数学の基礎事項

1　数の種類

- 自然数: $1, 2, 3, \cdots$,(0 は入れない)、 数え上げにもちいる。数えることは自然数との 1 対 1 対応をすることです。偶数: $0, \pm 2, \pm 4 \cdots$ (2 で割り切れる数) 、奇数: $\pm 1, \pm 3, \pm 5 \cdots$ (2 で割り切れない数)
- 整数とは自然数の集まりにゼロと自然数に符号をつけた負の数とを合わせたもの。正の整数は $1, 2, 3, \cdots$, で自然数と同じ集まり。非負の整数:$0, -1, -2, -3, \cdots$,
- 分数の形で表せる数を有理数といいます。分数は具体的に割り算をして、小数として表すことが多い。小数どうしの計算では有効桁数が統計学で重要になります。電卓での計算、とくに積や 2 乗の計算には桁上がり、桁落ちには注意します。また指数表示も覚えておきましょう。
- 無理数とは分数の形で表せない数をいいます。たとえば $\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, 2 次方程式、3 次方程式などの解となるものです。さらにこれ以外にも $\pi = 3.1415926538 \cdots, e = 2.71828 \cdots$ 　もありますが、これらはとくに超越数とよばれ、多項式による方程式では表すことができません。有理数は自然数と整数を含むものですし、さらに無理数を合せた集まりを実数とします。数直線には、この実数全体があるものとします。実数以外の数は数直線の上には存在していないものと仮定をします。これを実数の連続性公理とします。
- 複素数とは新たに虚数単位を導入して実数の世界を拡張したものです。負の数の平方根を純虚数とよび、実数と純虚数との和を複素数と定めます。

問 1.1
数のもつ性質にはどんなことがあるか、いくつか挙げてみてください。また演算にはどういうことがありますか？

問 1.2
電卓を用いて計算するときに表示される数を具体的にきちんと書いてみてください。たとえば $2.3E2 = 2.3 * 10^2 = 230, 1.5E-2 = 1.5 * 10^{-2} = 1.5/100 = 0.015$ です。

(1)　$3.14E3$　　(2)　$5.0E10$　　(3)　$6.723E-3$

問 1.3
未知数の含む式について、方程式の解と数の関係はどんなことが知られていますか？

問 1.4
円周率のパイ (π) や自然対数の底に使われるイー (e) はだいたい $\pi = 3.1415926538 \cdots, e = 2.71828 \cdots$ となりますが、どうやって計算するのか考えてみてください。

2　数列

自然数と 1 対 1 の対応

番号	1	2	3	4	$\cdots$	k	$\cdots$
数	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_k	$\cdots$
数	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$\cdots$	$x^{(k)}$	$\cdots$

添え数（番号）が 2 つついているもの (i,j) に対応して $a(i,j), a_{(i,j)}, a_{ij}$ (カッコや誤解がなければカンマを省略することが多い) については 2 重和 $\sum_i \sum_j a(i,j)$ をもちいたり、２つを同時にまとめ、ひとつの $\sum_{i,j} a(i,j)$ で表現します。有限個の和であれば、順序を入れ替えても同じですから、すべて同じ値となります。ただし $\sum_i \sum_j a(i,j)$ と $\sum_j \sum_i a(i,j)$ の表現では前者については、先に j で足し算をしてから i で加え、この順が逆ものが後者です。有限個ではない場合には、一般には順序の交換も一般には成り立ちませんから、複雑になりますが、交換可能となる場合もあります。

3　ベクトルと行列

実数を長方形にならべてカッコでくくったもの。横を行とよび、縦を列とよぶ。数を対応させるために、添え数（インデックス）が組み (i,j) であり、その対応する実数 $a_{i,j}$ を成分あるいは要素とよぶ。、行と列

$$(i,j) \Rightarrow a_{ij}$$

縦 (列）ベクトルと横 (行）ベクトル: ３行１列の行列と１行３列の行列とみなせる

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad (a,b,c)$$

正方行列 (3 行 3 列)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

無限行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

行列の演算: (1) 行列の和 $A+B$, (2) 行列のスカラー倍 cA (c スカラー)。ここでスカラーとはベクトルに対する概念で、実数として考えてよい。また行列の積の計算（内積）; AB, BA などをよく復習しておいてください。

