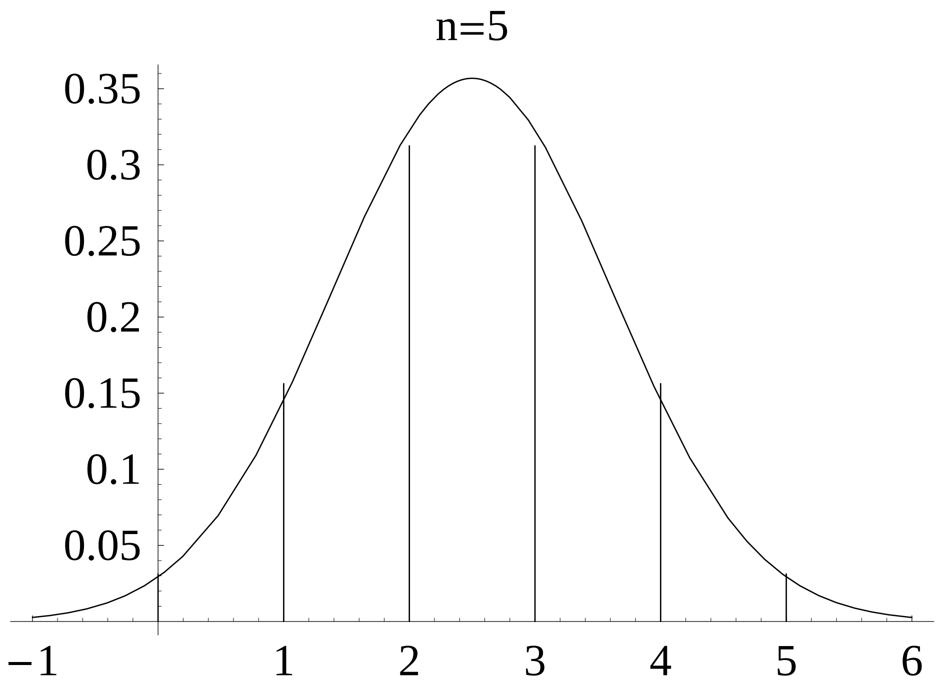
第3講：中心極限定理

平成16年10月29日

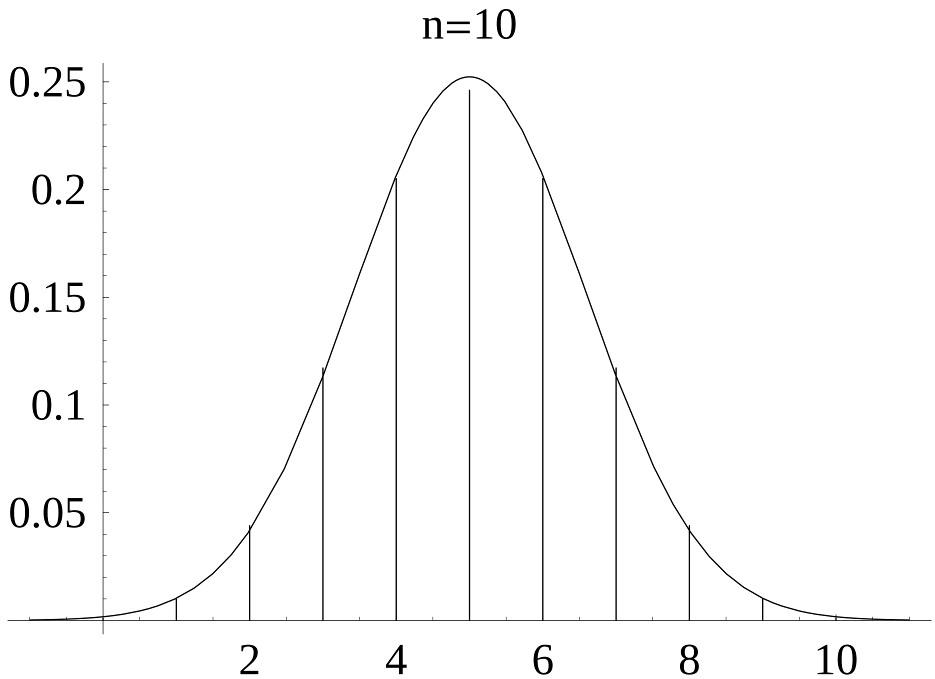
中心極限定理: 二項分布の場合

$X_1, \cdots, X_n$: 独立で、$p = 1/2$ の Bernoulli 分布に従い、$\sum_{i=1}^n X_i$ の分布



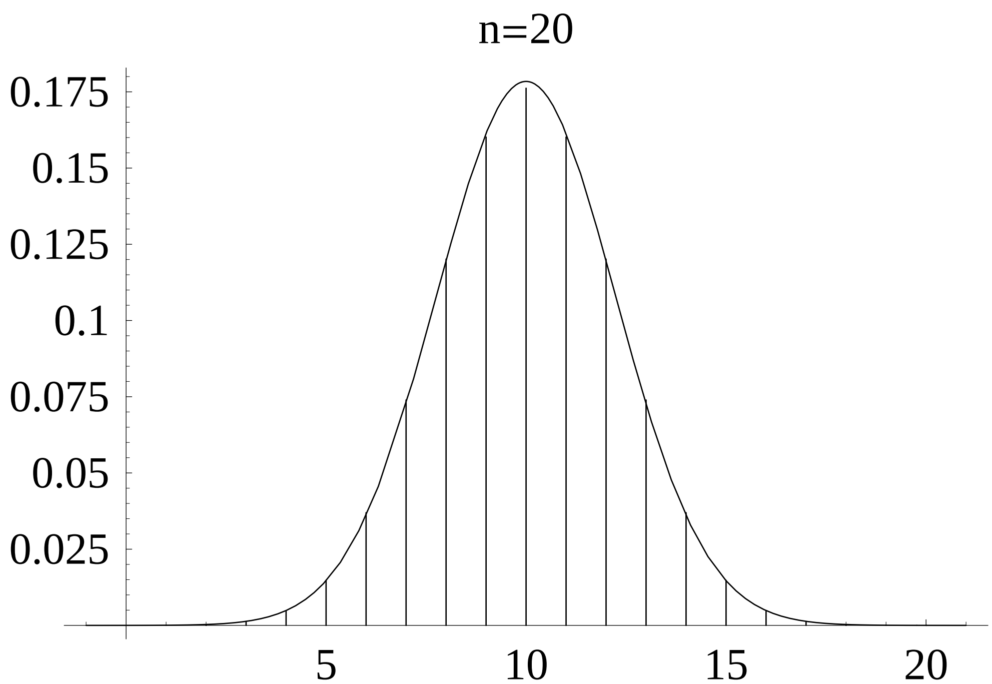
中心極限定理: 二項分布の場合（つづき）

$X_1, \cdots, X_n$: 独立で、$p = 1/2$ の Bernoulli 分布に従い、$\sum_{i=1}^{n} X_i$ の分布



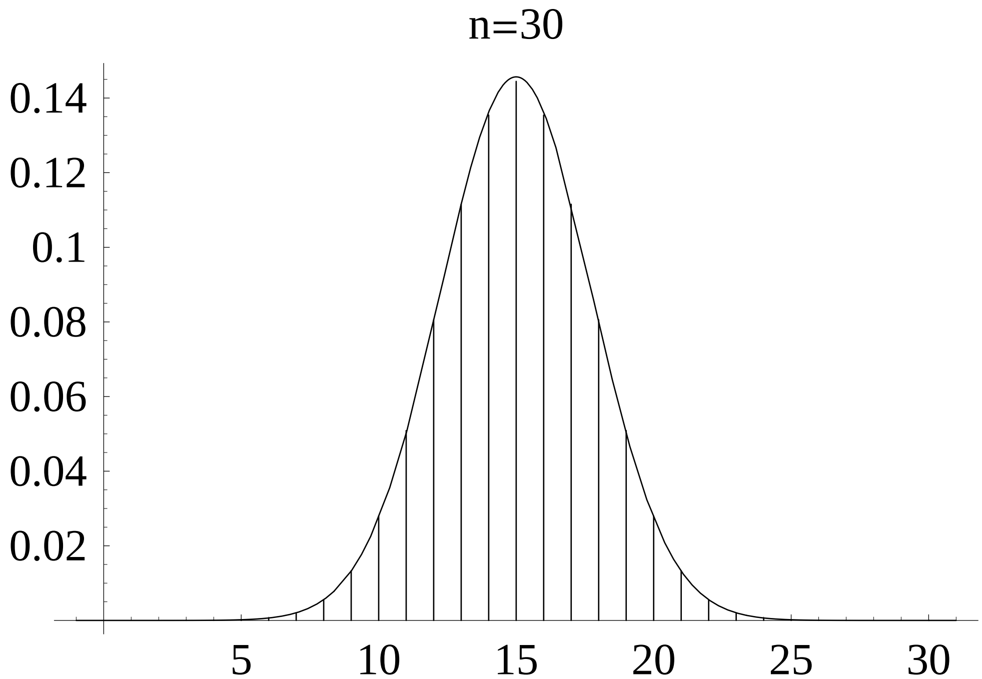
中心極限定理: 二項分布の場合（つづき）

$X_1, \cdots, X_n$: 独立で、$p = 1/2$ の Bernoulli 分布に従い、$\sum_{i=1}^{n} X_i$ の分布



中心極限定理: 二項分布の場合（つづき）

$X_1, \cdots, X_n$: 独立で、$p = 1/2$ の Bernoulli 分布に従い、$\sum_{i=1}^{n} X_i$ の分布



中心極限定理 Central Limit Theorem

定理 1 次の条件の下で

1. $X_1, \cdots, X_n$ が独立で、同じ分布に従う
2. $E(X_i) = \mu,\ V(X_i) = \sigma^2,\ i = 1, \cdots, n$

確率変数 $Y = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$ は標準正規分布に弱収束する。すなわち

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \leq y\right] = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \tag{1}$$

中心極限定理: 証明 (1/2)

Y の積率母関数が標準正規分布のそれに近づくことを証明する。

X_i の積率母関数が存在するという、定理より強い条件を仮定する。

$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ とすると、

