

Quandle Cocycle Invariants and Their Application to Surface Knots

浅見 聡一郎

千葉大学大学院自然科学研究科
数理物性科学専攻連関数物科学

Introduction

論文の主題

カンドルコサイクル不変量を用いた
曲面結び目の位相幾何学的性質の研究

Introduction

論文の主題

カンドルコサイクル不変量を用いた
曲面結び目の位相幾何学的性質の研究

- 曲面結び目：4次元空間 $\mathbb{R}^4$ 内の閉曲面

Introduction

論文の主題

カンドルコサイクル不変量を用いた
曲面結び目の位相幾何学的性質の研究

- **曲面結び目**：4次元空間 $\mathbb{R}^4$ 内の閉曲面
- **カンドルコサイクル不変量**：90年代後半に定義された曲面結び目の不変量

Classical Knots

- 結び目 (classical knot) :

Classical Knots

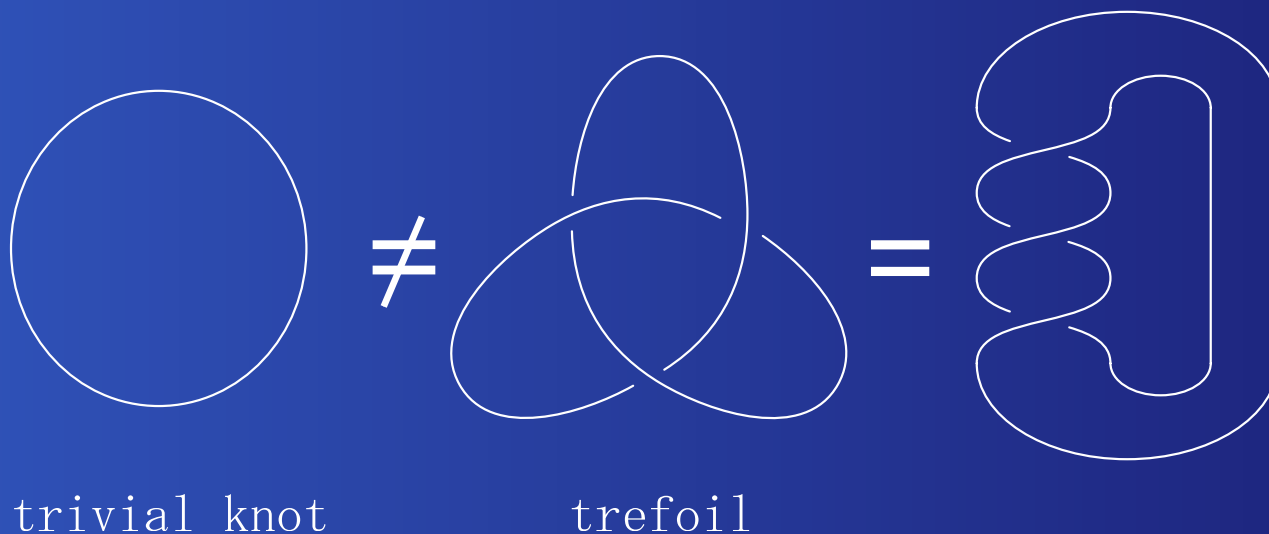
- 結び目 (classical knot) :
3次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の単純閉曲線

Classical Knots

- 結び目 (classical knot) :
3次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の単純閉曲線
- 連続的に変形して同じ形に出来る2つの結び目は同じ結び目であると定義する.

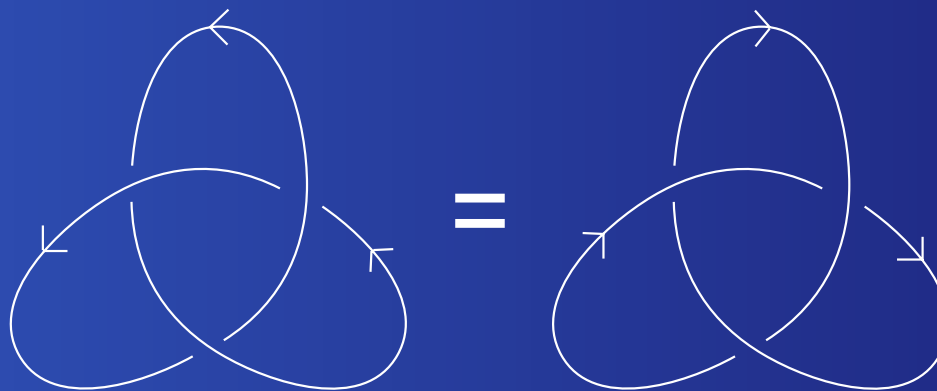
Classical Knots

- 結び目 (classical knot) :
3次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の単純閉曲線
- 連続的に変形して同じ形に出来る2つの結び目は同じ結び目であると定義する.



