P(\bar{A})P(B) - P(\bar{A}\bar{B})$  から,  $P(AB) = P(A)P(B)$  ならば,  $P(\bar{A})P(B) = P(\bar{A}\bar{B})$  が得られる。よって2つの事象  $(A, B)$  が独立ならば,  $(\bar{A}, B)$  も独立。他も同様。□

## 問2. 7

もし  $P(A|B) > P(A)$  ならば,  $P(B|A) > P(B)$  を示せ。

(解) 条件付き確率の定義から,  $P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$  から  $\frac{P(A|B)}{P(B|A)} = \frac{P(A)}{P(B)}$  を得る。したがって  $P(A|B) - P(A) = \frac{P(A)}{P(B)}\{P(B|A) - P(B)\}$  であるから、命題が成り立つことはあきらか。□

## 問2. 8

事象列  $A_1, A_2, \dots, A_n$  が独立で  $P(A_i) = p, i = 1, 2, \dots, n$  とおくとき,

- (a) 少なくとも一つの事象が起こる確率は?  
(b) 少なくとも  $m$  個の事象が起こる確率は?  
(c) ちょうど  $m$  個の事象が起こる確率は?

(解)  $X_i(\omega) = 1_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A_i \\ 0 & A_i^c \end{cases}$  とおけば  $P(A_i) = p_i = E[X_i] = E[1_{A_i}]$ . また和  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  はパラメータ  $n, p$  の2項分布にしたがう。つまり  $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n$ . 事象の関係は  $\{\text{少なくとも1つの } A_i \text{ が起こる}\} = \{\sum_i X_i \geq 1\}$  となるから  $P(\text{少なくとも1つの } A_i \text{ が起こる}) = P(\sum_i X_i \geq 1) = 1 - P(\sum_i X_i = 0) = 1 - (1-p)^n$  同様に  $P(\text{少なくとも } m \text{ 個の } A_i \text{ が起こる}) = P(\sum_i X_i \geq m) = \sum_{x=m}^n \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ . さらに  $P(\text{ちょうど } m \text{ 個の } A_i \text{ が起こる}) = P(\sum_i X_i = m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$ . □

## 問2. 9

箱の中には  $1, 2, \dots, n$  と数字の記されたボールが入っている。 $r$  個のボールをとりだすとき、最大の数字が  $m$  となる確率を計算せよ。

- (a) もとに戻してからボールを取り出すとき (復元抽出)。  
(b) もとには戻さずにボールを取り出すとき (非復元抽出)。

(解) 確率変数  $X_i$  を  $i$  番目に取り出した数字を表すとする。また  $X_{\max} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$  とする。(a) 復元抽出であれば、各  $i$  で独立で  $P(X_i = x) = 1/n, x = 1, 2, \dots, n$ . よって  $P(X_i \geq m) = \sum_{x=m}^n 1/n = (n-m+1)/n$ .  $P(X_{\max} \leq m) = P(X_1 \leq m, X_2 \leq m, \dots, X_r \leq m) = P(X_1 \leq m)P(X_2 \leq m) \dots P(X_r \leq m) = ((n-m+1)/n)^r$ .  $P(X_{\max} = m) = P(X_{\max} \leq m) - P(X_{\max} \leq m-1) = ((n-m+1)/n)^r - ((n-m)/n)^r$ .

(b) 非復元抽出では独立とならないから、条件付き確率を計算すればよい。 $P(X_1 = i_1) = 1/n, i_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $P(X_2 = i_2 | X_1 = i_1) = 1/(n-1), i_2 \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1\}$ ,  $P(X_3 = i_3 | X_1 = i_1, X_2 = i_2) = 1/(n-2), i_3 \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2\}$ , したがって  $P(X_{\max} \leq m) = \frac{\binom{m}{r}}{\binom{n}{r}}$ .

$P(X_{\max} = m) = P(X_{\max} \leq m) - P(X_{\max} \leq m-1) = \frac{\binom{m-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}$  □