

# Quandle Cocycle Invariants and Their Application to Surface Knots

## カンドルコサイクル不変量と 曲面結び目への応用

千葉大学大学院自然科学研究科  
数理物性科学専攻連関数物科学

浅見 聡一郎

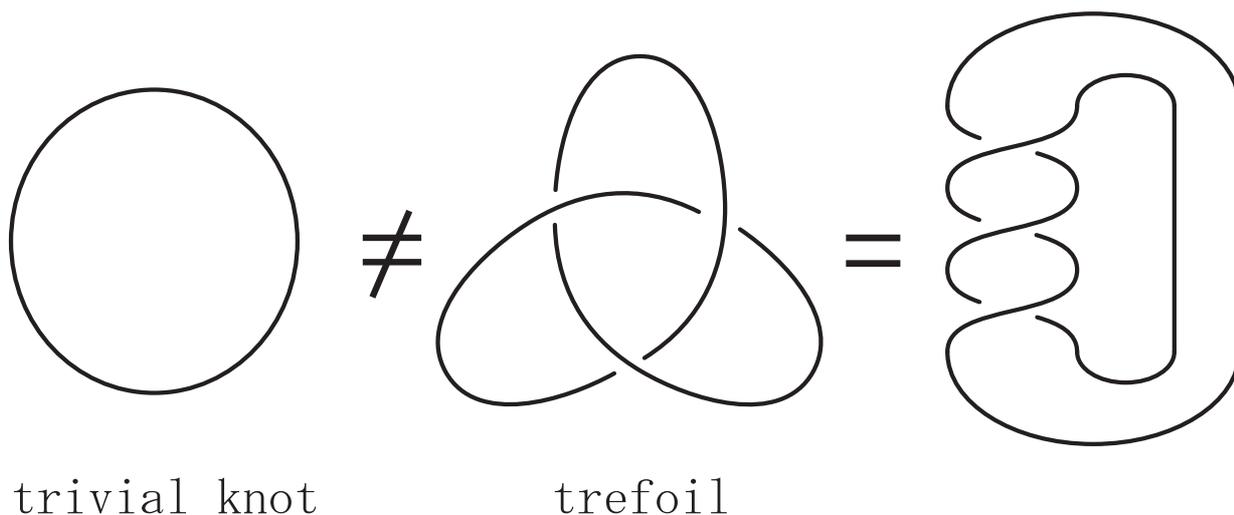
## 論文の主題

カンドルコサイクル不変量（と呼ばれる最近定義された不変量）を用いた曲面結び目（ $\mathbb{R}^4$  内の閉曲面）の位相幾何学的性質の研究

# Introduction

**結び目** : 3次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の単純閉曲線

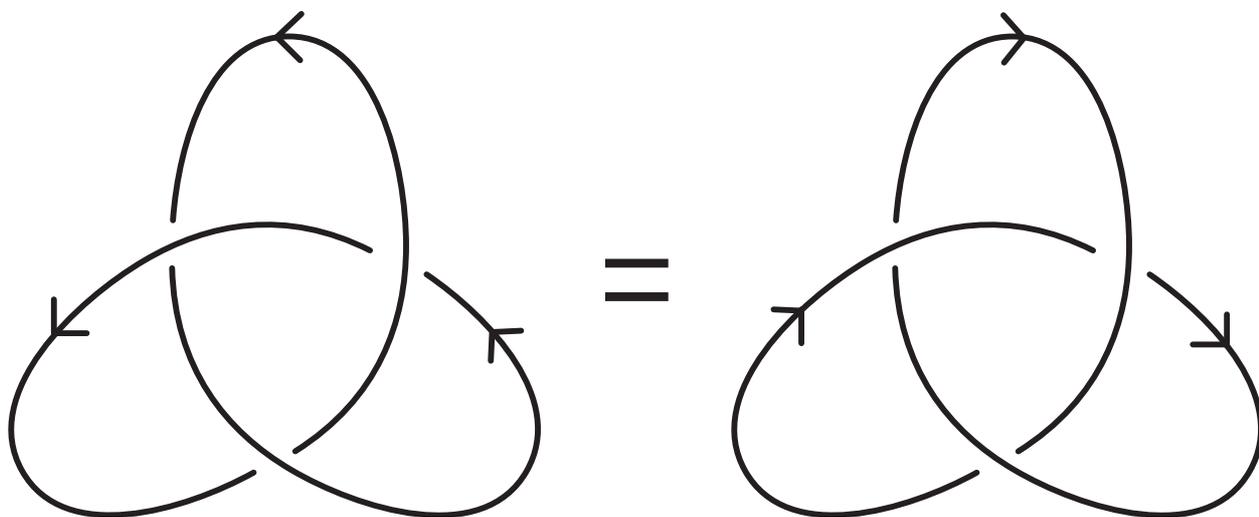
連続的に変形して同じ形に出来る2つの結び目は**同じ**結び目であると定義する。