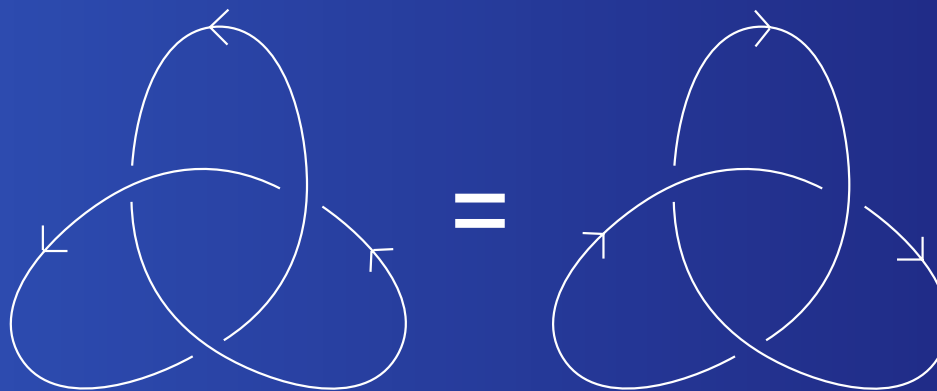
Classical Knots

● 可逆

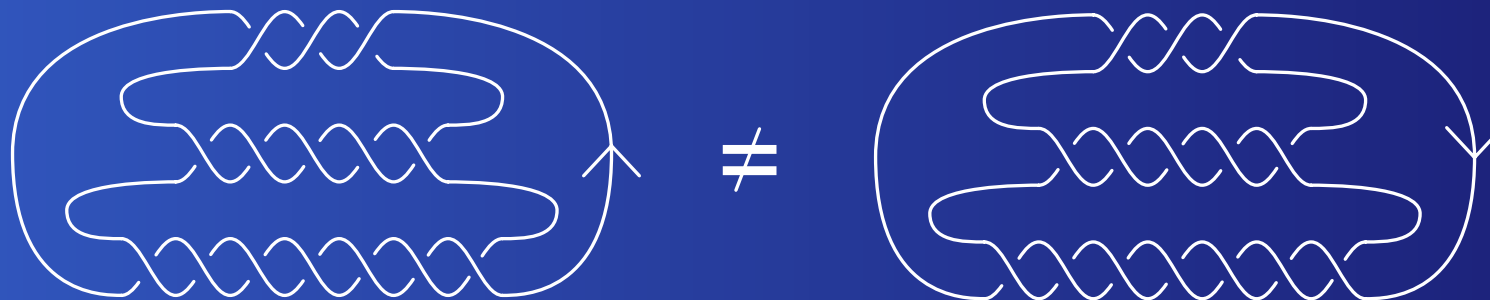


Classical Knots

● 可逆



● 不可逆



Classical Knots

結び目理論

与えられた2つの結び目が同じかどうか
を研究するトポロジーの1分野

Classical Knots

● 射影図：

Classical Knots

- 射影図：射影 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ による結び目の像

Classical Knots

- 射影図：射影 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ による結び目の像
- 交点：射影図の2重点



Classical Knots

- 射影図：射影 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ による結び目の像
- 交点：射影図の2重点



- 最小交点数：

Classical Knots

- 射影図：射影 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ による結び目の像
- 交点：射影図の2重点

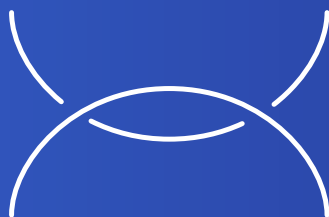


- 最小交点数：
結び目 K の全ての射影図のうち交点の数が最も少ない射影図の交点数

Reidemeister Moves



Type I



Type II



Type III

Surface Knots

- 曲面結び目 (Surface Knot) :

Surface Knots

- 曲面結び目 (Surface Knot) :
4次元空間 $\mathbb{R}^4$ 内の閉曲面

Surface Knots

- 曲面結び目 (Surface Knot) :
4次元空間 $\mathbb{R}^4$ 内の閉曲面
特に $\mathbb{R}^4$ 内の2次元球面を2次元結び目という.

