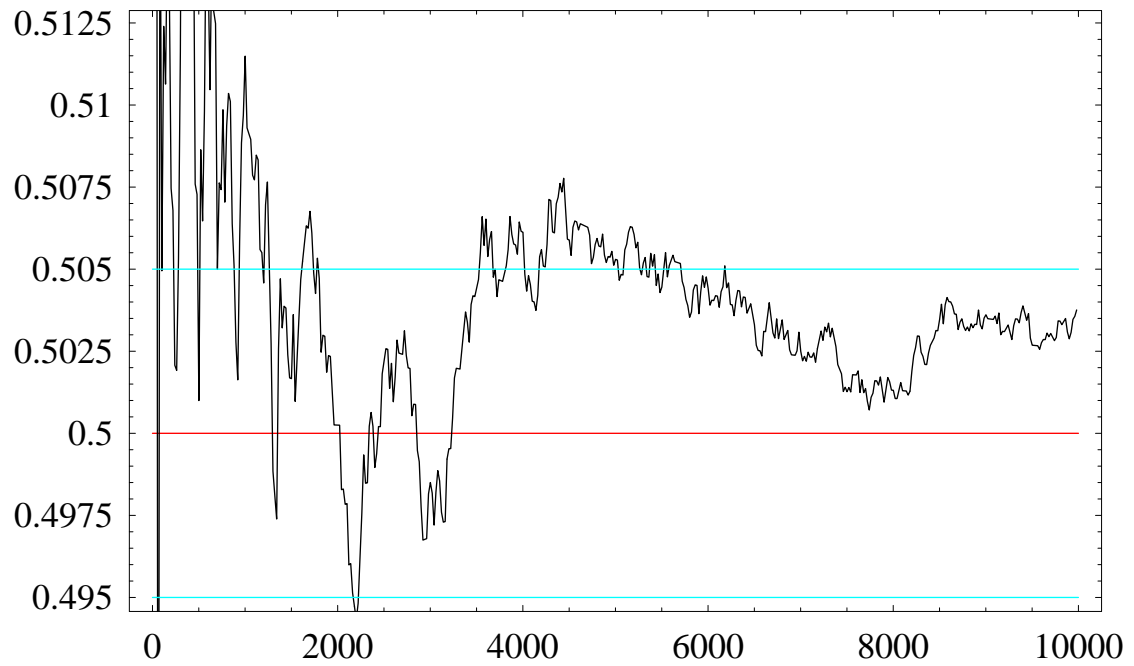


## 第2講：大数の法則

大数の弱法則: コインを投げる場合

正しいコインを、独立に  $n = 1, 2, \dots, 10000$  回投げた場合



横軸：投げる回数；縦軸：表の出る相対頻度

## 大数の弱法則

大数の弱法則 weak law of large numbers

1. 独立性：確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  が互いに独立
2. 平均の同一性：  $\mu = E(X_i), i = 1, 2, \dots, n$
3. 分散の有限性：  $\sigma_i^2 = V(X_i) \leq \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n$

このとき、任意の  $\epsilon > 0$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right) = 0$$

このとき、 $\bar{X}$  が  $\mu$  に 確率収束 converge in probability という。

大数の弱法則: 証明

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

とおくと、 $E(Y) = \mu$  となる。また独立性より

$$V(Y) = \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n^2} \leq \frac{\sigma^2 + \cdots + \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

を得る。チェビシェフの不等式

$$P(|Y - E(Y)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(Y)}{\epsilon^2}$$

より

$$P(|Y - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

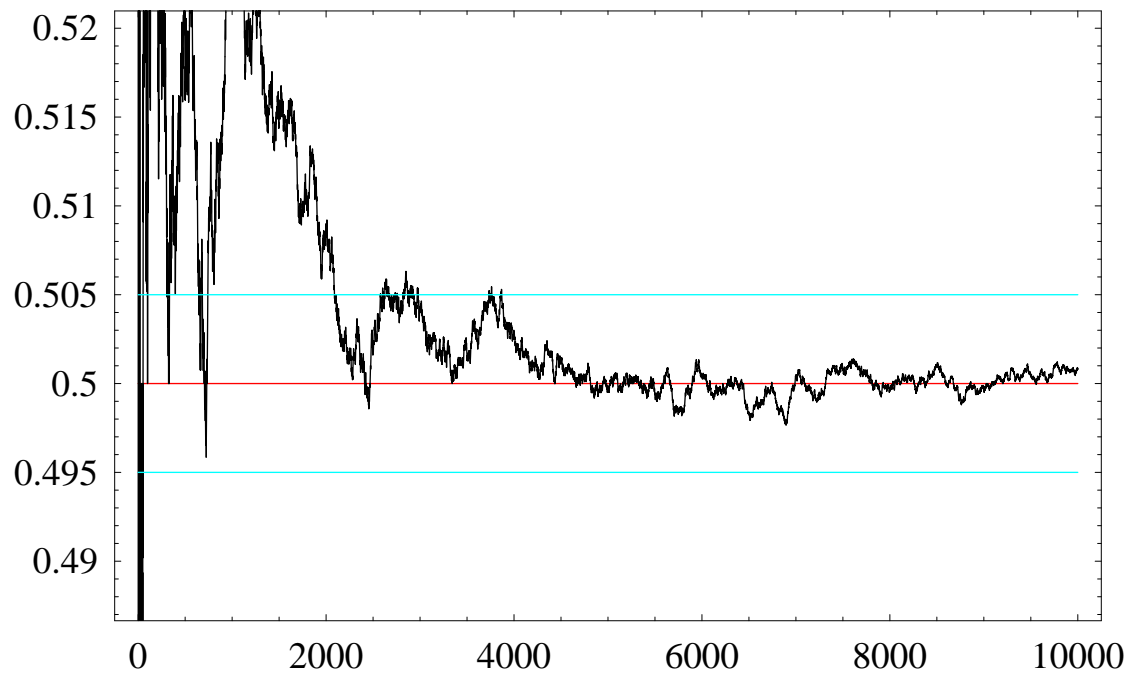
を得る。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

大数の強法則: コインを投げる場合

次々に正しいコインを  $n = 10000$  回投げた場合

横軸: 投げる回数; 縦軸: 表の出る相対頻度



チェビシェフの不等式の拡張

$X$  平均を  $\mu = E(X)$ , 偶数次の中心モーメント

$$\nu_{2k} = E(X - \mu)^{2k}$$

とする.

任意の  $\epsilon > 0$  に対して、次が成り立つ

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\nu_{2k}}{\epsilon^{2k}}$$

証明:  $D = \{x | x - \mu| \geq \epsilon\}$  とする。

$$\begin{aligned}\nu_{2k} &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^{2k} f(x) dx \\ &\geq \int_D (x - \mu)^{2k} f(x) dx \\ &\geq \int_D \epsilon^{2k} f(x) dx \\ &\geq \epsilon^{2k} \int_D f(x) dx \\ &\geq \epsilon^{2k} P(|X - \mu| \geq \epsilon)\end{aligned}$$

標本平均の4次のモーメント

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ : 互いに独立
- $E(X_i) = \mu, V(X_i) = \sigma^2, E(X_i - \mu)^4 = \nu_4, i = 1, \dots, n$

$$E(\bar{X} - \mu)^4 = \frac{1}{n^2} \left[ \frac{1}{n} \nu_4 + 3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma^4 \right]$$

証明:

$$\begin{aligned} (\bar{X} - \mu)^4 &= \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \right]^4 \\ &= \frac{1}{n^4} \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^4 + \sum_{i \neq j} {}_4C_2 (X_i - \mu)^2 (X_j - \mu)^2 \right. \\ &\quad + \sum_{i \neq j \neq k \neq \ell} {}_4C_1 (X_i - \mu) (X_j - \mu) (X_k - \mu) (X_\ell - \mu) \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j} {}_4C_1 (X_i - \mu)^3 (X_j - \mu) \right\} \end{aligned}$$

両辺期待値を取ると,  $E(\bar{X} - \mu)^4 = \frac{1}{n^4} (n\nu_4 + {}_n C_2 {}_4 C_2 \sigma^4)$

## 大数の強法則

大数の強法則 strong law of large numbers

1. 確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  : 互いに独立で同一分布に従う
2. さらに、

$$\begin{cases} \mu = E(X_i) \\ \sigma^2 = V(X_i) \\ \nu_4 = E(X_i - \mu)^4 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

このとき、

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \mu\right) = 1$$

このとき、 $\bar{X}$  が  $\mu$  に 概収束 converge almost surely (converge with probability 1) という。

## 大数の強法則の証明

- 評価すべき事象は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X} = \mu$$

である。

- この事象は次の事象と同等である。任意の  $\epsilon > 0$  に対して、自然数  $N_\epsilon$  が存在し、全ての  $n > N_\epsilon$  に対して

$$|\bar{X} - \mu| < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0, n > N_\epsilon$$

という事象である。

- この事象の余事象は、ある  $\epsilon$  が存在し、この  $\epsilon$  に対して、どんな大きい  $N$  をとっても、 $n > N$  が存在し、次が満たされる事象

$$|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon, \quad \text{for some } n > N$$

である。

大数の強法則の証明 (つづき)

一方、 $n > N > \nu_4$  のとき、チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned} P_n &= P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon) \\ &\leq \frac{E(\bar{X} - \mu)^4}{\epsilon^4} \\ &= \frac{1}{n^2 \epsilon^4} \left[ \frac{1}{n} \nu_4 + 3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma^4 \right] \\ &< \frac{1 + 3\sigma^4}{\epsilon^4} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