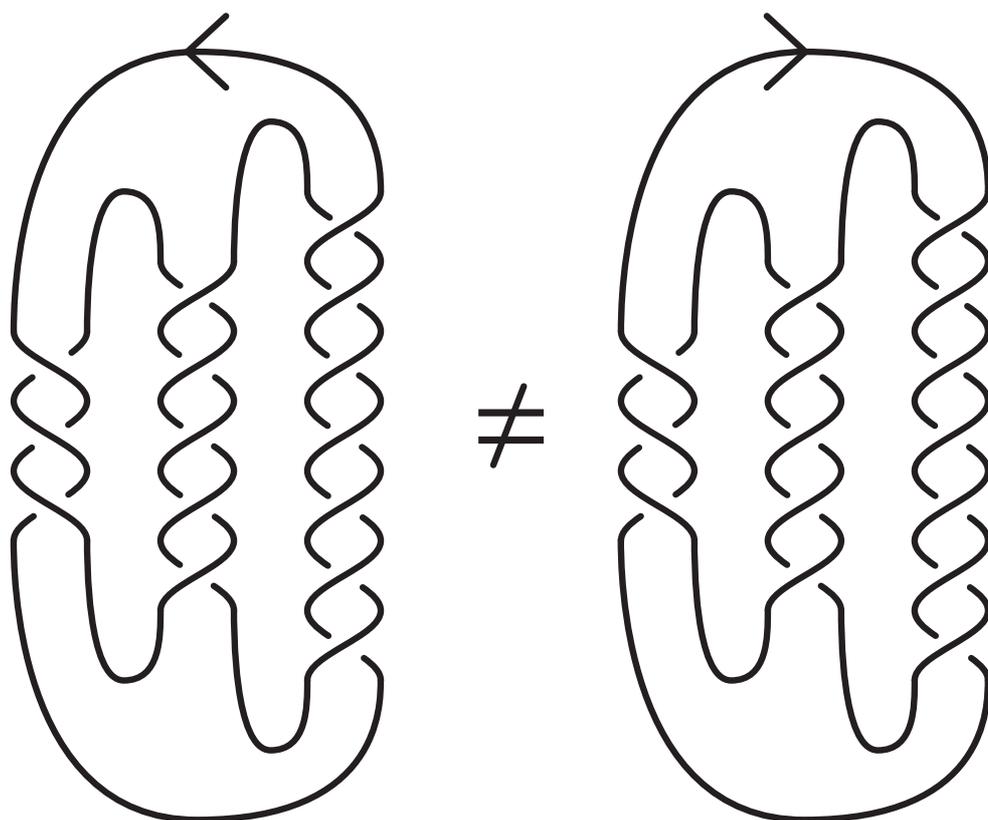
## 結び目理論

与えられた2つの結び目が同じかどうかを研究するトポロジーの1分野

可逆



不可逆

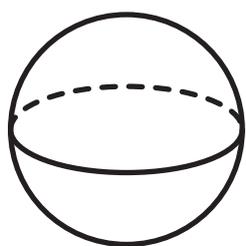


**射影図**：射影  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  による結び目の像

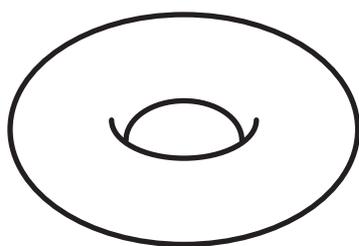
**最小交点数**：結び目  $K$  の全ての射影図のうち交点の数が最も少ない射影図の交点数