Surface Knots

- 曲面結び目 (Surface Knot) :
4次元空間 $\mathbb{R}^4$ 内の閉曲面
特に $\mathbb{R}^4$ 内の2次元球面を2次元結び目という.
- 結び目の場合と同様に曲面結び目に対しても
同値性や(不)可逆性が定義される.

Surface Knots

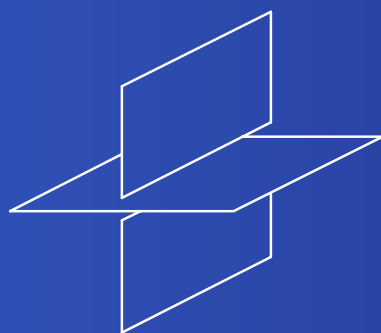
● 射影図：

Surface Knots

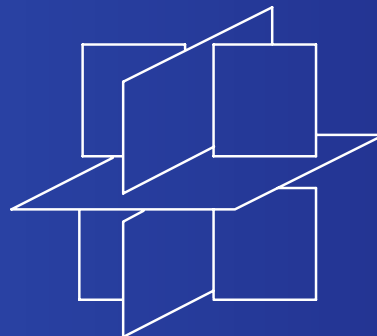
- 射影図：射影 $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ による曲面結び目の像

Surface Knots

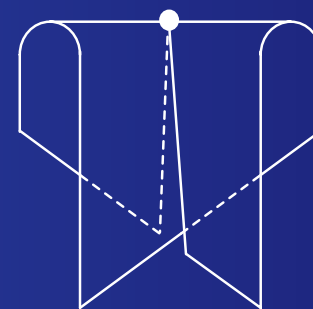
- **射影図**：射影 $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ による曲面結び目の像



2重線



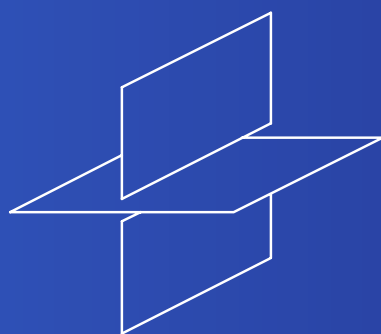
3重点



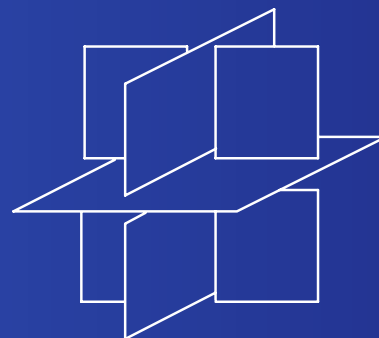
ブランチ点

Surface Knots

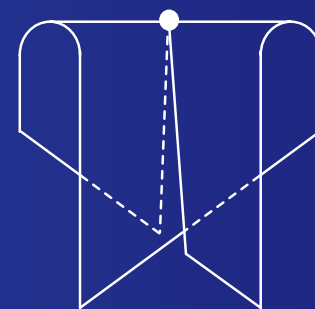
- **射影図**：射影 $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ による曲面結び目の像