4　和の記号

足し算をする一般項が規則的に表現できるときには、足し算を表す記号（シグマとよび） $\sum$ で書き表します。とくに範囲を指定しなくても自明であれば、和をとるインデックスの範囲を省略することもあります。またインデックスそのものを省略してしまうこともよくあります。

インデックス変数 $k(=1,2,3,\cdots,N)$ に対応する第 k 項が a_k ならば

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_k + \cdots + a_N$$

と表します。また

$$\sum_j x^{(j)} = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} + \cdots + x^{(k)} + \cdots$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} a_{ij} = \quad & a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + \cdots \\ & + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + \cdots \\ & + \cdots\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} = \{a_{11} + a_{12}\} + \{a_{21} + a_{22}\} + \{a_{31} + a_{32}\}$$

という意味を表しています。範囲があらかじめ分かっている場合には省略をすることが多いです。インデックス変数には自然数がよく用いられます。

和を求める計算式

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$$

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = nc \quad \text{（ n 個の定数和）}$$

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)}/k = 1 - 1/2 + 1/3 + \cdots + (\pm 1)^n/n$$

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{（2 乗和の公式）}$$

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

問 4.1
（積が 3 つ）各項が 3 個の積のとき、$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ がどういう式にまとめられるか考えなさい。そして実際いくつかについて確かめてみなさい。

問 4.2
（3 乗和の計算）$\sum_{k=1}^{n} k^2$ を、上の問いで得られた結果ももちいて、求めてみなさい。

問 4.3
（三角型の和）$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{kj}$ をそれぞれの項で書き並べてみましょう。この和のとり方の順序がはじめ、列をとってから、行で加える順ですが、この順序を逆にしてはじめは行でとり、あとから列を加えることにすると、シグマを用いるとどういう式になりますか？

問 4.4
つぎの数列の和をシグマにより表現しなさい。

1. $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{31}$
2. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$
3. $\frac{1}{1} + (\frac{2}{1} + \frac{2}{2}) + (\frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3}) + (\frac{4}{1} + \frac{4}{2} + \frac{4}{3} + \frac{4}{4}) + \cdots$

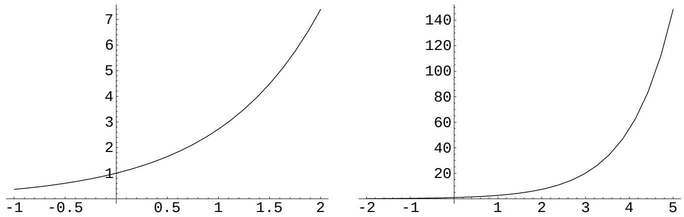

図 1: 指数関数 (その１) $y = \exp(x)$

5　極限、級数

数列の和に関して、項の数をどんどん大きくしていった状況を考えてみます。有限個で終わるのではなく、無限に続いて多数の項をもつ数列を級数といいます。もしこの和を順次計算していったとき、項数とともに増加あるいは減少していく傾向をもち、ある一定の値に近づくならば、この極限値を級数の和といいます。つまり、部分和の極限値として

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

と表します。しかし一般項がゼロに近づいていても、和をもつ（有限和の極限値が存在する）とは限りません。たとえば $a_n = 1/n$ などはその例です。これよりももっと早くゼロになるような項でなければ、和をもちません。またここで収束する (convergent)、つまり $S_n \to s (n \to \infty)$ であることは絶対値で表される距離 $|S_n - s|$ が n の増加としたがい、ゼロに近づくことです。記号では $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ と表します。

6　対数、指数関数

確率や統計では、コイン投げ、サイコロ振りを多数回繰り返した場合をよく考えます。どんどんと繰り返し数を多くしていくので、数列の極限を調べることがとても重要な基本事項となります。このときに表れる関数が、対数関数や指数関数です。概要をつぎで述べてみましょう。