**曲面結び目** : 4次元空間 $\mathbb{R}^4$ 内の閉曲面

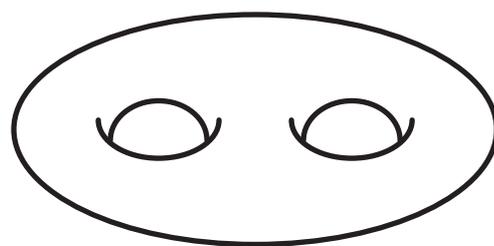
特に, $\mathbb{R}^4$ 内の2次元球面を**2次元結び目**という.



2次元球面  
(種数0の閉曲面)



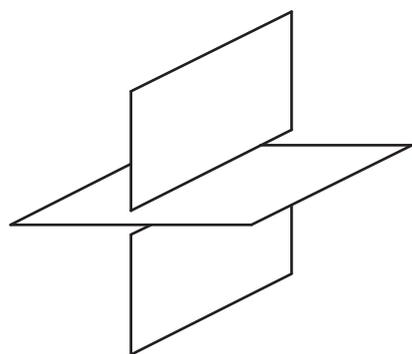
トーラス  
(種数1の閉曲面)



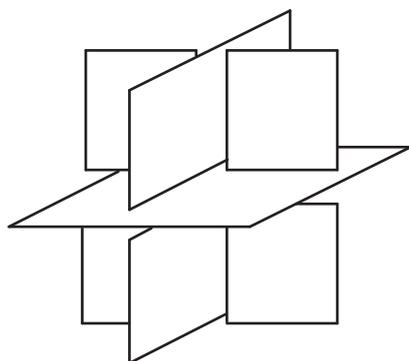
種数2の閉曲面

結び目の場合と同様に曲面結び目に対しても**同値性**や**(不)可逆性**が定義される.

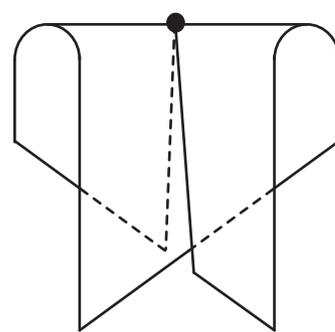
**射影図**：射影  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  による曲面結び目の像  
の像



2重線



3重点



ブランチ点

曲面結び目		結び目
3重点	↔	交点
<b>最小3重点数</b>	↔	<b>最小交点数</b>

# Quandle

集合  $X$  の二項演算  $*$  :  $X \times X \rightarrow X$  が次の条件をみたすとき, **quandle** という.

