確率論II

種村 秀紀
千葉大学理学部数学・情報数理学科
〒 263-8522　千葉県千葉市稲毛区弥生町 1-33
e-mail: tanemura@math.s.chiba-u.ac.jp
http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/ ˜ tanemura/index.html

平成 27 年 1 月 29 日

目 次

参考文献

[1] 確率論, 福島正俊 著, 裳華房.

[2] 確率論, 西尾真喜子 著, 実教出版.

[3] 確率論入門, 笠原勇二　著, 数学書房.

[4] 確率論, 熊谷隆　著, 共立出版.

[5] 九州大学確率論講義ノート, 谷口説男 著.

1　二項分布の正規近似

アブラーム・ド・モアブル（ Abraham de Moivre, 1667 年 5 月 26 日－ 1754 年 11 月 27 日）は, フランスの数学者である,. シャンパニュー地方にうまれたがカルヴィン派の新教徒であったため, 1685 年にナントの勅令が破棄されるとイングランドに亡命した,. したがって彼の業績はイングランドにおけるものであり, また生涯を通じて困窮していた,. 主な業績としてド・モアブルの定理（　任意の自然数に対して $(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta$ が成り立つという定理,. ）を証明したことが知られている,. また負の二項分布, 二項分布の極限としての正規分布, 今日スターリングの公式として知られる近似式なども彼の研究成果である,. （　以上 Wikipedia からの引用,. ）

２項分布の正規分布への収束を示す, ド・モアブルーラプラスの定理は, 局所極限定理と積分型極限定理に分けられる. 前者から後者は比較的簡単に導くことができるが, 前者の証明にはスターリングの公式のを用いて２項分布の漸近性についての相当に詳しい評価を行う必要がある. ド・モアブルーラプラスの定理は, あとの章で紹介する中心極限定理の特別な場合にあたる.

1.1　ウオリスの公式とスターリングの公式

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n=1,2,\dots)$ に対し, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$, のとき $b_n\sim a_n$ と記することにする.

補題 1.1 （ウオリスの公式）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\sqrt{\pi}. \tag{1.1}$$

これは, 次のように書き換えることができる:

$$ {}_{2n}C_n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sim\frac{1}{\sqrt{n\pi}}. \tag{1.2}$$

証明　定積分

$$S_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx$$

の値は,

$$\begin{aligned} S_{2n}&=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\\ S_{2n+1}&=\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\end{aligned} \tag{1.3}$$

であるので（各自確認）,

$$S_{2n}S_{2n+1}=\frac{\pi}{4n+2},$$

さらに

$$S_{2n+1}\sqrt{\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}}=\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \tag{1.4}$$

となる. 一方, $x\in(0,\pi/2)$ では $\sin x\in(0,1)$ だから

$$0<S_{2n+1}<S_{2n}<S_{2n-1},\quad 1<\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}<\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n}.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}}=1.$$

したがって (1.4) から

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} S_{2n+1}.$$

また, (1.3) から

$$S_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

上の 2 式から求める (1.1) を得る. □

つぎにスターリングの公式をしめす. この公式を最初に発見したのは , ド・モアブルであるが , スターリングの貢献は , 定数が $\sqrt{2\pi}$ であることを決定したことである.

補題 1.2 （スターリングの公式）

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}. \tag{1.5}$$

証明 $\log n! = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n$ を評価する. $\log x$ は増加関数だから,

$$\int_{k-1}^{k} \log x \; dx < \log k < \int_{k}^{k+1} \log x \; dx.$$

k について和をとって

$$\int_{0}^{n} \log x \; dx < \log n! < \int_{1}^{n+1} \log x \; dx.$$

定積分を計算すると

$$n \log n - n < \log n! < (n+1)\log(n+1) - n.$$

両辺の相加平均に近い値 $(n+1/2)\log n - n$ で $\log n!$ を近似することを考えてみる. その差を d_n とおく：

$$d_n = \log n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n + n. \tag{1.6}$$

このとき

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - \log(n+1) + \left(n+\frac{3}{2}\right)\log(n+1) - 1 \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n} - 1 = (2n+1)\frac{1}{2}\log\frac{1+1/(2n+1)}{1-1/(2n+1)} - 1. \end{aligned}$$

一方,

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$

を項別積分して

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots.$$

t のかわりに $-t$ をいれて

$$\log\frac{1}{1-t} = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \cdots.$$

相加平均をとって

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t} = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots.$$

したがって

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots.$$

右辺に現れる数字 $3, 5, 7, \ldots$ を 3 に置き換えた等比級数を考えると

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3\{(2n+1)^2 - 1\}} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

これで d_n は減少し, $d_n - \frac{1}{12n}$ は増加することがわかった. 後の性質から, d_n は下に有界（$d_1 - 1/12$ が一つの下界）であることがわかる. ゆえに極限

$$C = \lim_{n\to\infty} d_n$$

が存在する. $a = e^C$ とおくと, (1.6) より

$$n! \sim a n^{n+1/2} e^{-n}$$

が示せたことになる. そこでウオリスの公式 (1.1) に上の式を代入すると

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2 n^{2n+1} e^{-2n} 2^{2n}}{a(2n)^{2n+1/2} e^{-2n}\sqrt{n}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

となるので $a = \sqrt{2\pi}$ を得る. □

1.2　正規近似：ド・モアブル - ラプラスの定理

$0 < p < 1$, n は自然数とし, $q = 1 - p$ とおく. 2 項分布の密度関数を $b(k; n, p)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ とおく:

$$b(k; n, p) = {}_nC_k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

つまり, 成功する確率が p に等しい試みを n 回独立に繰り返すとき, 成功の回数を表す確率変数を R_n とすると

$$P(R_n = k) = b(k; n, p), \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{1.8}$$

となる.