指数関数: 「べき」とは乗積のことで、正の数 $a > 0$ を m 乗するとは、$a^m = aa\cdots a$ で明らかに $a^m a^n = a^{m+n}$ などが成り立ち m を指数とよび、この性質を指数法則といいます。m は自然数だけでなく負とでもよくて、一般に整数であっても法則が成り立ち、さらに分数、実数についても拡張して定義されます。

たとえば利率の計算では、元金が a 円あり、複利の利率が各期間ごとに r_n であれば、n 期日後には $a(1+r_n)^n$ となります。もし利率の値 $r_n = r/n$ であり、n を大きくすると（利率の計算期間を細かくしていくこと)、$a\lim_n(1+r_n)^n$ を考えることです。基本的な項は $r = 1$ とおいた $\lim_n(1+\dfrac{1}{n})^n$ で、これは少しづつ増加し、数値 3 を超えることはない。この極限値を $e = 2.71828\cdots$ と表します。一般に $\lim_n(1+r_n)^n = e^r = \exp r$ とも表します。この r を変化させた値がいわゆる $y = \exp x, x > 0$ が指数関数とよばれるものです。先の述べた a^m の形が e^x となっています。

対数関数: 上で述べた指数関数は、べき乗を細かくすることで表れた関数でしたが、対数関数は、指数関数の逆関数として定義されます。大きな数を計算するときはたいへん重要な役割をします。計算機が十分に発達していない時代には対数表とよばれるものを用いて、大きな数の計算をしていました。

与えられた指数関数に対して、その逆の対応を表す

$$y = e^x = \exp x \quad \leftrightarrow \quad x = \log y$$

ものです。独立変数 x から従属変数 y の形で書けば、$y = \log x$ と表します。これは電卓などでは $y = Ln(x)$ とキー入力します。実用上の計算には e の代わりに 10 を用いて、$y = Log(x)$ とキー入力します。ここでは省略していますが対数の底（てい）が e（ネイピア数ともよばれる）の場合、つまり自然対数の場合と一方は底が 10 の場合での常用対数のものです。実用上の計算には、常用対数が便利ですが、理論の展開には自然対数のほうが表現が簡単になるときが多いです。どちらを使っても本質は変わりません。

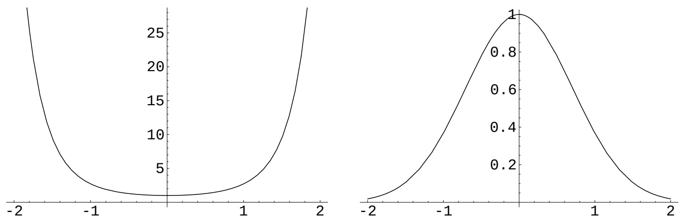

図 2: 指数関数 (その 2) $y = \exp(x^2)$ と $y = \exp(-x^2)$

7　集合

ある定まった数学的な対象の集まりあるいは集団を**集合** (set) とよび，この集合を構成する一つ一つの対象を集合の要素 (element) あるいは、元という．一般に，集合は大文字をつかい A, B などと表し、この要素は小文字 x, y などをもちいる。ある要素 x が集合 A に属する (belong) かどうかによって定められている。もし属するならば $x \in A$ と表す．また，逆に，A の要素でないときは $x \ni A$ と表す.