$$(Q1) \quad \forall x \in X, \quad x * x = x$$

$$(Q2) \quad \forall x, y \in X, \quad \exists_1 z \in X \text{ s.t.}$$

$$x = z * y$$

$$(Q3) \quad \forall x, y, z \in X,$$

$$(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$$

例

$$R_p = (\mathbb{Z}_p, *), \quad p: \text{奇素数}$$

$$x * y \equiv 2y - x \pmod{p}$$

**dihedral quandle**

## Coloring

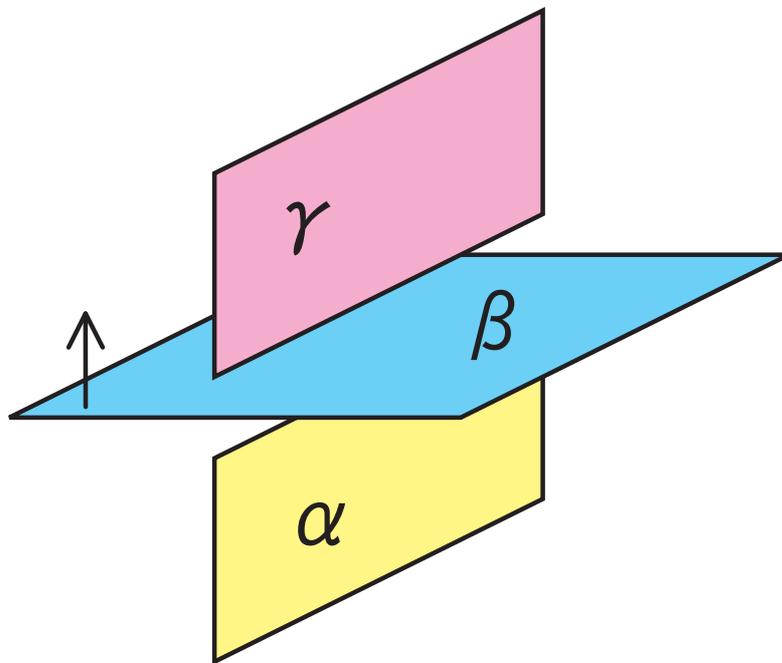
$D$  : 曲面結び目  $F$  の射影図 ,

$X$  : quandle

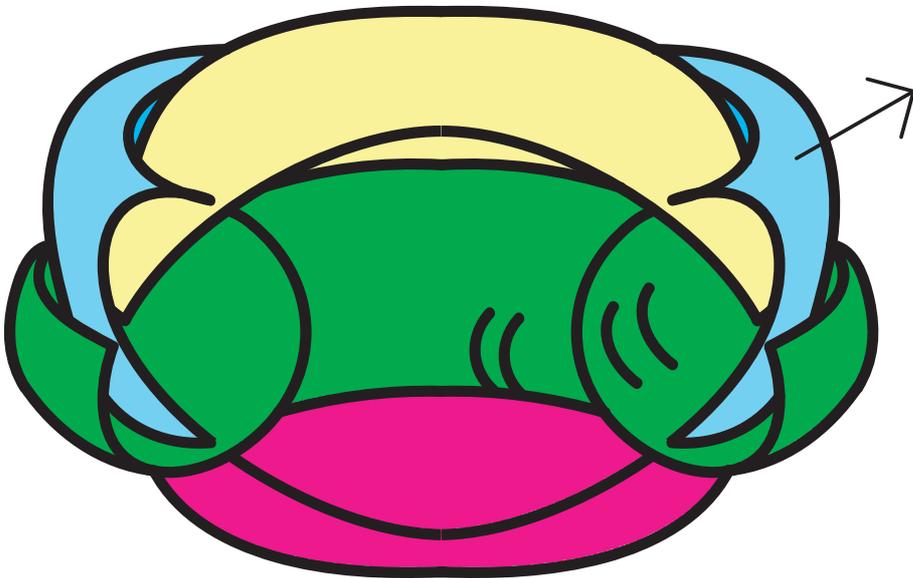
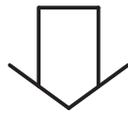
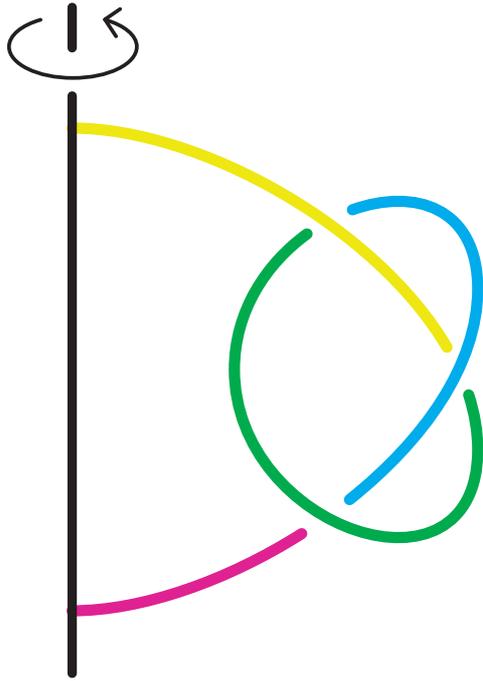
$$C : \{D \text{ の sheet 全体} \} \rightarrow X$$