$$E(Y_i) = 0,\ V(Y_i) = 1,\ Y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Y_i の積率母関数を $M(t)$ とすると

$$\begin{aligned} M(0) &= E\left(e^{0\,Y_i}\right) = 1 \\ M'(0) &= E(Y_i) = 0 \\ M''(0) &= E(Y_i^2) = V(Y_i) + (EY_i)^2 = 1 \end{aligned}$$

また $\psi(t) = \log\ M(t)$ とすると、

$$\psi'(t) = \frac{M'(t)}{M(t)}, \quad \psi''(t) = \frac{M''(t)M(t) - [M'(t)]^2}{[M(t)]^2}$$

したがって、$\psi(0) = 0,\ \psi'(0) = 0,\ \psi''(0) = 1$ となる。

中心極限定理: 証明 (2/2)

一方, ある $|\theta| < |t|$ が存在し、原点の周りで $\psi(t)$ を展開すると

$$\psi(t) = \psi(0) + \frac{\psi'(0)}{1!}t + \frac{\psi''(0)}{2!}t^2 + \frac{\psi'''(\theta)}{3!}t^3 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{\psi'''(\theta)}{6}t^3$$

従って、Y の積率母関数は

$$\begin{aligned}
E\left(e^{Yt}\right) &= E\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i t}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_i}\right) \\
&= \left[M\left(t/\sqrt{n}\right)\right]^n \\