$[x]$ は x を越えない最大に整数を表すとする,. （ガウスの記号）,.

補題 1.3　k が 0 から n まで動くとき, $b(k; n, p)$ は最初単調増加し, 最大値を $k = [(n+1)p]$ でとり, 以後単調減少する.

証明

$$\frac{b(k; n, p)}{b(k-1; n, p)} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq}$$

だから, 項 $b(k; n, p)$ はその直前の項よりも $k < (n+1)p$ のとき大きく, $k > (n+1)p$ のとき小さい. したがって, 最大値は $k = [(n+1)p]$ のときであるが, $(n+1)p$ が整数のときには, その直前でも最大値をとる. □

$b([(n+1)p]; n, p)$ を中央項という. 中央項は k がだいたい np に等しいところにあるわけである. n の増加とともに, 中央項とそれに比較的に近い項が, 漸近的にどう変動するかその様子を明らかにするのが, 次に述べる局所極限定理である. 証明の準備として, 関数 $\log(a + x)$, $a > 0$ についてのテイラーの定理を述べておく: ある $\theta \in (0, 1)$ が存在して, 次がなりたつ.

$$\log(a + x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3(a + \theta x)^3}. \tag{1.9}$$

定理 1.1 (局所極限定理) A, B を $A < B$ なる任意の実数とし, また $0 \le \gamma, \gamma' < \frac{2}{3}$ とする. k が

$$np + An^{\gamma} \le k \le np + Bn^{\gamma'} \tag{1.10}$$

の範囲であるとき

$$b(k; n, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{ -\frac{(k-np)^2}{2npq} \right\} \Big(1 + r_n(k)\Big) \tag{1.11}$$

が成立し, $r_n(k)$ は次の意味で k について一様に 0 に収束する：

$$\max_{np + An^{\gamma} \le k \le np + Bn^{\gamma'}} |r_n(k)| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.12}$$

証明

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} (1 + \eta_n)$$

と置いてみると, スターリングの公式は $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$ を意味している. これを 2 項分布に代入して

$$\begin{aligned} b(k; n, p) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} p^k q^{n-k}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} \sqrt{2\pi (n-k)} (n-k)^{n-k} e^{-n+k}} \frac{1 + \eta_n}{(1 + \eta_k)(1 + \eta_{n-k})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \frac{k}{n} \frac{n-k}{n}}} \left(\frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{-n+k} p^k q^{n-k} \frac{1 + \eta_n}{(1 + \eta_k)(1 + \eta_{n-k})}. \end{aligned}$$

ところで k に条件 (1.10) を課しつつ $n \to \infty$ とすると, k について一様に

$$\frac{k}{n} \to p, \quad \frac{n-k}{n} \to q.$$

また, このとき η_k, η_{n-k} もともに k について一様に 0 に収束する. したがって

$$b(k; n, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{-n+k} p^k q^{n-k} (1 + r_{n,k})$$

と書けて, $r_{n,k}$ は (1.12) を満たすことがわかった. この式をさらに

$$b(k; n, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\{T_{n,k}\} (1 + r_{n,k}) \tag{1.13}$$

の形に書き換えておこう. ただし exp の肩の指数は

$$T_{n,k} = -k \log \frac{k}{n} - (n-k) \log \frac{n-k}{n} + k \log p + (n-k) \log q \tag{1.14}$$

である.

(1.11) を示すためには

$$z = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

と置いてみて, $T_{n,k}$ が k について一様に $-\frac{z^2}{2}$ へ収束することを示せばよい. さて

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= -k \log\left(\frac{np + z\sqrt{npq}}{n}\right) - (n-k) \log\left(\frac{nq - z\sqrt{npq}}{n}\right) + k \log p + (n-k) \log q \\ &= -T^{(1)}_{n,k} - T^{(2)}_{n,k} + k \log p + (n-k) \log q. \end{aligned} \tag{1.15}$$

ここで

$$T^{(1)}_{n,k} = k\log\left(p + z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right), \quad T^{(2)}_{n,k} = (n-k)\log\left(q - z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

と置いた. テイラーの定理 (1.9) を $a = p, x = z\sqrt{\frac{pq}{n}}$ として $T^{(1)}_{n,k}$ に適用すると

$$T^{(1)}_{n,k} = k\log p + \frac{zk\sqrt{q}}{\sqrt{pn}} - \frac{z^2qk}{2pn} + \delta_{n,k}. \tag{1.16}$$