で次の条件をみたすものを,  $X$  による  $D$  の **coloring** という

条件



$$C(\gamma) = C(\alpha) * C(\beta)$$



- $a =$  
- $b =$  
- $c =$  
- $d =$  

$$b = c * a , c = a * b , d = b * c$$

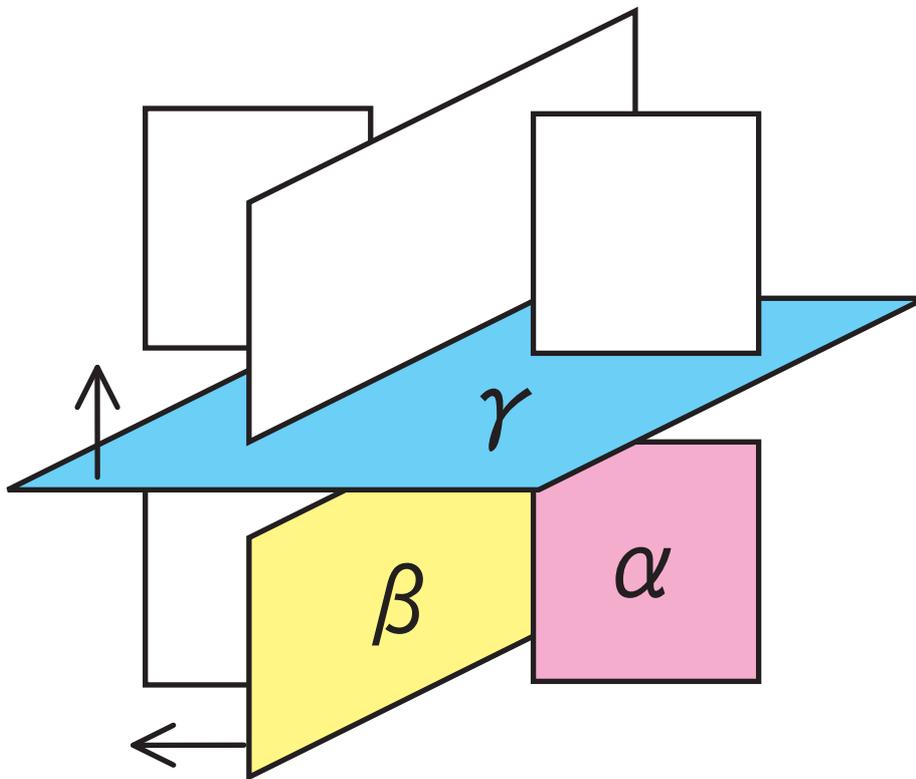
## Color of triple points

$C$  :  $D$  の  $X$  による coloring

$D$  の各 3 重点  $t$  に対して

$$\text{Col}(t) = (C(\alpha), C(\beta), C(\gamma)) \in X^3$$

を  $t$  の **color** という .