要素を並べ、括弧でくくることで $\{a, b, c, d, e\}$ や $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ と表したり, あるいは {要素—条件} の形をもちいて、$\{x_i | i = 1, 2, 3, \cdots\}$ や $\{x | a < x \leqq b\}$（つまり実数の半開区間 $(a, b]$）などの表し方ももちいる。

とくに集合の中で全くこれに属する要素をもたない場合には**空集合** (empty set) とよび、$\emptyset$ で表す。2 つの集合において $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ が成り立つとき、$A \subset B$ で表す。$A \subseteq B$ も同じ意味でこのとき、A は B の**部分集合**という。$A = B$ とは、それぞれの部分集合であるときをいう。とくに真の部分集合とは $A \subset B$ かつ $A \neq B$ のときであり、$A \subsetneq B$ で表す。

元（要素）の個数が有限個しか含まれないときを有限集合、そうでない場合、自然数の全体とか、実数の全体は無限集合という。

和集合と積集合 数と数のあいだに足し算や引き算があるように、集合と集合のあいだにも演算を考える。

$$\text{和集合：}\quad A \cup B = \{x \mid x \in A \,\mathrm{or}\, x \in B\}$$

$$\text{積（共通）集合：}\quad A \cap B = AB = \{x \mid x \in A \,\mathrm{and}\, x \in B\}$$

$\cap$ を省略することもある。数の掛け算でも多くは省略している。

積集合が空集合のとき、$A \cap B = AB = \emptyset$ には**互いに素**、あるいは共通部分がない、交わりをもたないなどという。**差集合**とは $A \setminus B = \{x \mid x \in A \,\mathrm{and}\, x \notin B\}$ いま対象とる全体の集合を Ω(オメガ) とするとき, この全体集合 Ω から A を引いた差集合、$\Omega \setminus A$ を A の**補集合** (complement) といい、全体集合を明示せずに A^c や $\overline{A}$ という記号をもちいる。

交換法則と結合法則 : 演算の順序をかえることでも同じ場合にこの法則が成り立つという。$A \cup B = B \cup A$ などや $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ など。したがって単にカッコをもちいず $A \cup B \cup C$ と表しても問題ないということでこの表現が意味をもつことになる。よって一般に多数のばあいについては

$$\text{和集合：}\quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_i A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

$$\text{積集合：}\quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_i A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

と表す。分配法則：３つの集合に対して、和と積の順序について交換するとどうなるかという関係式をいう。これをみれば明らかなように通常の数の演算 $+, \times$ が集合の和、積に対応している。

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ドモルガン (de Morgan) の法則: 和と差、あるいは積と差のあいだの分配法則をあらわすもの、

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

一般に n 個の集合 $A_i, i = 1, 2, \cdots, n$ についても同様に

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}.$$

２つの集合の直積: それぞれの集合からとった作られる順序のついた全体からなる集合を**直積**といい、$A \times B$ で表す。$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ 掛け算の記号をつかっているが、その内容には注意をする。もし $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であれば、$A \times A$ は 36 個の要素をもつ $(i, j); i, j = 1, 2, \cdots, 6$ からなる集合でとなる。これはサイコロを 2 個投げたときに出るすべての目の組の可能性を列挙したものとなる。

集合族、べき集合：集合の集合、つまり元（要素）がまた集合となっているものを集合族 (a family of sets) という。とくに**べき集合** (power set) とは記号で集合 A の部分集合全体 2^A で表す。たとえば $A = \{2, 4, 5\}$ の 3 個の有限集合ならば $2^A = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$ の $2^3 = 8$ 個の集合となる。

上極限集合、下極限集合：無限個の集合族について積や和をとったの概念である。数に対する集合でも同じような概念が、集合の無限列についても定義されている。これは確率の定義をするときには重要な働きをする。

8 写像

写像 (map,mapping) の定義は 2 つの集合 A, B において一つの要素 $x \in A$ から他の一つ $y \in B$ への対応があるとき、これを f と表し、$f : A \longrightarrow B$ つまり $y = f(x), x \in A, y \in B$ とおく。

像 (image) と逆像 (inverse image)： 写像 f で、$b = f(a)$ のとき、b を a の像といい、a を b の原像という。集合についてある部分集合 A_1 で、$A_1 \subset A$ のとき、$f(A_1) = \{f(a) \mid a \in A_1\}$ を A_1 の像といい、ある部分集合 B_1 で、$B_1 \subset B$ のとき、$f^{-1}(B_1) = \{a \mid f(a) \in B_1\}$ を B_1 の逆像という。

定理 写像 $f : A \longrightarrow B$ でつぎの集合間の関係式が成り立つ (ただし $A_i \subset A, B_i \subset B, i = 1, 2$).