したがって、1つの  $\epsilon > 0$  と任意の  $N$  に対して、

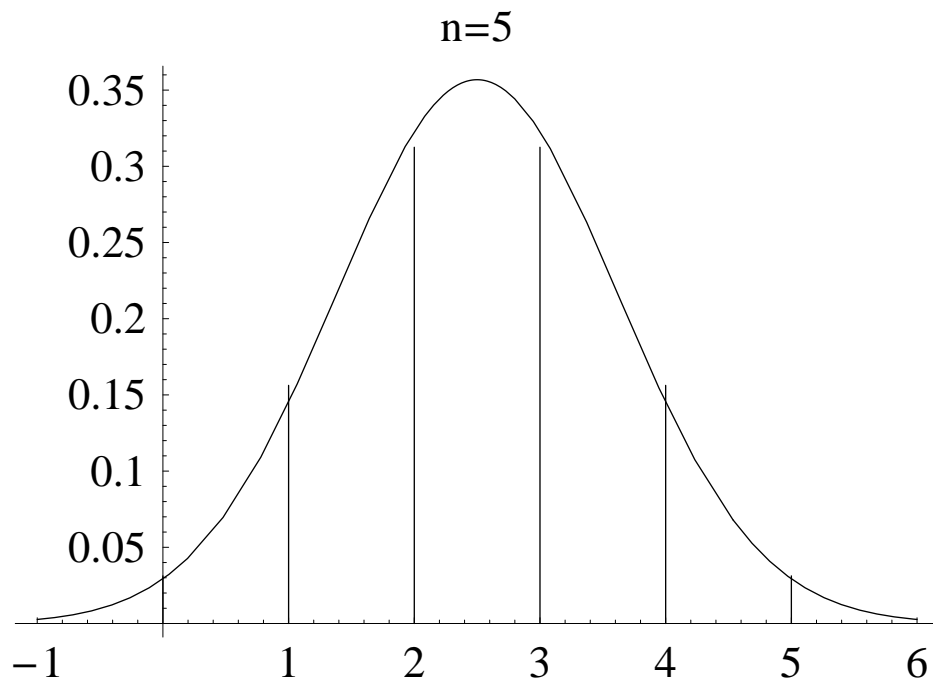
$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X} = \mu\right) &= 1 - P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon \text{ for some } n > N) \\ &\geq 1 - (P_N + P_{N+1} + \cdots) \\ &\geq 1 - \frac{1 + 3\sigma^4}{\epsilon^4} \left\{ \frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N+1)^2} + \cdots \right\} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

最後の極限は、無限級数  $\sum_{i=1}^{\infty} 1/N^2$  の収束性による。

## 第3講：中心極限定理

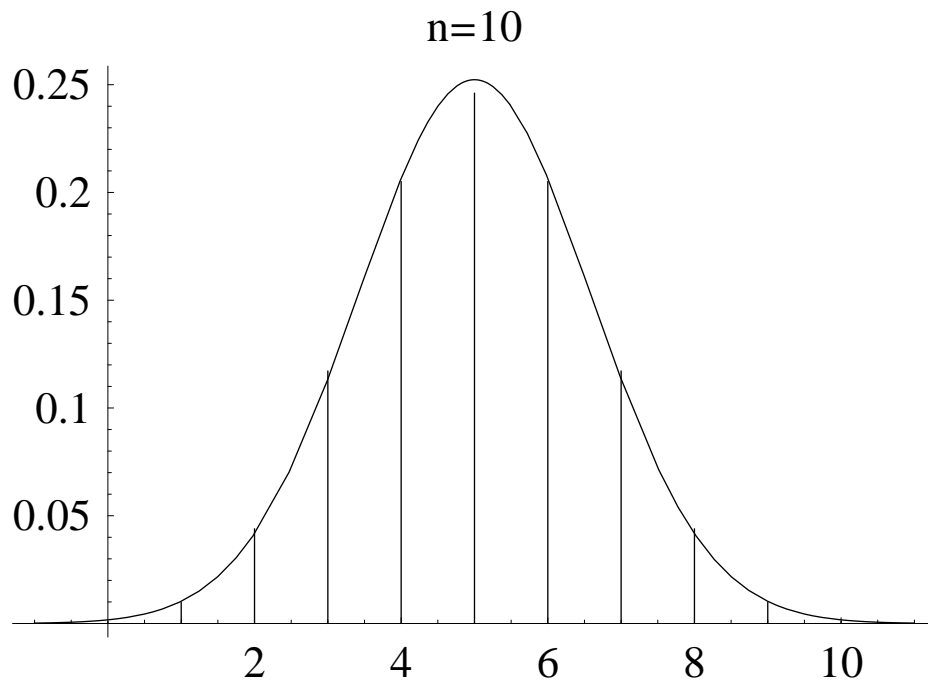
— 中心極限定理: 二項分布の場合 —

$X_1, \dots, X_n$ : 独立で、 $p = 1/2$  の Bernoulli 分布に従い、 $\sum_{i=1}^n X_i$  の分布



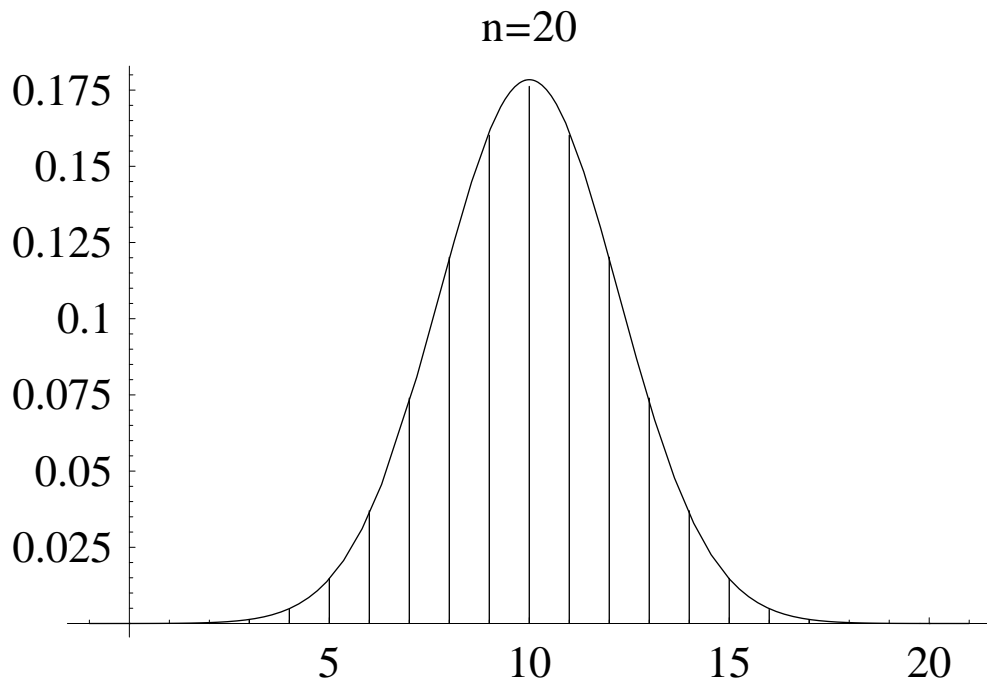
中心極限定理: 二項分布の場合 (つづき)

$X_1, \dots, X_n$ : 独立で、 $p = 1/2$  の Bernoulli 分布に従い、 $\sum_{i=1}^n X_i$  の分布



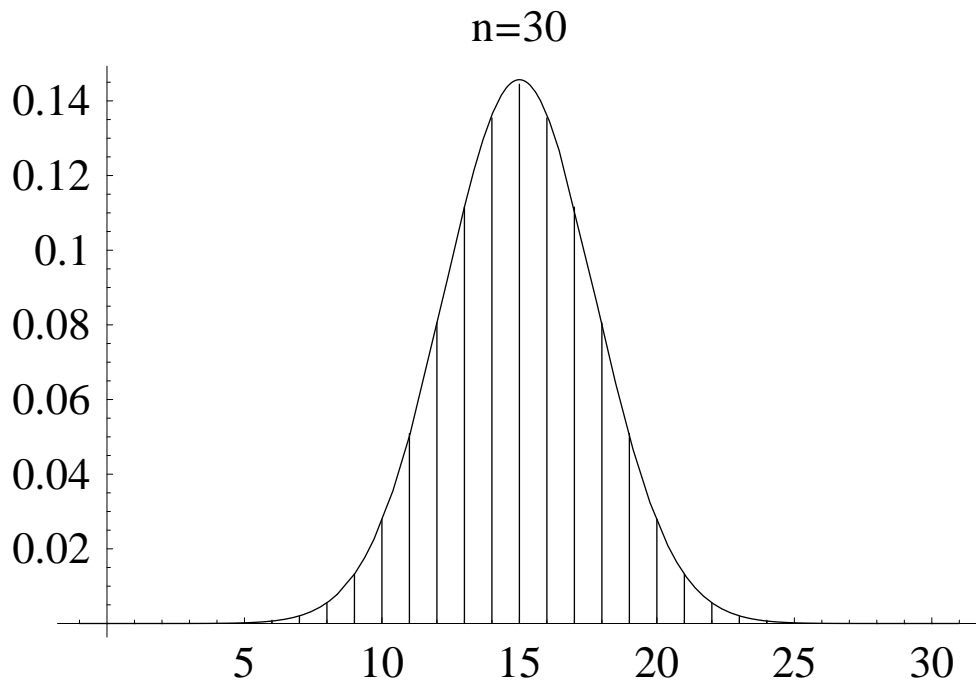
中心極限定理: 二項分布の場合 (つづき)

$X_1, \dots, X_n$ : 独立で、 $p = 1/2$  の Bernoulli 分布に従い、 $\sum_{i=1}^n X_i$  の分布



中心極限定理: 二項分布の場合 (つづき)

$X_1, \dots, X_n$ : 独立で、 $p = 1/2$  の Bernoulli 分布に従い、 $\sum_{i=1}^n X_i$  の分布



— 中心極限定理 Central Limit Theorem —

定理 1 次の条件の下で

1.  $X_1, \dots, X_n$  が独立で、同じ分布に従う
2.  $E(X_i) = \mu, V(X_i) = \sigma^2, i = 1, \dots, n$

確率変数  $Y = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$  は標準正規分布に弱収束する。すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[ \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq y \right] = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (1)$$

— 中心極限定理: 証明 (1/2) —

$Y$  の積率母関数が標準正規分布のそれに近づくことを証明する。  
 $X_i$  の積率母関数が存在するという、定理より強い条件を仮定する。  
 $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$  とすると、

$$E(Y_i) = 0, V(Y_i) = 1, Y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i$$

$Y_i$  の積率母関数を  $M(t)$  とすると

$$M(0) = E(e^{0Y_i}) = 1$$

$$M'(0) = E(Y_i) = 0$$

$$M''(0) = E(Y_i^2) = V(Y_i) + (EY_i)^2 = 1$$

また  $\psi(t) = \log M(t)$  とすると、

$$\psi'(t) = \frac{M'(t)}{M(t)}, \quad \psi''(t) = \frac{M''(t)M(t) - [M'(t)]^2}{[M(t)]^2}$$