2重線



3重点



ブランチ点

曲面結び目

結び目

3重点

$\longleftrightarrow$

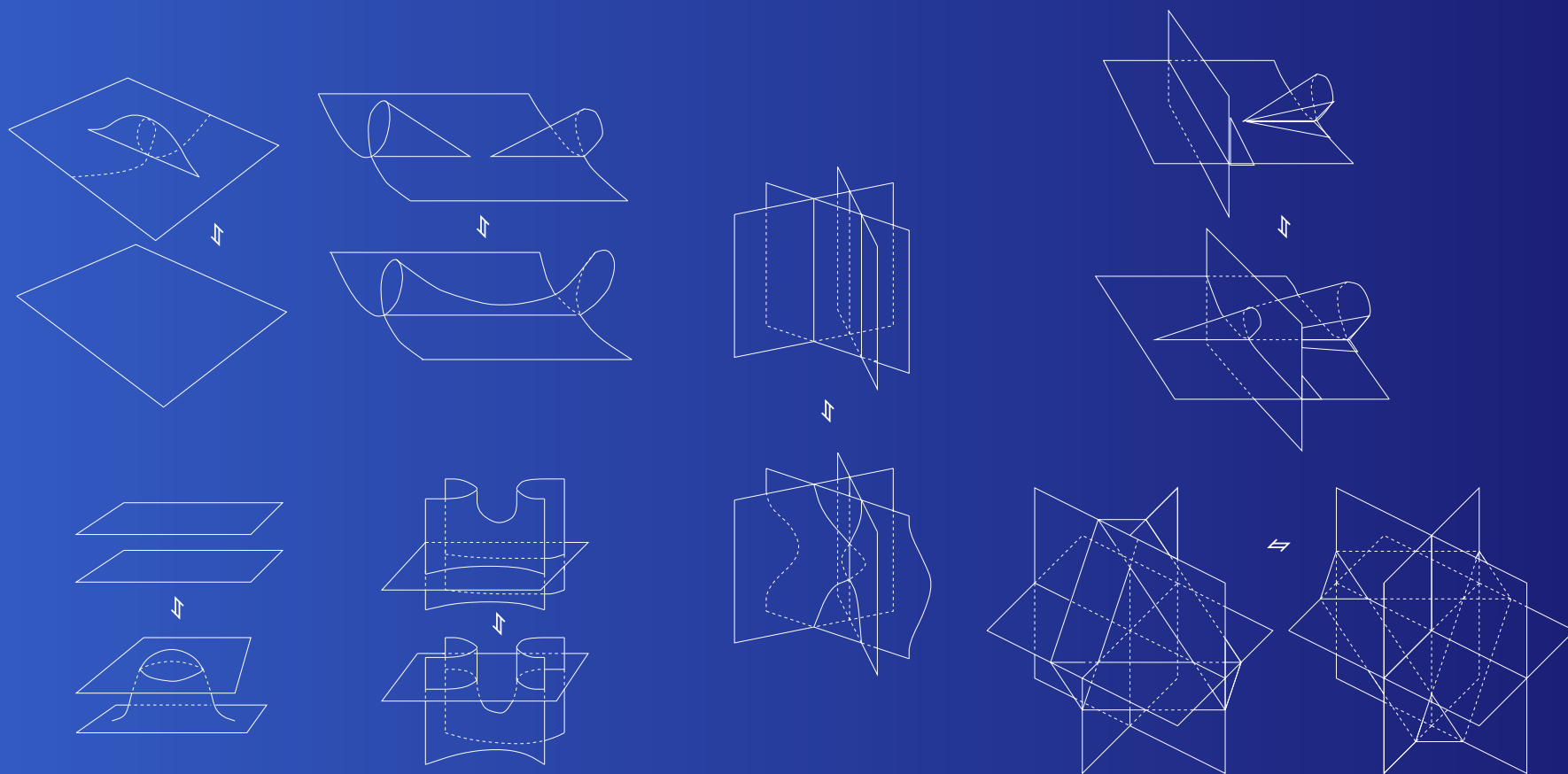
交点

最小3重点数

$\longleftrightarrow$

最小交点数

Roseman Moves



Quandles

集合 X の二項演算 $* : X \times X \rightarrow X$ が次の条件をみたすとき, **quandle** という.

Quandles

集合 X の二項演算 $* : X \times X \rightarrow X$ が次の条件をみたすとき, **quandle** という.

$$(1) \quad \forall x \in X, \quad x * x = x$$

Quandles

集合 X の二項演算 $* : X \times X \rightarrow X$ が次の条件をみたすとき, **quandle** という.

$$(1) \quad \forall x \in X, \quad x * x = x$$

$$(2) \quad \forall x, y \in X, \quad \exists_1 z \in X \text{ s.t.}$$

$$x = z * y$$

Quandles

集合 X の二項演算 $* : X \times X \rightarrow X$ が次の条件をみたすとき, **quandle** という.

$$(1) \quad \forall x \in X, \quad x * x = x$$

$$(2) \quad \forall x, y \in X, \quad \exists_1 z \in X \text{ s.t.}$$

$$x = z * y$$

$$(3) \quad \forall x, y, z \in X,$$

$$(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$$

Quandles

It's simply that I needed a word that hadn't been used before. I had considered "conjugation algebra" but that's too long, so I made up a word.