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$　　(2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$　(部分集合となる)

(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$　　(4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(5) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$　(部分集合となる)　　(6) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$　(部分集合となる)

なぜなら (2) については

$$\begin{aligned} & \{b \in B \mid b = f(a), \exists a \in A_1 \cap A_2\} \\ \subset \quad & \{b \in B \mid (b = f(a_1), \exists a_1 \in A_1) \,\text{and}\, (b = f(a_2), \exists a_2 \in A_2)\} \end{aligned}$$

であるから。

問 8.1

たとえば実数上の 2 次関数 $f(x) = x^2$ において上の例になる集合をあげてみよ。答えのひとつにはつぎがあり、他の例も各自考えてみよ。$A_1 = [-3, 1], A_2 = [-1, 2], B_1 = [-1, 1]$

写像としてとくに実数の集合を考えるには関数とよぶことがふつうであり、関数の定められている範囲やとり得る値の範囲を定義域 (domain)、 値域 (range) とよぶ。また 2 つの関数の合成関数 $f \circ g(x) = f(g(x))$ とか逆関数 f^{-1}、対数関数の逆関数として指数関数、指数関数の逆関数として対数関数、$f(x) = x^2\ (x \geq 0)$ の逆関数として $f^{-1}(x) = \sqrt{x}\ (x \geq 0)$ も定義される。逆三角関数は三角関数の逆関数である。

9 平方根の開平

ルートの計算値を手計算で求めましょう。電卓がないと計算できないことはありません。つぎのように求められます。知っておいたほうがよいです。

たとえば、$\sqrt{2} = 1.4142213562$ と電卓では出てきますが、あるいは少し欲張ると、1.4142135623730950488 ぐらいはパソコンでもでてきます。しかし機械に頼るではなく、理由を考えることもとても大切なことなのです。

かんたんなものから、始めます。$256 = 16^2$ ですから、これを考えてみます。手順をしてこれの理由を述べましょう。

(1) 1の位から2桁づつに仕切りをいれます。2 と 56 に分かれます。(2) 左端からはじめて順次に進めます。平方して 2 を越えない最大の自然数を求めます。これは 1 です。 2 であれば、4 となり、2 を越えてしまいます。この最大の数を縦に書きます。

$$
\begin{array}{lcl}
 & & 1 \\
1 & & \sqrt{2\ 56} \\
1 & & 1 \\
\hline
2 & & 1\ \ 56
\end{array}
$$

(3) つぎは $\begin{array}{r} 2\,x \\ \times\ \ x \\ \hline y \end{array}$ の掛け算で、答え y が 156 を越えない数 x を考えます。これは $x = 6$ と求められるでしょう。$26 \times 6 = 156$ となりますから、これを右側に書き、元の値から引き算をして、答えは 0 となり、これで終了です。

$$
\begin{array}{lcl}
 & & 1\ \ 6 \\
1 & & \sqrt{2\ 56} \\
1 & & 1 \\
\hline
26 & & 1\ \ 56 \\
6 & & 1\ \ 56 \\
\hline
 & & \quad\ \ 0
\end{array}
$$

結局、$\sqrt{256} = 16$ が得られることになりました。(4) もし引き算の答えが 0 でなかったら、繰り返します。2 桁づつ下ろしてきてます。(4) 仮に先ほどの引き算がゼロでなければ、$26 + 6 = 32$ ですから、$\begin{array}{r} 32\,x \\ \times\ \ x \\ \hline y \end{array}$ の掛け算で、答え y が下ろしてきた数を越えないように x を定めていきます。

さて問題はどうしてこのような手順で開平（平方根の計算）ができたのでしょうか？ヒントは $(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$ で $a = 1$, $b = 6$ がいまの場合に対応しているのです。問いとして、上の $\sqrt{2}$ を計算してみてください。

また計算機のアルゴリズムを考えてみることもプログラムのよい練習になります。