したがって、 $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 0, \psi''(0) = 1$  となる。

— 中心極限定理: 証明 (2/2) —

一方, ある  $|\theta| < |t|$  が存在し、原点の周りで  $\psi(t)$  を展開すると

$$\psi(t) = \psi(0) + \frac{\psi'(0)}{1!}t + \frac{\psi''(0)}{2!}t^2 + \frac{\psi'''(\theta)}{3!}t^3 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{\psi'''(\theta)}{6}t^3$$

従って、 $Y$  の積率母関数は

$$\begin{aligned} E(e^{Yt}) &= E\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n Y_i t}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_i}\right) \\ &= [M(t/\sqrt{n})]^n \\ &= \exp\left\{n \log M(t/\sqrt{n})\right\} \\ &= \exp\left\{n \left[\frac{1}{2}(t/\sqrt{n})^2 + \frac{\psi'''(\theta)}{6}(t/\sqrt{n})^3\right]\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}t^2 + \frac{\psi'''(\theta)}{6}\frac{t^3}{\sqrt{n}}\right\} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left\{\frac{1}{2}t^2\right\} \end{aligned}$$

二項分布の正規近似

定理 2 (De Moivre-Laplace Limit Theorem)

$X$  が二項分布に従うならば

$$X \sim \text{Bi}(n, p)$$

次が成り立つ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[ a \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b \right] = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (2)$$

ただし、 $\Phi(x)$  は標準正規分布の分布関数である。すなわち、

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

二項分布の正規近似: 証明

$X_1, \dots, X_n$  を独立で、成功する確率が  $p$  の Bernoulli 分布に従うならば,

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bi}(n, p) \\ E(X_i) &= p \\ V(X_i) &= p(1-p) \end{aligned}$$

となる。

中心極限定理によって

$$\begin{aligned} \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \\ &= \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \\ &\longrightarrow N(0, 1) \end{aligned}$$

## 第4講：正規分布からの標本抽出 — $\chi^2$ 分布・ $F$ 分布

## $\chi^2$ 分布

正規分布からの標本を考える。

- $X_1, \dots, X_n \sim N(0, 1)$
- $X_1, \dots, X_n$ : 独立
- $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$  の密度関数を  $f(y)$

定理 3 密度関数  $f(y)$  は次の式で与えられる

$$f(y) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} I_{(0, \infty)}(y) \quad (3)$$

定義 1 (3) を自由度  $n$  の  $\chi^2$  分布の密度関数という。

—  $\chi^2$  分布: 証明 (1/2) —

$X_1, \dots, X_n$  の独立性より

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E[\exp(Yt)] \\ &= E\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^n X_i^2 t\right\}\right) \\ &= \left(E e^{X_1^2 t}\right)^n \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} E e^{X_1^2 t} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}(1-2t)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \quad (1-2t > 0) \end{aligned}$$

従って、

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

—  $\chi^2$  分布: 証明 (2/2) —

直接的に計算すると

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{yt} f(y) dy &= \int_0^\infty e^{yt} \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}+yt} dy \\ \left(x = \frac{y}{2} - yt\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2}{1-2t}x\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} \left(\frac{2}{1-2t}dx\right) \\ &= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} dx \\ &= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

これが  $M_Y(t)$  と一致する。

—  $\chi^2$  分布の平均・分散 —

- 積率母関数

$$M(t) = (1 - 2t)^{-\frac{n}{2}}$$

より

$$M'(t) = n(1 - 2t)^{-\frac{n}{2}-1}$$

$$M''(t) = n(n + 2)(1 - 2t)^{-\frac{n}{2}-2}$$

- 平均 :

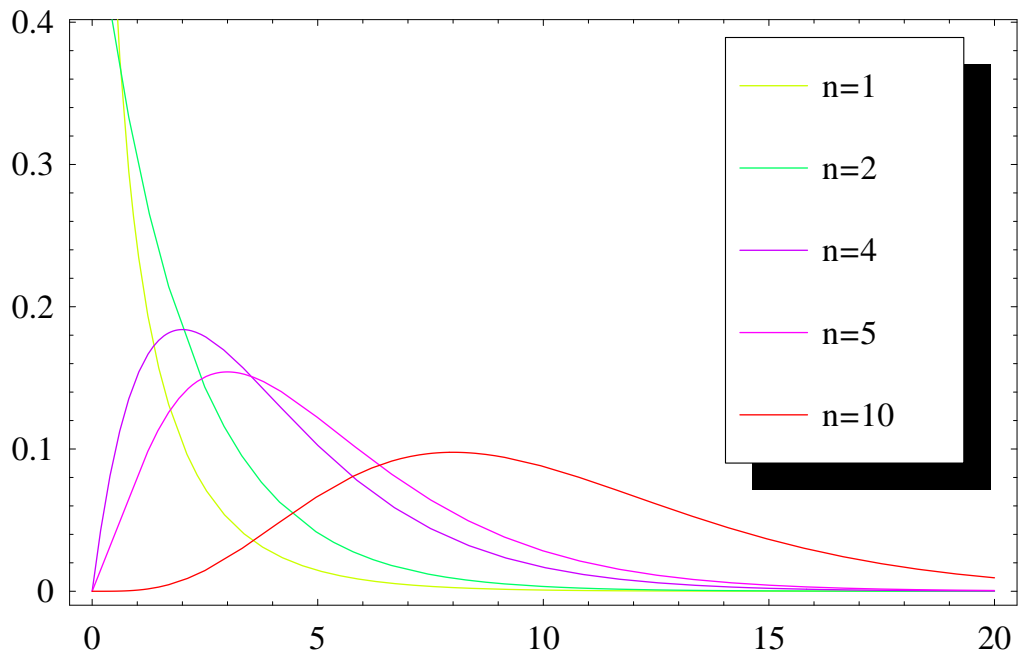
$$E(Y) = M'(0) = n$$

- 分散 :

$$V(Y) = E(X^2) - (EX)^2 = M''(0) - n^2 = 2n$$

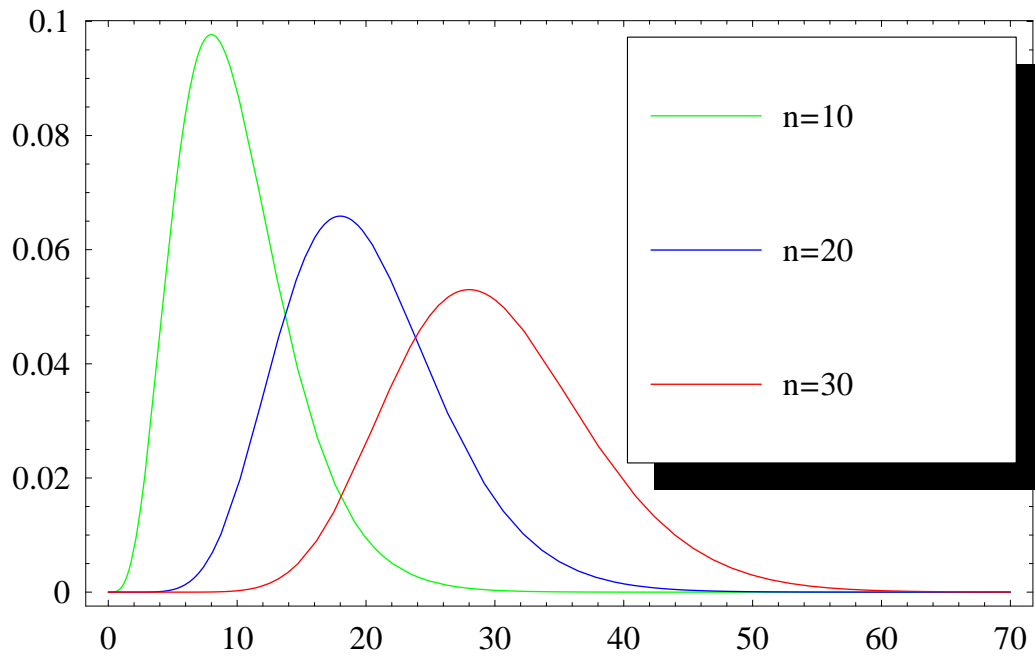
$\chi^2$  分布の様子

$\chi^2$  分布の密度関数



$\chi^2$  分布: 自由度大きい場合

自由度が大きいときの  $\chi^2$  分布の密度関数



—  $\chi^2$  分布の正規近似 —

- $Z_1 = X_1^2, \dots, Z_n = X_n^2$  が独立に自由度 1 の  $\chi^2$  分布に従う
- $E(Z_i) = 1, V(Z_i) = 2$
- $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = Y/n$  とすると
- 中心極限定理により、自由度  $n$  が大きいときに、

$$\frac{\sqrt{n}(Y/n - 1)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{Z} - 1)}{\sqrt{2}} \\ \longrightarrow N(0, 1)$$

$$\implies Y \longrightarrow N(n, 2n)$$

—  $F$  分布 —

- $X$ : 自由度  $m$  の  $\chi^2$  分布
- $Y$ : 自由度  $n$  の  $\chi^2$  分布
- $X, Y$ : 独立
- $Z = \frac{X/m}{Y/n}$  の密度関数を  $f(z)$

定理 4 密度関数  $f(z)$  は次の式で与えられる

$$f(z) = \frac{1}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}z\right)^{-\frac{m+n}{2}} I_{(0, \infty)}(z) \quad (4)$$

定義 2 (4) を自由度  $(m, n)$  の  $F$  分布の密度関数という。

—  $F$  分布: 証明 (1/3) —

- $X, Y$  の独立性から、 $X, Y$  の同時密度関数は

$$f(x, y) = \frac{2^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(m/2)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} I_{x>0}(x) \times \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} I_{y>0}(y)$$

- 1対1の変数変換

$$\begin{cases} z = \frac{x/m}{y/n} = \frac{nx}{my} \\ w = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m}{n}zw \\ y = w \end{cases}$$

のヤコビアン Jacobian は

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(z, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{m}{n}w & \frac{m}{n}z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{m}{n}w$$

F 分布: 証明 (2/3)

したがって

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^\infty g(z, w) dw \\ &= \int_0^\infty f\left(\frac{m}{n}zw, w\right) \frac{m}{n}w dz dw \\ &= \int_0^\infty \frac{2^{-\frac{m+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}zw\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{m}{2n}zw} w^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{w}{2}} \frac{m}{n}w dw dz \\ &= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty w^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{w(mz+n)}{2n}} dw \end{aligned}$$

変数変換  $t = -\frac{w(mz+n)}{2n}$  すると、

$$w = \frac{2nt}{mz+n}, \quad dw = \frac{2n}{mz+n} dt$$

F 分布: 証明 (3/3)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty w^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{w(mz+n)}{2n}} dw &= \int_0^\infty \left( \frac{2nt}{mz+n} \right)^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-t} \times \frac{2n}{mz+n} dt \\ &= \left( \frac{2n}{mz+n} \right)^{\frac{m+n}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \left( \frac{2n}{mz+n} \right)^{\frac{m+n}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}f(z) &= m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{(mz+n)^{\frac{m+n}{2}}} \\ &= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} z^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}z\right)^{-\frac{m+n}{2}}\end{aligned}$$

This completes the proof.