– David Joyce

Quandles

It's simply that I needed a word that hadn't been used before. I had considered "conjugation algebra" but that's too long, so I made up a word.

— David Joyce

例 (dihedral quandle)

$$R_p = (\mathbb{Z}_p, *), p: \text{奇素数}$$

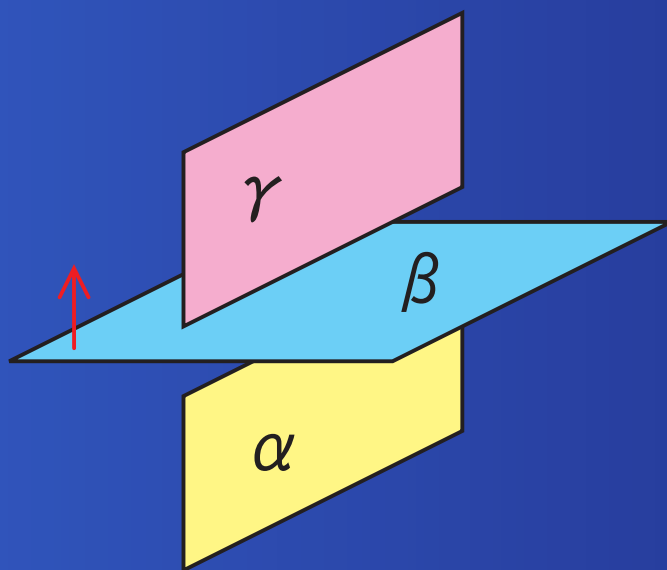
$$x * y \equiv 2y - x \pmod{p}$$

Colorings

D : 曲面結び目 F の射影図, X : quandle

$$C : \{D \text{ の sheet 全体} \} \rightarrow X$$

で次の条件をみたすものを, **coloring** という

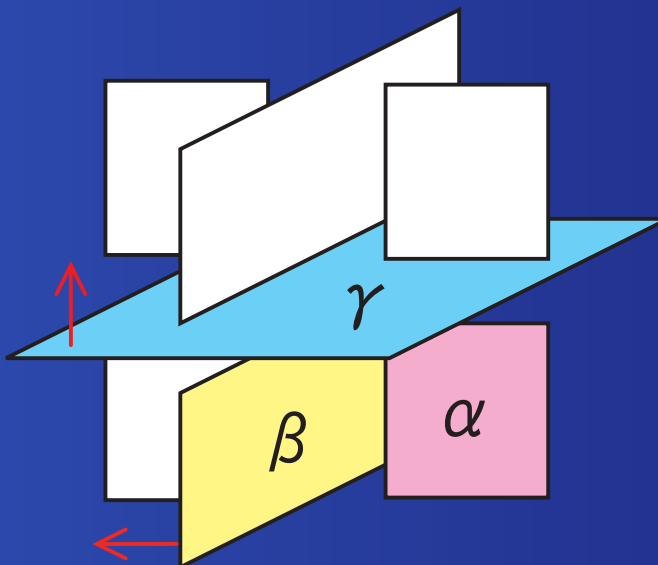


$$C(\gamma) = C(\alpha) * C(\beta)$$

Colorings

射影図の各3重点 t に対して

$$\text{Col}(t) = (C(\alpha), C(\beta), C(\gamma)) \in X^3$$



を t の **color** という.