## Quandle cohomology

$X$  : quandle ,  $G$  : Abel群 ,

$C^n(X; G)$  : 写像  $\theta : X^n \rightarrow G$  により生成される自由 Abel群

coboundary作用素  $\delta^n : C^n(X; G) \rightarrow C^{n+1}(X; G)$

$$\begin{aligned} (\delta^n \theta)(x_1, \dots, x_{n+1}) = & \\ & \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \left( \theta(x_1, \dots, \widehat{x}_k, \dots, x_{n+1}) \right. \\ & \left. - \theta(x_1 * x_k, \dots, x_{k-1} * x_k, \right. \\ & \left. x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) \right). \end{aligned}$$

$H^*(X; G)$  : **quandle cohomology**

# Mochizuki's 3-cocycle

定理 (Mochizuki '02)

$$H^3(R_p; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$$

次の  $f \in Z^3(R_p; \mathbb{Z}_p)$  が生成元

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & \\ & (y - x) \left( \frac{2}{p} z^p + \frac{4}{p-1} z^{p-1} (y - z) \right. \\ & - \frac{1}{p-1} \left( y^{p-1} x \right. \\ & \quad \left. + (-x + 2z)(-y + 2z)^{p-1} \right) \\ & \left. + \frac{1}{p(p-1)} \left( y^p + (-y + 2z)^p \right) \right) \end{aligned}$$

## 命題 (Asami, Satoh)

$\theta_p \in Z^3(R_p; \mathbb{Z}_p)$  を

$$\theta_p(x, y, z) = (x - y) \frac{(2z - y)^p + y^p - 2z^p}{p}$$

により定義する . このとき

$$[f] = [\theta_p]$$

## Quandle cocycle invariant

$F$  : 曲面結び目 ,  $D$  :  $F$  の射影図

$C$  : quandle  $X$  による coloring

$\theta \in Z^3(X; G)$  に対して

$$W_\theta(C) = \prod_t \theta(\text{Col}(t))^{\varepsilon(t)} \in G$$

とおく . ただし  $\varepsilon(t)$  は  $t$  の符号

$$\Phi_\theta(D) = \sum_C W_\theta(C) \in \mathbb{Z}[G]$$

**定理 (Carter et al '99)**

$\Phi_\theta(D)$  は曲面結び目の不変量

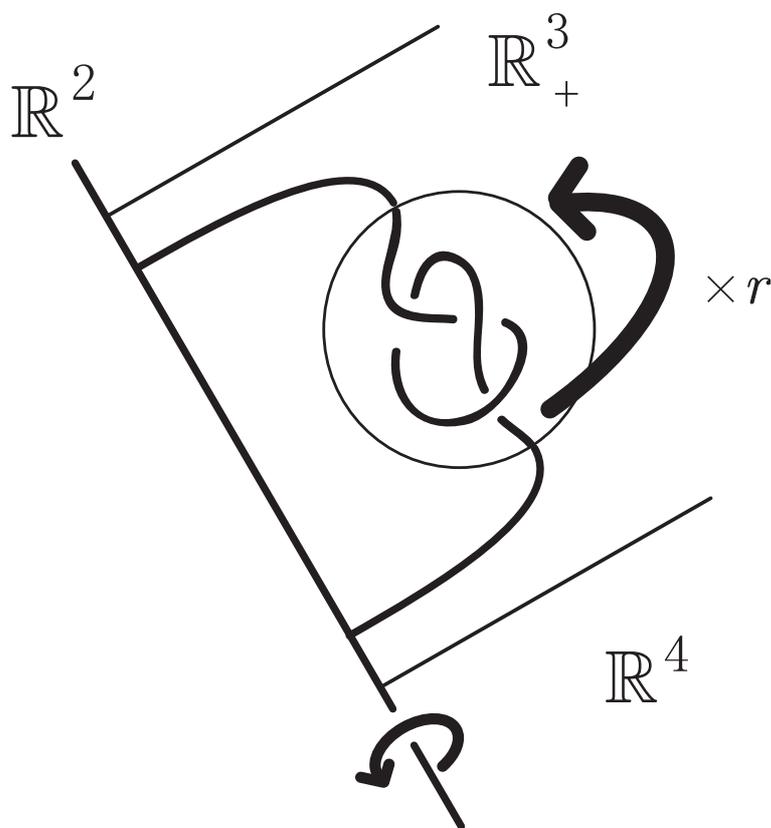
$\Phi_\theta(F)$  と記す .