—  $F$  分布の平均・分散 —

自由度  $(m, n)$  の  $F$  分布に対して

$$\text{平均 : } E(Z) = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2)$$

$$\text{分散 : } V(Z) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad n > 4$$

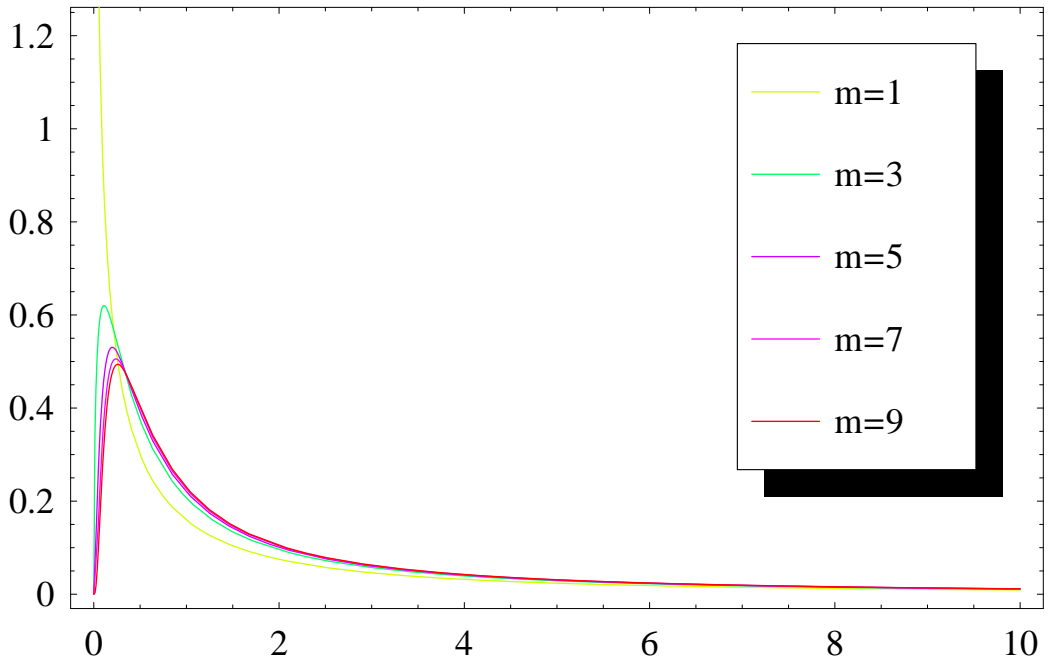
平均の場合の証明： まず

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{Y}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{y} \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \int_0^\infty y^{\frac{n-2}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy \\ \left(\frac{y}{2} = w\right) &= \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \int_0^\infty 2^{\frac{n}{2}-2} w^{\frac{n-2}{2}-1} e^{-w} 2 dw \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma((n-2)/2)}{\Gamma(n/2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{n-2} \end{aligned}$$

に注意すると、 $E(Z) = E\left(\frac{X/m}{Y/n}\right) = \frac{n}{m} E(X) E\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{n}{m} m \frac{1}{n-2} = \frac{n}{n-2}$

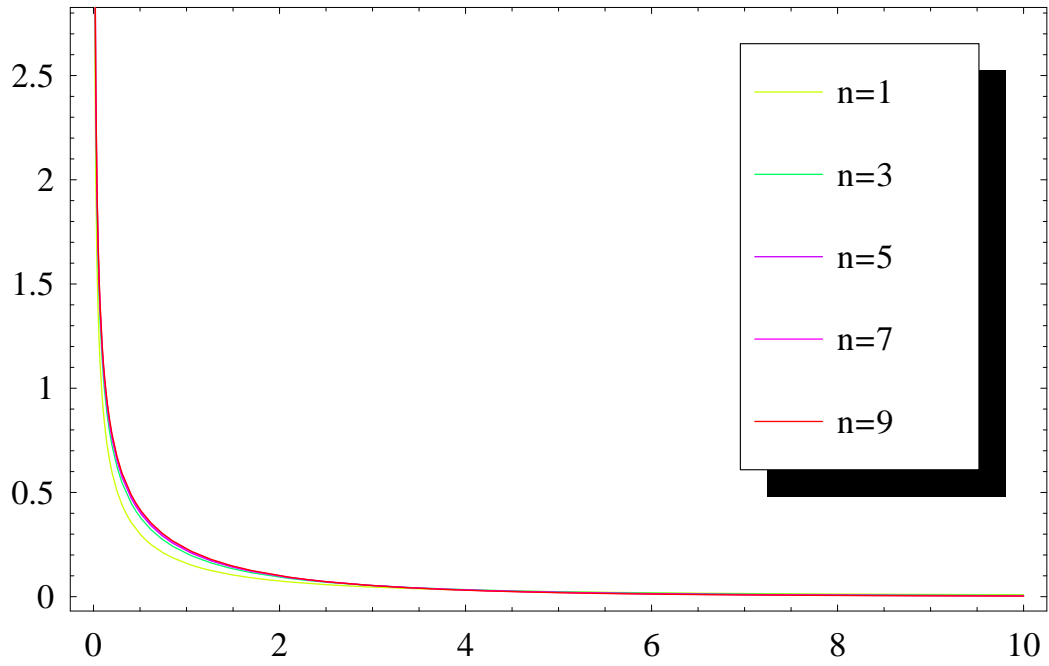
F 分布の密度関数

$Z = \frac{X/m}{Y/n}$ ,  $n = 1$  の場合:



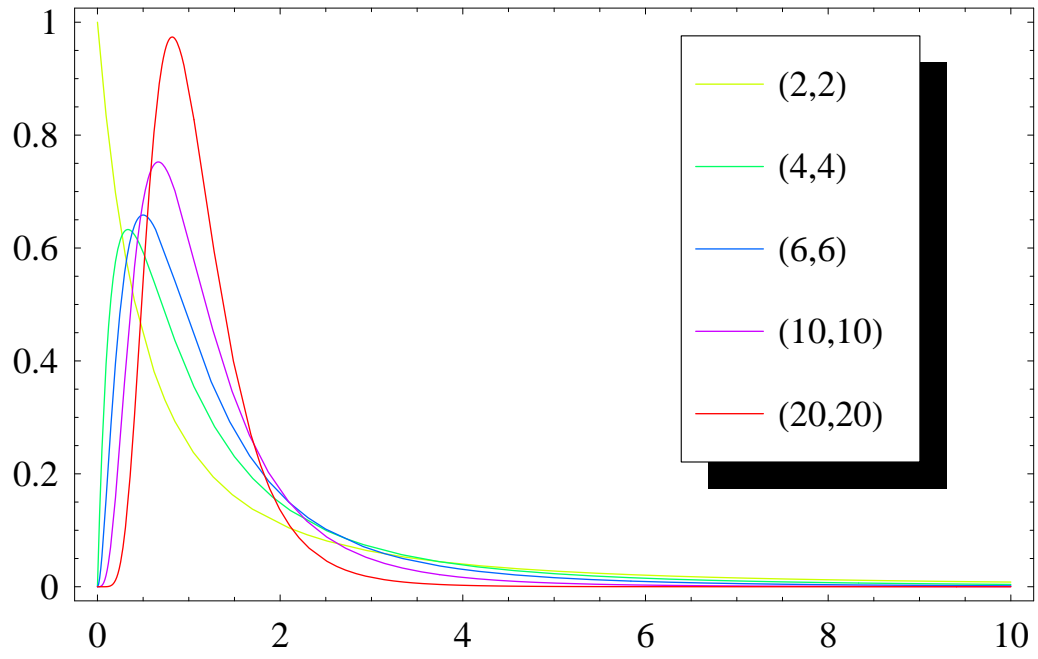
F 分布の密度関数

$Z = \frac{X/m}{Y/n}$ ,  $m = 1$  の場合:



F 分布の密度関数

$Z = \frac{X/m}{Y/n}$ ,  $m = n$  の場合:



## 第5講：正規分布からの標本抽出: $t$ 分布

—  $t$  分布 —

- $X \sim N(0, 1)$
- $Y \sim \chi^2(n)$
- $X, Y$ : 独立
- $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$  の密度関数を  $f(t)$

定理 5 密度関数  $f(t)$  は次の式で与えられる

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (5)$$

定義 3 (5) を自由度  $n$  の  $t$  分布の密度関数という。

—  $t$  分布: 証明 (1/3) —

- $X$  と  $Y$  の独立性から、 $X, Y$  の同時分布

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

- $1 \leftrightarrow 1$  変数変換

$$\begin{cases} t = \frac{x}{\sqrt{y/n}} \\ w = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{w}{n}} t \\ y = w \end{cases}$$

ヤコビアン :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{w}{n}} & \frac{t}{2\sqrt{wn}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{w}{n}}$$

—  $t$  分布: 証明 (2/3) —

したがって

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^\infty g(t, w) dw \\ &= \int_0^\infty f\left(\sqrt{\frac{w}{n}}t, w\right) \sqrt{\frac{w}{n}} dw \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{w}{n}t^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma(n/2)} w^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{w}{2}} \sqrt{\frac{w}{n}} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n} \Gamma(n/2)} \int_0^\infty w^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{w}{2}-\frac{w}{2n}t^2} dw \end{aligned}$$