Quandle Cohomology

X : quandle, G : Abel 群, $\theta : X^n \rightarrow G$

Quandle Cohomology

X : quandle, G : Abel 群, $\theta : X^n \rightarrow G$
 $C^n(X; G)$: θ により生成される自由 Abel 群

Quandle Cohomology

X : quandle, G : Abel 群, $\theta : X^n \rightarrow G$

$C^n(X; G)$: θ により生成される自由 Abel 群

$\delta^n : C^n(X; G) \rightarrow C^{n+1}(X; G)$ 境界作用素

Quandle Cohomology

X : quandle, G : Abel 群, $\theta : X^n \rightarrow G$

$C^n(X; G)$: θ により生成される自由 Abel 群

$\delta^n : C^n(X; G) \rightarrow C^{n+1}(X; G)$ 境界作用素

$$(\delta^n \theta)(x_1, \dots, x_{n+1}) =$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \left(\theta(x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_{n+1}) \right.$$

$$\left. - \theta(x_1 * x_k, \dots, x_{k-1} * x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) \right).$$

Quandle Cohomology

X : quandle, G : Abel 群, $\theta : X^n \rightarrow G$

$C^n(X; G)$: θ により生成される自由 Abel 群

$\delta^n : C^n(X; G) \rightarrow C^{n+1}(X; G)$ 境界作用素

$$(\delta^n \theta)(x_1, \dots, x_{n+1}) =$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \left(\theta(x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_{n+1}) \right.$$

$$\left. - \theta(x_1 * x_k, \dots, x_{k-1} * x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) \right).$$

$H^*(X; G)$: **quandle cohomology**

Quandle Cocycle Invariants

D : 曲面結び目 F の射影図

Quandle Cocycle Invariants

D : 曲面結び目 F の射影図

C : quandle X による D への coloring

Quandle Cocycle Invariants

D : 曲面結び目 F の射影図

C : quandle X による D への coloring

3-cocycle $\theta \in Z^3(X; G)$ に対して

Quandle Cocycle Invariants

D : 曲面結び目 F の射影図

C : quandle X による D への coloring

3-cocycle $\theta \in Z^3(X; G)$ に対して

$$W_\theta(C) = \prod_t \theta(\text{Col}(t))^{\varepsilon(t)} \in G$$

$$\Phi_\theta(D) = \sum_C W_\theta(C) \in \mathbb{Z}[G]$$

とおく. ただし $\varepsilon(t)$ は t の符号

Quandle Cocycle Invariants

—— 定理 (Carter et al '99) ——

$\Phi_\theta(D)$ は曲面結び目の不変量

Quandle Cocycle Invariants

—— 定理 (Carter et al '99) ——

$\Phi_{\theta}(D)$ は曲面結び目の不変量

—— 定理 (Carter et al '99) ——

$$[\theta] = [\theta'] \implies \Phi_{\theta} = \Phi_{\theta'}$$

Mochizuki's 3-cocycle

—— 定理 (Mochizuki '02) ——

$$H^3(R_p; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$$

Mochizuki's 3-cocycle

定理 (Mochizuki '02)

$$H^3(R_p; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & 4(x - y)(y - z)z^{p-1} \\ & - (x - y)^2 \left(y^{p-1} - (2z - y)^{p-1} \right) \\ & + (x - y) \frac{(2z - y)^p + y^p - 2z^p}{p} \end{aligned}$$

が生成元

Mochizuki's 3-cocycle

定理 (Asami, Satoh)