&= \exp\left\{n \log M\left(t/\sqrt{n}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{n\left[\frac{1}{2}\left(t/\sqrt{n}\right)^2 + \frac{\psi'''(\theta)}{6}\left(t/\sqrt{n}\right)^3\right]\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}t^2 + \frac{\psi'''(\theta)}{6}\frac{t^3}{\sqrt{n}}\right\} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \exp\left\{\frac{1}{2}t^2\right\}
\end{aligned}$$

二項分布の正規近似

定理 2 (De Moivre-Laplace Limit Theorem)
X が二項分布に従うならば

$$X \sim \mathrm{Bi}(n,\, p)$$

次が成り立つ

$$\lim_{n\to\infty} P\left[a \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right] = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{2}$$

ただし、$\Phi(x)$ は標準正規分布の分布関数である。すなわち、

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} y^2 \, dy$$

二項分布の正規近似: 証明

$X_1, \cdots, X_n$ を独立で、成功する確率が p の Bernoulli 分布に従うならば,

$$
\begin{aligned}
X &= \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Bi}(n,\, p) \\
E(X_i) &= p \\
V(X_i) &= p(1-p)
\end{aligned}
$$

となる。
中心極限定理によって

$$
\begin{aligned}
\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \\
&= \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \\
&\longrightarrow N(0,\, 1)
\end{aligned}
$$