次の変数変換を考える

$$s = \frac{w}{2} + \frac{w}{2n}t^2, \quad w = \frac{s}{1/2 + t^2/(2n)}, \quad dw = \left(\frac{1}{2} + \frac{t^2}{2n}\right)^{-1} ds$$

—  $t$  分布: 証明 (3/3) —

したがって、

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{t^2}{2n}\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}} \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} e^{-s} ds \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{t^2}{2n}\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

次の式

$$B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}$$

に注意すると、 $t$  分布の密度関数は

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2} + \frac{t^2}{2n}\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

$t$  分布: 自由度大きいとき

次の極限

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \left[\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{t^2}}\right]^{\frac{t^2}{n} \times \left(-\frac{n+1}{2}\right)}$$
$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

に注意すると、次が成り立つ

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$
$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

すなわち

定理 6 自由度が大きいときに、 $t$  分布は正規分布に近づく。

(注: 中心極限定理からも証明される。)

—  $t$  分布: 平均分散 —

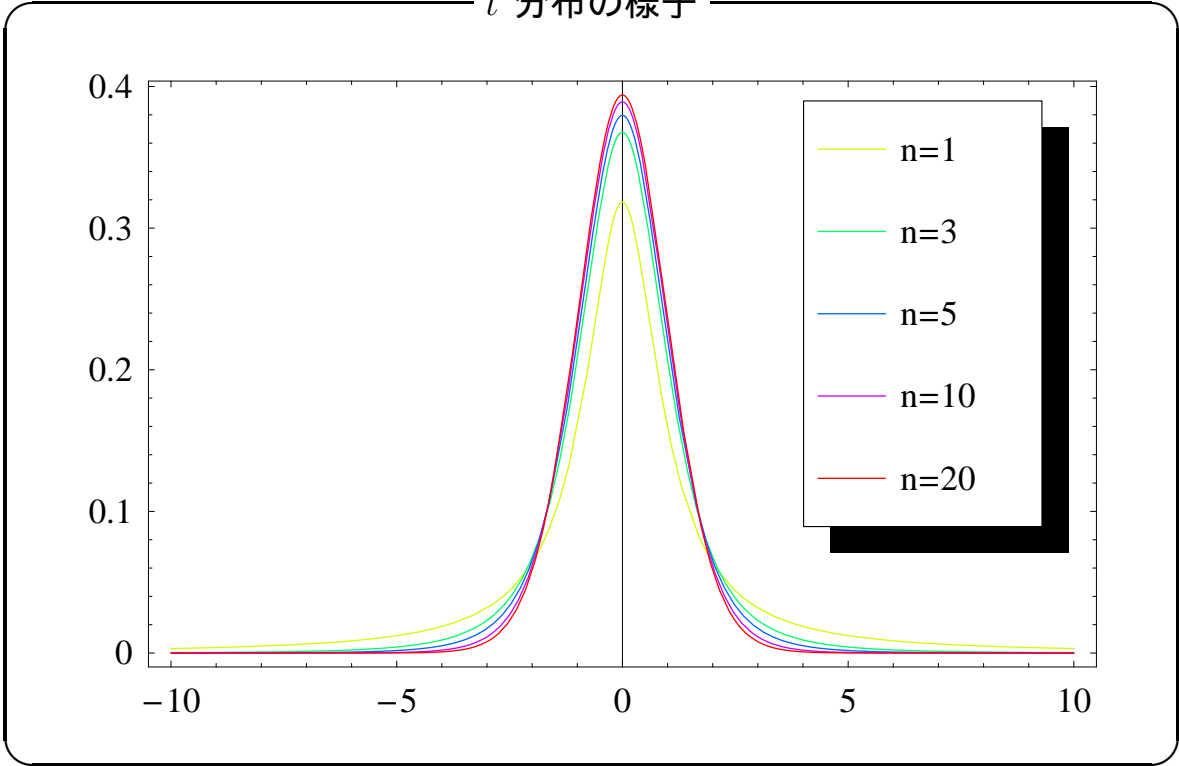
1. 平均: 独立性より

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\right) \\ &= E(X) \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{Y/n}}\right) \\ &= 0 \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{Y/n}}\right) = 0 \end{aligned}$$

2. 分散:  $E(T) = 0$  なので、

$$\begin{aligned} V(T) &= E(T^2) \\ &= nE\left(\frac{X^2}{Y}\right) \\ &= nE(X^2) \cdot E\left(\frac{1}{Y}\right) \\ &= n \cdot 1 \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{n}{n-2} \end{aligned}$$

$t$  分布の様子



正規分布からの標本抽出

定理 7  $X_1, X_2, \dots, X_n: N(0, 1)$  に従う独立な確率変数

1.  $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(0, 1/n)$
2.  $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$
3.  $\bar{X}$  と  $S^2$ : 独立

証明 まず、(1) を証明する。 $\bar{X}$  の積率母関数を  $M(t)$  とする。

$$\begin{aligned} M(t) &= E\left(e^{\bar{X}t}\right) \\ &= E\left(e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i t}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E\left(e^{\frac{t}{n} X_i}\right) \\ &= \left[\exp\left(t^2/2n^2\right)\right]^n \\ &= \exp\left(t^2/2n\right) \end{aligned}$$

これは  $N(0, 1/n)$  の積率母関数と一致する。

—  $\bar{X}$  と  $S^2$  の独立性 (1/3) —

次に (2), (3) を証明する。次の変数変換を考える

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ Y_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

明らかに、

- $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^t = 1, \quad i = 1, \dots, n$
- $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^t = 0, \quad i \neq j = 1, \dots, n$

—  $\bar{X}$  と  $S^2$  の独立性 (2/3) —

すると、次のことが分かる

- $Y_1, \dots, Y_n$ : 正規分布に従う
- $E(Y_i) = 0, V(Y_i) = 1, i = 1, \dots, n$
- $E(Y_i Y_j) = 0, i \neq j = 1, \dots, n$

すなわち、 $Y_1, \dots, Y_n$  は互いに独立である

- $\sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Y_i^2 &= [Y_1, Y_2, \dots, Y_n] [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]^t \\ &= ([X_1, X_2, \dots, X_n] A^t) (A [X_1, X_2, \dots, X_n]^t) \\ &= [X_1, X_2, \dots, X_n] (A^t A) [X_1, X_2, \dots, X_n]^t \\ &= [X_1, X_2, \dots, X_n] I_{n \times n} [X_1, X_2, \dots, X_n]^t \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{aligned}$$

—  $\bar{X}$  と  $S^2$  の独立性 (3/3) —

従って、 $\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2$  は  $\chi^2(n-1)$  に従い、また  $Y_n$  と独立。  
ところで、

$$Y_n = \sqrt{n}\bar{X}$$

で、また

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - Y_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\bar{X})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\ &= S^2\end{aligned}$$

## 第6講：区間推定: 正規分布の平均の場合

### 区間推定 confidence interval

- 母数  $\theta$  に依存して決まる確率密度関数 :  $f(x|\theta)$
- 無作為標本  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ :

$$X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} f(x|\theta)$$

- 任意の  $0 < \alpha < 1$  に対し、次が成り立つ

$$P[L(\mathbf{X}) \leq \theta \leq U(\mathbf{X})] = 1 - \alpha \quad (6)$$

定義 4 • (6) を満たす区間  $[L, U] = [L(\mathbf{X}) \leq \theta \leq U(\mathbf{X})]$  を  $\theta$  の信頼係数  $1 - \alpha$  の信頼区間 confidence interval という。

- $L, U$  をそれぞれ 下側信頼限界 lower confidence limit と 上側信頼限界 upper confidence limit という。
- $1 - \alpha$  を  $[L, U]$  の信頼係数 confidence coefficient という。

注： 通常信頼係数を  $1 - \alpha = 0.9, 0.95$  とする。

— 平均・分散の区間推定問題 —

- 1 標本問題 one sample problem

1. 1つの無作為標本:

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

2.  $\mu$  の信頼区間の構成
3.  $\sigma^2$  の信頼区間の構成

- 2 標本問題 two sample problem

1. 2つの無作為標本:

$$X_1, \dots, X_m \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$Y_1, \dots, Y_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

2.  $\mu_x - \mu_y$  の信頼区間の構成
3.  $\sigma_x^2 / \sigma_y^2$  の信頼区間の構成

—  $\mu$  の信頼区間 ( $\sigma^2$  が既知) —

標準正規分布の  $\alpha$  パーセント点を  $z_\alpha$  とする。すなわち

$$\int_{-\infty}^{z_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \alpha$$

定理 8

1. 無作為標本:

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

2.  $\sigma^2$ : 既知

$$3. \bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$$

このとき、 $\mu$  の信頼係数  $1 - 2\alpha$  の信頼区間は次に与えられる

$$P \left[ \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \right] = 1 - 2\alpha$$

—  $\mu$  の信頼区間 ( $\sigma^2$  が既知): 証明 —

標本平均  $\bar{X}$  は正規分布に従う。また平均と分散はそれぞれ

$$E(\bar{X}) = \mu, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

すなわち、

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

従って、次が成り立つ

$$Y = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha &= P[|Y| \leq z_{1-\alpha}] \\ &= P\left[-z_{1-\alpha} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq z_{1-\alpha}\right] \\ &= P\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha}\right] \end{aligned}$$

—  $\mu$  の信頼区間 ( $\sigma^2$  が未知) —

定理 9 次の条件が成り立つとする。

1.  $t_{\alpha}^{n-1}$ : 自由度  $n - 1$  の  $t$  分布の  $\alpha$  パーセント点
2. 無作為標本:

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

3.  $\mu, \sigma^2$ : 未知
4. 標本平均, 標本分散

$$\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

このとき、 $\mu$  の信頼係数  $1 - 2\alpha$  の信頼区間は次に与えられる

$$P \left[ \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}^{n-1} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}^{n-1} \right] = 1 - 2\alpha$$

$\mu$  の信頼区間 ( $\sigma^2$  が未知): 証明

条件より

•

$$Y = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

•  $Y, Z$  の独立性より

$$T = \frac{Y}{\sqrt{Z/(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$$

•

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha &= P[|T| \leq t_{1-\alpha}^{n-1}] \\ &= P\left[-t_{1-\alpha}^{n-1} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \leq t_{1-\alpha}^{n-1}\right] \\ &= P\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}^{n-1} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}^{n-1}\right] \end{aligned}$$