$\theta_p \in Z^3(R_p; \mathbb{Z}_p)$ を

$$\theta_p(x, y, z) = (x - y) \frac{(2z - y)^p + y^p - 2z^p}{p}$$

により定義する. このとき

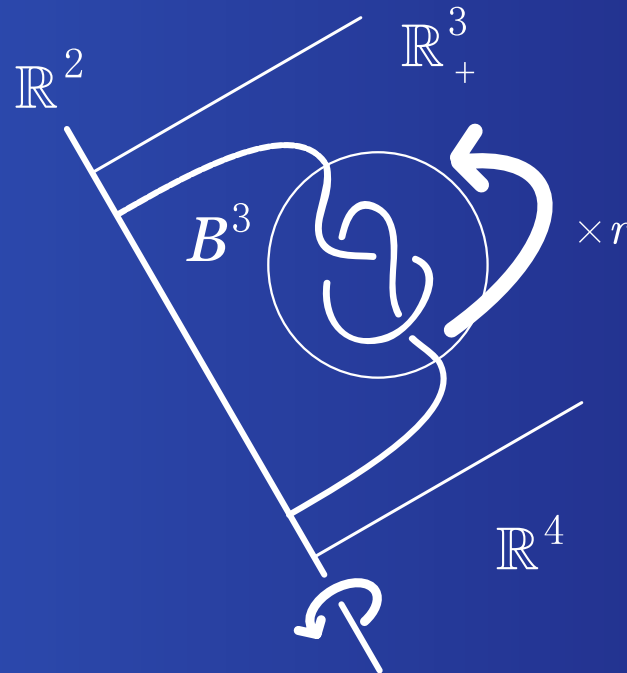
$$[f] = [\theta_p]$$

主題 1

カンドルコサイクル不変量を用いた曲面
結び目の不可逆性についての研究

Twist-Spins

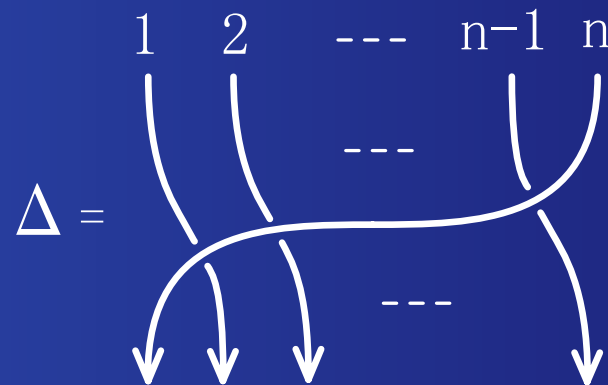
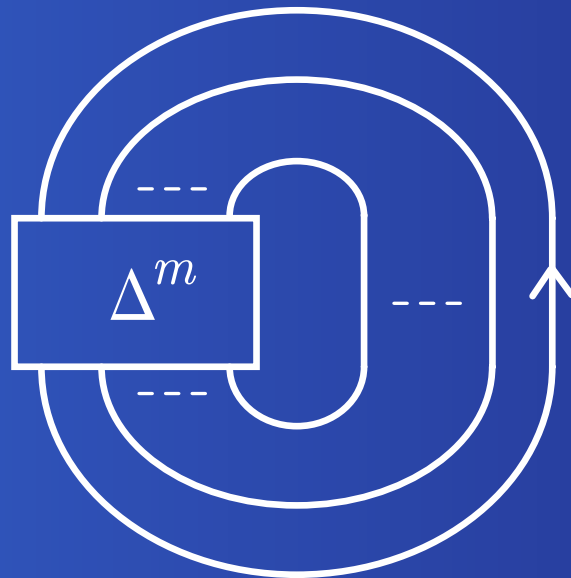
K : classical knot, K_0 : K の tangle



$\tau^r(K)$: K の r -twist-spin

Torus Knots

$T(m, n) : (m, n)$ -torus knot
 $m, n \geq 2, (m, n) = 1$



— 定理 (Asami, Satoh) —

$\tau^r(T(m, n))$ が非自明な R_p -彩色を持つとき

$$\Phi_{\theta_p}(\tau^r(T(m, n))) =$$

$$p \left(\sum_{i=0}^{p-1} t^{-\frac{mnr}{2p} i^2} \right) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] / (t^p - 1)$$

ただし $\mathbb{Z}_p = \langle t | t^p = 1 \rangle$

—— 定理 (Gordon '04) ——

トーラス結び目の twist-spin は不可逆.

—— 定理 (Gordon '04) ——

トーラス結び目の twist-spin は不可逆.

—— 定理 (Asami, Satoh) ——

各 $g \geq 0$ に対して種数 g の不可逆な曲面結び目が無限個存在する.