## 主題 1

カンドルコサイクル不変量を用いた曲面結び目の“不可逆性”についての研究

# Twist-spin

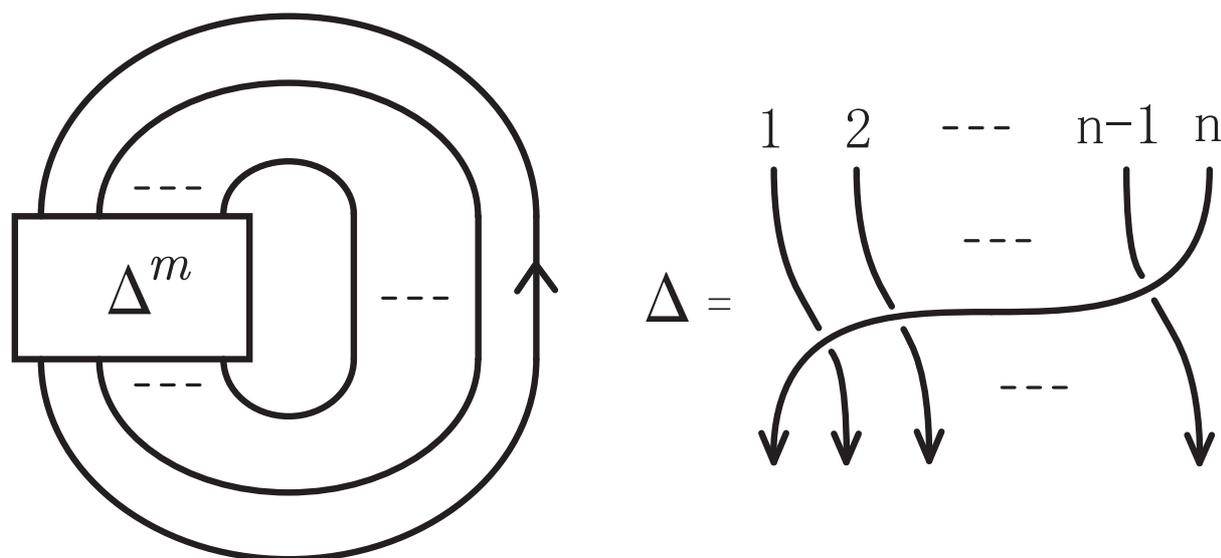
$K$  : 結び目 ,  $K_0$  :  $K$  の tangle



$\tau^r(K)$  :  $K$  の  $r$ -twist-spin

# Torus knot

$T(m, n)$  :  $(m, n)$ -torus knot



## 定理 (Asami, Satoh)

$\tau^r(T(m, n))$  が  $R_p$  による非自明な彩色を持つとき

$$\Phi_{\theta_p}(\tau^r(T(m, n))) = p \left( \sum_{i=0}^{p-1} t^{-\frac{mnr}{2p} i^2} \right)$$

自明な彩色しか持たないとき

$$\Phi_{\theta_p}(\tau^r(T(m, n))) = p$$

## 定理 (Gordon '04)

torus knotのtwist-spin は不可逆

$F_g^r(m, n) : \tau^r(T(m, n))$  から得られる  
種数  $g$  の曲面結び目

## 定理 (Asami, Satoh)

$F_g^r(m, n)$  は次の条件を満たすとき不可逆である .

- (1)  $p \equiv 3 \pmod{4}$  ,
- (2)  $p^2 \nmid m$  ,
- (3)  $n : \text{odd}$  ,
- (4)  $r : \text{even}$  ,  $p \nmid r$  .

## 系 (Asami, Satoh)

各  $g$  に対して種数  $g$  の不可逆な曲面結び目が無限個存在する .