—  $\mu$  の信頼区間 ( $\sigma^2$  が未知): 例 —

ある学校で100人の生徒が無作為に選ばれ、これらの生徒に知能テストが行われた。テストの点数の平均 50.0, 標本分散  $s_x^2 = 100.0$  が得られた。

この学校の生徒の同じテストにおける得点が正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うとして、母平均  $\mu$  の信頼係数  $1 - 2\alpha = 95\%$ ,  $90\%$  の信頼区間を求めよ。

解 求める信頼区間は  $\left[ \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}^{n-1}, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}^{n-1} \right]$  で、 $n = 100, \bar{x} = 50.0, \alpha = 0.025, 0.05$  となる。また、

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} s_x^2} = \sqrt{\frac{100}{99}} \times 10.0 = 10.05$$

表によって、 $t_{1-0.025}^{99} = t_{0.975}^{99} = 1.98$ ,  $t_{1-0.05}^{99} = t_{0.95}^{99} = 1.65$

- 95% 信頼区間:  $\left[ 50.0 - \frac{10.05}{\sqrt{100}} 1.98, 50.0 + \frac{10.05}{\sqrt{100}} 1.98 \right] = [48.0, 52.0]$
- 90% 信頼区間:  $\left[ 50.0 - \frac{10.05}{\sqrt{100}} 1.65, 50.0 + \frac{10.05}{\sqrt{100}} 1.65 \right] = [48.3, 51.7]$

## 第7講：区間推定: 正規分布の分散の場合

—  $\sigma^2$  の信頼区間 —

定理 10 次の条件が成り立つとする。

1.  $\chi_{\alpha}^{n-1}$ : 自由度  $n - 1$  の  $\chi^2$  分布の  $\alpha$  パーセント点

2. 無作為標本:

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

3.

$$\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

このとき、 $\mu$  の信頼係数  $1 - 2\alpha$  の信頼区間は次に与えられる

$$P \left[ \frac{S^2}{\chi_{1-\alpha}^{n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{S^2}{\chi_{\alpha}^{n-1}} \right] = 1 - 2\alpha$$

$\sigma^2$  の信頼区間: 証明

まず、

$$\frac{S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

従って、

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha &= P \left[ \chi_{\alpha}^{n-1} \leq \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\alpha}^{n-1} \right] \\ &= P \left[ \frac{S^2}{\chi_{1-\alpha}^{n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{S^2}{\chi_{\alpha}^{n-1}} \right] \end{aligned}$$

—  $\sigma^2$  の信頼区間: 例 —

ある学校で100人の生徒が無作為に選ばれ、これらの生徒に知能テストが行われた。テストの点数の平均 50.0, 標本分散  $s_x^2 = 100.0$  が得られた。

この学校の生徒の同じテストにおける得点が正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うとして、母分散  $\sigma^2$  の信頼係数  $1 - 2\alpha = 95\%$ ,  $90\%$  の信頼区間を求めよ。

解 求める信頼区間は  $\left[ \frac{S^2}{\chi_{1-\alpha}^{n-1}}, \frac{S^2}{\sqrt{\chi_{\alpha}^{n-1}}} \right]$  ただし、

$$n = 100, \bar{x} = 50.0, s^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 = ns_x^2 = 100.^2, \alpha = 0.025, 0.05$$

表によって、

$$\chi_{0.975}^{99} = 128.422, \chi_{0.025}^{99} = 73.361, \chi_{0.95}^{99} = 123.225, \chi_{0.05}^{99} = 77.046$$

- 95% 信頼区間:  $[100.^2/128.422, 100.^2/73.361] = [77.9, 136.3]$
- 90% 信頼区間:  $[100.^2/123.225, 100.^2/77.046] = [81.2, 129.8]$

—————  $\sigma_x^2/\sigma_y^2$  の信頼区間 —————

定理 11 次の条件が成り立つとする。

1.  $F_\alpha^{n-1;m-1}$ : 自由度  $(n-1, m-1)$  の  $F$  分布の  $\alpha$  パーセント点
2. 無作為標本:

$$X_1, \dots, X_m \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_x, \sigma_x^2), \quad Y_1, \dots, Y_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

3.  $X_i, Y_j$ : 独立で、

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i, \quad S_x^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 \\ \bar{Y} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j, \quad S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 \end{aligned}$$

このとき、 $\sigma_x^2/\sigma_y^2$  の信頼係数  $1-2\alpha$  の信頼区間は次に与えられる

$$P \left[ \frac{S_x^2}{S_y^2} F_\alpha^{n-1;m-1} \leq \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \leq \frac{S_x^2}{S_y^2} F_{1-\alpha}^{n-1;m-1} \right] = 1 - 2\alpha$$

条件より

•

$$(m-1) \frac{S_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(m-1)$$

$$(n-1) \frac{S_y^2}{\sigma_y^2} = \frac{1}{\sigma_y^2} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

• 独立性より

$$Z = \frac{S_y^2/\sigma_y^2}{S_x^2/\sigma_x^2} = \frac{S_y^2}{S_x^2} \times \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \sim F(n-1, m-1)$$

従って、

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha &= P \left[ F_{\alpha}^{n-1; m-1} \leq \frac{S_y^2}{S_x^2} \times \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \leq F_{1-\alpha}^{n-1; m-1} \right] \\ &= P \left[ F_{\alpha}^{n-1; m-1} \frac{S_x^2}{S_y^2} \leq \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \leq F_{1-\alpha}^{n-1; m-1} \frac{S_x^2}{S_y^2} \right] \end{aligned}$$

$\mu_x - \mu_y$  の信頼区間 (分散が既知)

定理 12 次の条件が成り立つとする。

1. 無作為標本 ( $\sigma_x^2, \sigma_y^2$ : 既知):

$$X_1, \dots, X_m \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_x, \sigma_x^2), \quad Y_1, \dots, Y_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

2.  $X_i, Y_j$ : 独立で、

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j,$$

このとき、 $\mu_x - \mu_y$  の信頼係数  $1 - 2\alpha$  の信頼区間は次に与えられる

$$P \left[ \bar{X} - \bar{Y} - z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}} \leq \mu_x - \mu_y \leq \bar{X} - \bar{Y} + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}} \right] = 1 - 2\alpha$$

$\mu_x - \mu_y$  の信頼区間 (分散が既知): 証明

- $\bar{X} - \bar{Y}$  が正規分布に従い、

$$E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_x - \mu_y$$

$$V(\bar{X} - \bar{Y}) = V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) = \frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}$$

- 従って

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\sigma_x^2/m + \sigma_y^2/n}} \sim N(0, 1)$$

- よって、

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha &= P[|Z| \leq z_{1-\alpha}] \\ &= P\left[-z_{1-\alpha} \leq \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\sigma_x^2/m + \sigma_y^2/n}} \leq z_{1-\alpha}\right] \end{aligned}$$

したがって

$$1 - 2\alpha = P\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}} \leq \mu_x - \mu_y \leq \bar{X} - \bar{Y} + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}}\right]$$

$\mu_x - \mu_y$  の信頼区間 (分散が未知)

定理 13 次の条件が成り立つとする。

1. 無作為標本 (同分散):

$$X_1, \dots, X_m \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_x, \sigma^2), \quad Y_1, \dots, Y_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_y, \sigma^2)$$

2.  $X_i, Y_j$ : 独立で、

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i, \quad S_x^2 = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j, \quad S_y^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_x^2 + S_y^2}{m + n - 2}$$

このとき、 $\mu_x - \mu_y$  の信頼係数  $1 - 2\alpha$  の信頼区間は次に与えられる

$$I = \left[ \bar{X} - \bar{Y} - t_{1-\alpha}^{m+n-2} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \hat{\sigma}, \quad \bar{X} - \bar{Y} + t_{1-\alpha}^{m+n-2} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \hat{\sigma} \right]$$

•  $\mu_x - \mu_y$  の信頼区間 (分散が未知): 証明

$$U = \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sigma^2\right)$$

$$V = \frac{S_x^2}{\sigma^2} + \frac{S_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m + n - 2)$$

•  $\bar{X}, \bar{Y}, S_x^2, S_y^2$ : 独立

•  $W = (U - E(U))/\sqrt{\text{Var}(U)}$

$$\begin{aligned} T &= W/\sqrt{V/(m+n-2)} \\ &= \frac{[(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)]/\sqrt{(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})\sigma^2}}{\sqrt{(S_x^2/\sigma^2 + S_y^2/\sigma^2)/(m+n-2)}} \\ &= \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \hat{\sigma}} \sim t(m+n-2) \end{aligned}$$

• 従って  $1 - 2\alpha = P\left[\left|\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \hat{\sigma}}\right| \leq t_{1-\alpha}^{m+n-2}\right]$

## 第8講：仮説検定: Introduction

## 統計的仮説

定義 5 (統計的仮説) statistical hypothesis

- ある確率変数の分布に関する記述を統計的仮説という。
- 統計的仮説が分布の形を完全に指定する場合、この仮説を単純仮説 simple hypothesis といい、それ以外の場合を複合仮説 composite hypothesis という。

例 1  $X_1, \dots, X_n$  を  $N(\theta, 25)$  からの無作為標本とする。

- 単純仮説 :  $H : \theta = 17$
- 複合仮説 :  $H : \theta \leq 17$

## 仮説検定

定義 6 (仮説検定) test of a statistical hypothesis

ある統計的仮説を棄却 reject するかどうかを決めるための手順を仮説の検定という。

例 2  $X_1, \dots, X_n$  を  $N(\theta, 25)$  からの無作為標本とする。

- 仮説 :  $H : \theta \leq 17$
- 検定法  $\gamma$ :

$\bar{X} > 17 + \frac{10}{\sqrt{n}}$  のとき、 $H$  を棄却する

棄却域

定義 7 (標本空間) sample space

$n$  個の無作為標本  $X_1, \dots, X_n$  に対して、次の集合を標本空間という。

$\mathcal{X} = \{(x_1, \dots, x_n); (x_1, \dots, x_n) \text{ が } (X_1, \dots, X_n) \text{ の全ての取りうる値}\}$