主題 2

カンドルコサイクル不変量の整数性についての研究

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{最小3重点数} = 0, \text{ or} \\ \text{自明な彩色しか持たない} \end{array} \right. \Rightarrow \Phi_{\theta}(F) \in \mathbb{Z} \quad \text{True}$$

$$\begin{cases} \text{最小3重点数} = 0, \text{ or} \\ \text{自明な彩色しか持たない} \end{cases} \Rightarrow \Phi_{\theta}(F) \in \mathbb{Z} \quad \text{True}$$

$$\begin{cases} \text{最小3重点数} \neq 0, \text{ and} \\ \text{非自明な彩色を持つ} \end{cases} \Rightarrow \Phi_{\theta}(F) \notin \mathbb{Z} \quad ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{最小3重点数} = 0, \text{ or} \\ \text{自明な彩色しか持たない} \end{array} \right. \Rightarrow \Phi_{\theta}(F) \in \mathbb{Z} \quad \text{True}$$

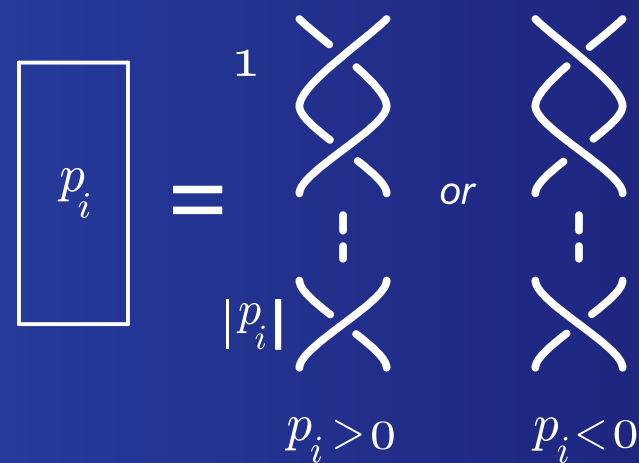
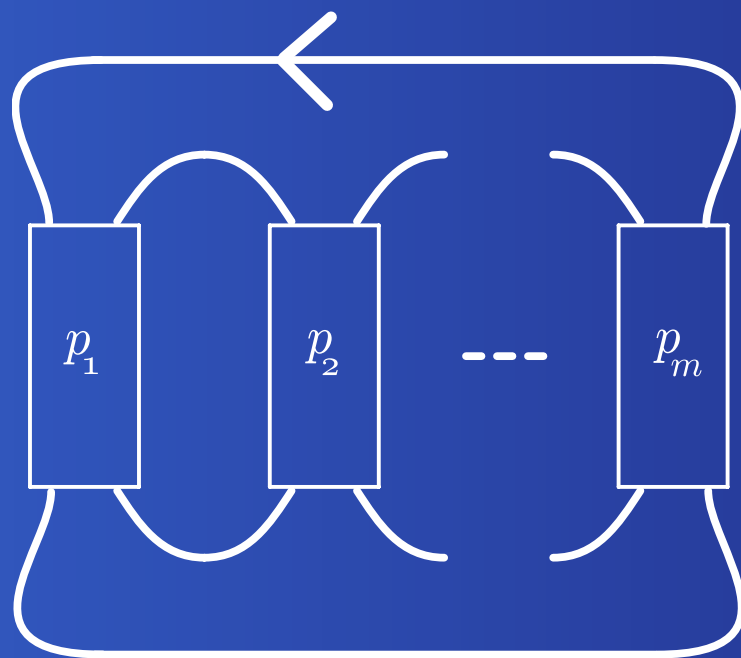
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{最小3重点数} \neq 0, \text{ and} \\ \text{非自明な彩色を持つ} \end{array} \right. \Rightarrow \Phi_{\theta}(F) \notin \mathbb{Z} \quad \text{False}$$

—— 定理 (Sato, Shima '03) ——

最小3重点数が3の曲面結び目の R_3 に関するカ
ンドルコサイクル不変量は整数

Pretzel Knots

$P(p_1, \dots, p_m)$: alternating odd pretzel knot
 $p_i > 0$ or $p_i < 0$ for $\forall i$, $p_1, \dots, p_m, m$: 奇数



定理 (Asami)

$\tau^r(P)$ が R_p による非自明な彩色を持つとき任意の 3-cocycle $\theta \in Z^3(R_p; \mathbb{Z}_p)$ に対して

$$\Phi_\theta(\tau^r(P)) = \begin{cases} p^2 & p | p_1, \dots, p_m, \\ p^n & p | p_{i_1}, \dots, p_{i_n}, \\ & n \geq 2 \end{cases}$$

—— 定理 (Asami) ——

最小3重点数が0でなくかつ非自明な彩色を持つ曲面結び目で R_p に関するカンドルコサイクル不変量が常に整数となるものが存在する.