## 主題 2

カンドルコサイクル不変量の“**整数性**”についての研究

## Fact

カンドルコサイクル不変量は群環  $\mathbb{Z}[G]$  ( $G$  はアーベル群) に値を持ち最小3重点数が0, または自明な彩色しか持たない曲面結び目に対しては整数.

$$\Phi_{\theta}(F) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F \text{ の最小3重点数は0, or} \\ F \text{ は自明な彩色しか持たない} \end{cases} \quad ?$$

## 定理 (Sato, Shima '03)

最小3重点数が3の曲面結び目の  $R_3$  に関するカンドルコサイクル不変量は整数

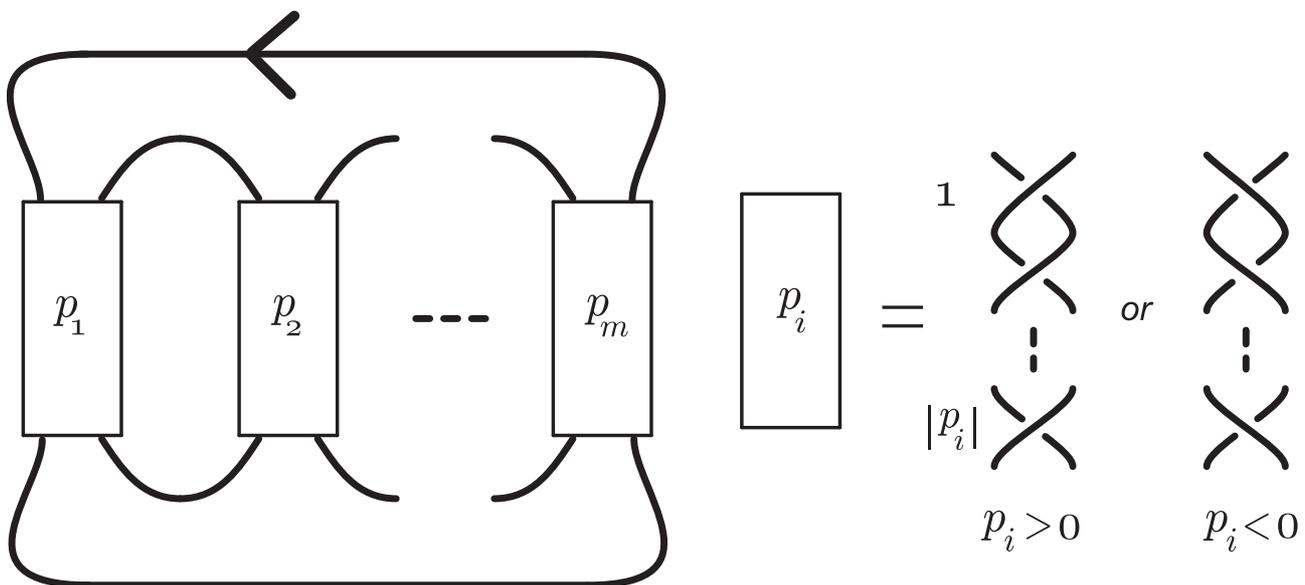
# Pretzel knot

$P(p_1, \dots, p_m)$  :

**alternating odd pretzel knot**

$p_i > 0$  or  $p_i < 0$  for  $\forall i$  ,

$p_1, \dots, p_m, m$  : 奇数



## 定理 (Asami)

$\tau^r(P)$  が  $R_p$  による非自明な彩色を持つとき任意の3-cocycle  $\theta \in Z^3(R_p; \mathbb{Z}_p)$  に対して

$$\Phi_\theta(\tau^r(P)) = \begin{cases} p^2 & p | p_1, \dots, p_m, \\ p^n & p | p_{i_1}, \dots, p_{i_n}, \\ & n \geq 2 \end{cases}$$

自明な彩色のみを持つとき

$$\Phi_\theta(\tau^r(P)) = p$$

## 系 (Asami)

任意の奇素数  $p$  に対して最小3重点数が0でなくかつ非自明な彩色を持つ曲面結び目で  $R_p$  に関するカンドルコサイクル不変量が常に整数となるものが存在する。