定義 8 (棄却域) critical region  $\mathcal{X}$  を標本空間とし、 $C \subset \mathcal{X}$  は  $\mathcal{X}$  の部分集合で、

$$(x_1, \dots, x_n) \in C \implies \text{仮説を棄却する}$$

と仮説を検定するとき、 $C$  をこの検定の棄却域という。

例 3  $X_1, \dots, X_n$  を  $N(\theta, 25)$  からの無作為標本とする。

- 仮説:  $H: \theta \leq 17$
- 検定法  $\gamma$ :  $\bar{X} > 17 + 10/\sqrt{n}$  のとき、 $H$  を棄却する
- 棄却域:  $C_\gamma = \{(x_1, \dots, x_n); \bar{x} > 17 + 10/\sqrt{n}\}$

## 2種類の誤り

定義 9 (帰無仮説・対立仮説) null hypothesis, alternative hypothesis

- 検定すべき仮説を帰無仮説といい、通常  $H_0$  で表す。
- 帰無仮説と矛盾する仮説を対立仮説といい、通常  $H_1$  で表す。帰無仮説と対立仮説は、どちらか一方必ず成り立つとする。

定義 10 (2種類の誤り) two types of error

- 帰無仮説  $H_0$  が成り立つとき、 $H_0$  を棄却することを第1種の誤り type I error といい、第1種の誤りを犯す確率を第1種の誤りの大きさ size of type I error という。
- 対立仮説  $H_1$  が成り立つとき、対立仮説  $H_1$  を棄却することを第2種の誤り type II error といい、第2種の誤りを犯す確率を第2種の誤りの大きさ size of type II error という。

## 検出力関数

定義 11 (検出力関数) power function 密度関数  $f(x|\theta)$  を持つ母集団からの無作為標本抽出を考える。帰無仮説  $H_0$  に対する検定  $\gamma$  の検出力関数は

$$\pi_\gamma(\theta) = P[H_0 \text{を棄却} | X_1, \dots, X_n \sim f(x|\theta)]$$

で定義される母数  $\theta$  の関数である。  $\pi_\gamma(\theta) \in [0, 1]$  になることに注意する。

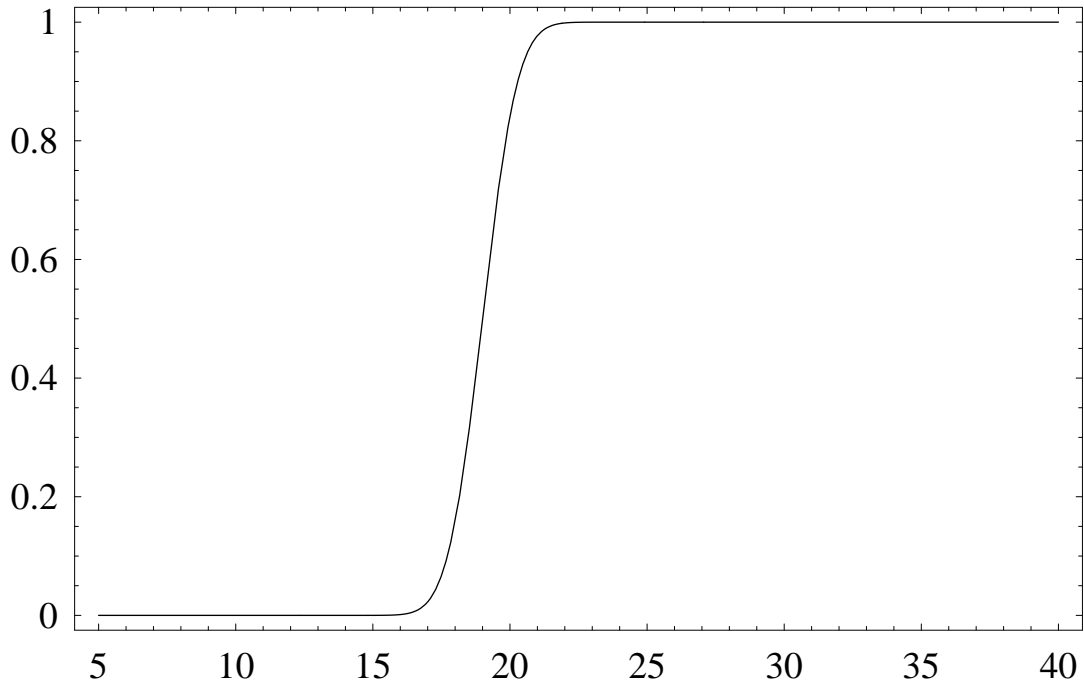
例 4  $X_1, \dots, X_n$  を  $N(\theta, 25)$  からの無作為標本とする。

- 帰無仮説 :  $H_0 : \theta \leq 17$
- $\bar{X} > 17 + 10/\sqrt{n}$  のとき、  $H_0$  を棄却する検定の検出力関数は

$$\begin{aligned} \pi_\gamma(\theta) &= P[\bar{X} > 17 + 10/\sqrt{n} | \theta \in R] \\ &= P\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{5} > \frac{17 + 10/\sqrt{n} - \theta}{5/\sqrt{n}}\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{17 + 10/\sqrt{n} - \theta}{5/\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

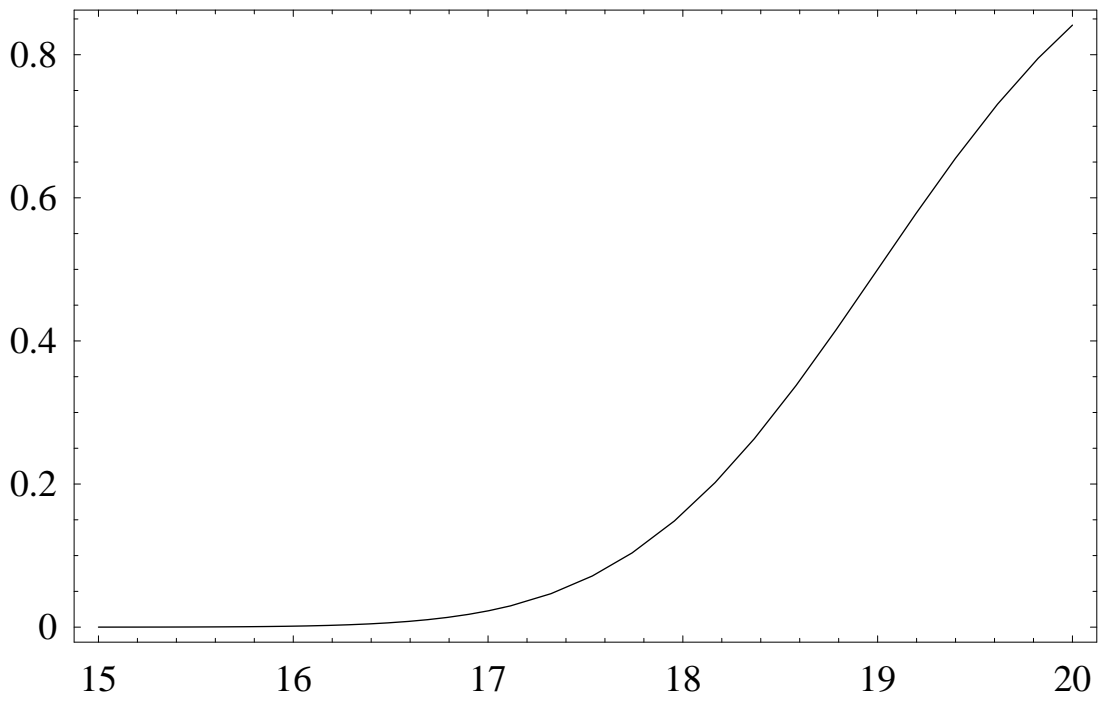
検出力関数 (つづき)

$$\pi_\gamma(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{17+10/\sqrt{n}-\theta}{5/\sqrt{n}}\right) \text{ with } n = 25$$



検出力関数 (つづき)

帰無仮説:  $H_0 : \theta \leq 17$ . 検出力関数  $\pi_\gamma(\theta)$  の  $\theta = 17$  の近くの様子



母数空間

定義 12 (母数空間) parameter space 確率変数  $X$  が密度関数  $f(x|\theta)$  に従うとき、母数  $\theta$  の全ての取りうる値の集合  $\Theta$  を母数空間という。すなわち、 $\Theta = \{\theta \mid \text{全て可能な}\theta\text{の値}\}$

例 5 •  $X$  が二項分布  $\text{Bi}(n, \theta)$  に従うとする。すなわち

$$P(X = x) = {}_n C_x \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$$

このとき、母数空間は  $\Theta = \{\theta \mid 0 \leq \theta \leq 1\}$

•  $X$  が正規分布  $N(\theta, 1)$  に従うとする。すなわち

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \theta)^2}{2}\right\}$$

このとき、母数空間は  $\Theta = \{\theta \mid -\infty < \theta < \infty\}$

有意水準

定義 13 (有意水準) size of test (significance level)

- 密度関数:  $f(x|\theta)$  からの標本抽出を考える
- 帰無仮説  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  に対する検定  $\gamma$  の検出力関数が  $\pi_\gamma(\theta)$  のとき、

$$\text{有意水準} = \sup_{\theta \in \Theta_0} [\pi_\gamma(\theta)]$$

例 6  $X_1, \dots, X_n$  を  $N(\theta, 25)$  からの無作為標本とする。

- 帰無仮説:  $H_0 : \theta \in \Theta_0 = \{\theta | \theta \leq 17\}$
- $\gamma$ :  $\bar{X} > 17 + 10/\sqrt{n}$  のとき、 $H_0$  を棄却する
- 検出力関数:  $\pi_\gamma(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{17+10/\sqrt{n}-\theta}{5/\sqrt{n}}\right)$

$$\begin{aligned} \text{有意水準} &= \sup_{\theta \leq 17} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{17 + 10/\sqrt{n} - \theta}{5/\sqrt{n}}\right) \right] \\ &= 1 - \Phi(2) \approx 0.023 \end{aligned}$$

## 第9講：仮説検定: 尤度比検定

## 尤度比検定

定義 14 (尤度比検定) likelihood ratio test

- $X_1, \dots, X_n \sim f(x|\theta)$
- 帰無仮説  $H_0 : \theta = \theta_0$
- 対立仮説  $H_1 : \theta = \theta_1$
- 尤度比

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{f(X_1|\theta_0) \cdots f(X_n|\theta_0)}{f(X_1|\theta_1) \cdots f(X_n|\theta_1)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n f(X_i|\theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(X_i|\theta_1)}\end{aligned}$$

- 尤度比検定 : 任意の  $k > 0$  に対して、次のように検定する

$$\begin{cases} \lambda \leq k \text{ のとき} : H_0 \text{ を棄却} \\ \lambda > k \text{ のとき} : H_0 \text{ を採択} \end{cases}$$

## 最強力検定

定義 15 (最強力検定) most powerful test

- 帰無仮説 :  $H_0 : \theta = \theta_0$ ; 対立仮説 :  $H_1 : \theta = \theta_1$
- 有意水準  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) : 与えられている
- 検定方式  $\gamma$  は次が満たされる

$$\pi_\gamma(\theta_0) \leq \alpha$$

次が満たされるとき、検定  $\gamma^*$  は有意水準  $\alpha$  での最強力検定という。

1.  $\pi_{\gamma^*}(\theta_0) = \alpha$
2.  $\pi_{\gamma^*}(\theta_1) \geq \pi_\gamma(\theta_1)$

— Neyman-Pearson の補題 —

定理 14 (Neyman-Pearson の補題) Neyman-Pearson Lemma

- $X_1, \dots, X_n \sim f(x|\theta)$
- 帰無仮説  $H_0 : \theta = \theta_0$
- 対立仮説  $H_1 : \theta = \theta_1$
- 尤度比:  $\lambda = \prod_{i=1}^n f(X_i|\theta_0) / \prod_{i=1}^n f(X_i|\theta_1)$

有意水準  $\alpha (0 < \alpha < 1)$  での尤度比検定, すなわち

1. 棄却域:  $C^* = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \lambda \leq k^*\}$
2. 有意水準:  $\alpha = P[(X_1, \dots, X_n) \in C^* \mid \theta = \theta_0]$

が満たされる尤度比検定  $\gamma^*$  は有意水準  $\alpha$  での最強力検定となる。

### Neyman-Pearson の補題: 証明

- 連続の場合のみについて証明する。
- 任意の有意水準  $\alpha$  以下の検定  $\gamma$  を考える。検定  $\gamma$  の棄却域を  $C$  とする。すなわち

$$P[(X_1, \dots, X_n) \in C \mid \theta = \theta_0] \leq \alpha$$

- 次の記号

$$\int_A L_0 = \int \dots \int_A \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_0) dx_1 \cdots dx_n$$

$$\int_A L_1 = \int \dots \int_A \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1) dx_1 \cdots dx_n$$

を約束すると、 $\pi_{\gamma^*}(\theta_1) = \int_{C^*} L_1$ ,  $\pi_{\gamma}(\theta_1) = \int_C L_1$  となる。従って、証明すべきことは

$$\int_{C^*} L_1 \geq \int_C L_1$$

Neyman-Pearson の補題: 証明(つづき)

一方

$$\begin{aligned}\int_{C^*} L_1 - \int_C L_1 &= \int_{C^* \cap \bar{C}} L_1 - \int_{C \cap \bar{C}^*} L_1 \\ &\geq \frac{1}{k^*} \int_{C^* \cap \bar{C}} L_0 - \frac{1}{k^*} \int_{C \cap \bar{C}^*} L_0 \\ &= \frac{1}{k^*} \left( \int_{C^* \cap \bar{C}} L_0 + \int_{C^* \cap C} L_0 - \int_{C^* \cap C} L_0 - \int_{C \cap \bar{C}^*} L_0 \right) \\ &= \frac{1}{k^*} \left( \int_{C^*} L_0 - \int_C L_0 \right) \\ &= \frac{1}{k^*} (\alpha - \text{size of } \gamma) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

This completes the proof.

尤度比検定：例

- $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, 1)$
- $H_0 : \theta = \theta_0$  vs.  $H_1 : \theta = \theta_1$  ( $\theta_1 > \theta_0$  を仮定)
- 有意水準を  $\alpha$  とする
- 尤度比

$$\begin{aligned}\lambda &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_i - \theta_0)^2}{2}} / \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_i - \theta_1)^2}{2}} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(X_i - \theta_0)^2 - (X_i - \theta_1)^2] \right\} \\ &= \exp \left[ n(\theta_0 - \theta_1) \bar{X} - \frac{n}{2}(\theta_0^2 - \theta_1^2) \right]\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}\lambda &\leq k^* \\ \Leftrightarrow \bar{X} &\geq k\end{aligned}$$

— 尤度比検定：例 —

最後に、有意水準を達成するように、 $k$  を決める。

$$\begin{aligned}\alpha &= P[\bar{X} \geq k \mid \theta = \theta_0] \\ &= P[\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_0) \geq \sqrt{n}(k - \theta_0)] \\ &= 1 - \Phi[\sqrt{n}(k - \theta_0)]\end{aligned}$$

したがって、

$$k = \theta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

すなわち

$$\bar{X} \geq \theta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

のとき、 $H_0$  を棄却する。

---

$$\alpha = 0.025 \quad \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$$

$$\alpha = 0.05 \quad \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0.95) \approx 1.65$$

$$\alpha = 0.10 \quad \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0.90) \approx 1.28$$

## 第10講：仮説検定:信頼区間による方法

— 信頼区間による仮説検定法 —

- 密度関数  $f(x|\theta)$  をもつ母集団からの標本抽出  $X_1, \dots, X_n$  を考える
- $\theta$  の信頼度  $1 - \alpha$  の信頼区間：

$$(L, U) = (L(X_1, \dots, X_n), U(X_1, \dots, X_n))$$

- 帰無仮説  $H_0 : \theta = \theta_0$  に対する検定  $\gamma$ :
  - $\theta_0 \in (L, U)$  のとき、 $H_0$  を採択
  - $\theta_0 \notin (L, U)$  のとき、 $H_0$  を棄却

この検定の有意水準は

$$\begin{aligned} P[H_0 \text{を棄却} | H_0] &= P[\theta_0 \notin (L, U) | H_0] \\ &= 1 - P[\theta_0 \in (L, U) | H_0] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

— 正規分布平均の検定 —

定理 15 (平均の信頼区間) 次の条件が成り立つとする。

1.  $t_{\alpha}^{n-1}$ : 自由度  $n - 1$  の  $t$  分布の  $\alpha$  パーセント点

2. 無作為標本:

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

3.  $\mu, \sigma^2$ : 未知

4. 標本平均, 標本分散

$$\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

このとき、 $\mu$  の信頼係数  $1 - 2\alpha$  の信頼区間は次に与えられる

$$P \left[ \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}^{n-1} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}^{n-1} \right] = 1 - 2\alpha$$

正規分布平均の検定(つづき)

- 帰仮説  $H_0 : \mu = \mu_0$  の検定を考える

- 棄却域 :

$$\begin{aligned} C &= \{(x_1, \dots, x_n); |T| > t_{1-\alpha}^{n-1}\} \\ &= \left\{ (x_1, \dots, x_n); \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \right| > t_{1-\alpha}^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

- 検定の有意水準 :

$$\begin{aligned} \text{有意水準} &= P[H_0 \text{を棄却} | H_0] \\ &= P \left\{ \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \right| > t_{1-\alpha}^{n-1} \right\} \\ &= 1 - P \left\{ \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \right| \leq t_{1-\alpha}^{n-1} \right\} \\ &= 1 - (1 - 2\alpha) \\ &= 2\alpha \end{aligned}$$

— 正規分布平均の検定 (つづき) —

ある大学の女子新入生 20 人を抜き取って体重 (単位 : kg) を測定したデータが次のものである .

41 53 48 49 50 55 48 51 45 55 47 56 51 60 55 53 49 66 52 52

女子体重は正規分布に従うとする。このとき有意水準  $\alpha = 0.1, 0.05$  で、女子新入生の体重の平均が 49.5kg であるという仮説を検定せよ。

解 :

- $H_0 : \mu = \mu_0 = 49.5$

- $n = 20, \bar{x} = 51.80, s^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 / (n - 1) = 29.22$

- 検定統計量の値 :

$$T = \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \right| = \left| \frac{\sqrt{20}(51.80 - 50.0)}{\sqrt{29.22}} \right| = 1.90$$

有意水準 = 0.1  $\longrightarrow t_{1-0.05}^{n-1} = t_{0.95}^{19} = 1.73 < T \longrightarrow H_0$ を棄却

有意水準 = 0.05  $\longrightarrow t_{1-0.025}^{n-1} = t_{0.975}^{19} = 2.09 > T \longrightarrow H_0$ を採択

正規分布の分散に関する検定

定理 16 (分散の信頼区間) 次の条件が成り立つとする。

1.  $\chi_{\alpha}^{n-1}$ : 自由度  $n - 1$  の  $\chi^2$  分布の  $\alpha$  パーセント点
2. 無作為標本:

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

- 3.

$$\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

このとき、 $\mu$  の信頼係数  $1 - 2\alpha$  の信頼区間は次に与えられる

$$P \left[ \frac{S^2}{\chi_{1-\alpha}^{n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{S^2}{\chi_{\alpha}^{n-1}} \right] = 1 - 2\alpha$$

正規分布の分散に関する検定(つづき)

- 帰仮説  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  の検定を考える

- 棄却域 :

$$C = \{(x_1, \dots, x_n); S^2 < \sigma_0^2 \chi_\alpha^{n-1} \text{ and } S^2 > \sigma_0^2 \chi_{1-\alpha}^{n-1}\}$$

- 検定の有意水準 :

$$\begin{aligned} \text{有意水準} &= P[H_0 \text{を棄却} | H_0] \\ &= P\{S^2 < \sigma_0^2 \chi_\alpha^{n-1} \text{ and } S^2 > \sigma_0^2 \chi_{1-\alpha}^{n-1}\} \\ &= 1 - P\{\sigma_0^2 \chi_\alpha^{n-1} \leq S^2 \leq \sigma_0^2 \chi_{1-\alpha}^{n-1}\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{S^2}{\chi_{1-\alpha}^{n-1}} \leq \sigma_0^2 \leq \frac{S^2}{\chi_\alpha^{n-1}}\right\} \\ &= 1 - (1 - 2\alpha) \\ &= 2\alpha \end{aligned}$$