ただし

$$\delta_{n,k} = \frac{1}{3\left(p+\theta z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)^3}\left(z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)^3 k, \quad \theta \in (0,1). \tag{1.17}$$

ところで $C = \max\{|A|, |B|\}$, $\gamma" = \max\{\gamma, \gamma'\}$ と置くと, k が (1.10) の範囲にある限り
$|z| \le \frac{C}{\sqrt{pq}} n^{\gamma"-1/2}$ だから

$$\left|z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right| \le Cn^{\gamma"-1}, \quad \left|\left(z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)^3 k\right| \le C^3 n^{3\gamma"-2}(p + Cn^{\gamma"-1}).$$

$\gamma" \in (0, 2/3)$ を仮定しているから, (1.17) の右辺の積の第 1 項の絶対値は n が十分大のとき k に関して一様にある定数を越えず, 第 2 項は, $n \to \infty$ のときに k に関して一様に 0 に収束すると結論される. つまり $\delta_{n,k}$ は, 条件 (1.10) の下では $n \to \infty$ のとき, k について一様に 0 に収束する.

全く同様に, 展開式

$$T^{(2)}_{n,k} = (n-k)\log q - \frac{z(n-k)\sqrt{p}}{\sqrt{qn}} - \frac{z^2p(n-k)}{2qn} + \delta'_{n,k} \tag{1.18}$$

が得られ, 剰余項 $\delta'_{n,k}$ は条件 (1.10) の下では $n \to \infty$ のとき, k について一様に 0 に収束する.

(1.15), (1.16), (1.18) により $\delta"_{n,k} = \delta_{n,k} + \delta'_{n,k}$ と置くと

$$T_{n,k} = -\frac{zk\sqrt{q}}{\sqrt{pn}} + \frac{z(n-k)\sqrt{p}}{\sqrt{qn}} + \frac{z^2qk}{2pn} + \frac{z^2p(n-k)}{2qn} - \delta"_{n,k}.$$

$k = np + z\sqrt{npq}$, $n - k = nq - z\sqrt{npq}$ を代入すると, 右辺は

$$-z\sqrt{npq} - z^2q + z\sqrt{npq} - z^2p + \frac{z^2q}{2} + \frac{z^3q^2}{2\sqrt{npq}} + \frac{z^2p}{2} - \frac{z^3p^2}{2\sqrt{npq}} - \delta_{n,k}" = -\frac{z^2}{2} - \frac{z^3(p^2-q^2)}{2\sqrt{npq}} - \delta"_{n,k}$$

と変形される. $|z| \le \frac{C}{\sqrt{pq}} n^{\gamma"-1/2}$ であるから

$$\left|\frac{z^3}{\sqrt{n}}\right| \le C^3(pq)^{-3/2}n^{3\gamma"-2}.$$

ゆえに最後の式の第 2 項も k について一様に 0 に収束する. これで証明が完了した. □

この局所極限定理より直ちにつぎの積分型極限定理が導かれるが, 積分型の方がずっと簡単で理解しやすい.

定理 1.2 (積分型極限定理) $A < B$ をみたす任意の実数 A, B に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k^{*} b(k; n, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-x^2/2} dx. \tag{1.19}$$

ただし $\sum_k^{*}$ は, $0 \le k \le n$ なる整数 k について

$$np + A\sqrt{npq} \le k \le np + B\sqrt{npq} \tag{1.20}$$

の範囲で和をとる記号と解釈する.

証明　$z_k = (k-np)/\sqrt{npq}$ と置く. 定理 1.1 より

$$\sum_k^* b(k;n,p) = \sum_{A \le z_k \le B} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{z_k^2}{2}\right\}(1+r_n(k)).$$

整数 k の変動とともに z_k は $\frac{1}{\sqrt{npq}}$ ずつ動く. 閉区間 $[A,B]$ に属する点 z_k を

$$A \le z_\alpha < z_{\alpha+1} < \cdots < z_\ell < z_{\ell+1} < \cdots < z_{\beta-1} < z_\beta \le B$$

と並べると, 和

$$\sum_{A \le z_k \le B} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-z_k^2/2} \tag{1.21}$$

と連続関数 $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ の閉区間 $[A,B]$ 上でのリーマン和

$$f(z_\alpha)(z_\alpha - A) + \sum_{\ell=\alpha}^{\beta-1} f(z_{\ell+1})(z_{\ell+1} - z_\ell) + f(B)(B - z_\beta)$$

とは, 高々最初と最後の項しか異ならず, 差の絶対値は

$$(|f(z_\alpha)| + |f(B)|)\frac{1}{\sqrt{npq}}$$

を超えない. したがって $n \to \infty$ のとき, 和 (1.21) は定積分

$$\int_A^B f(x)dx$$

すなわち (1.19) の右辺に収束する.

特に, 和 (1.21) は ある n に無関係な正数 M を越えないことに注意する. さて k が (1.20) の範囲を変動するときは, 勿論条件 (1.10) がみたされるから, 定理 1.1 で詳しく証明したように, 剰余項 $r_n(k)$ は一様に 0 に収束する. すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し n が十分大ならば, k について一様に $|r_n(k)| < \varepsilon$. ゆえに

$$\left| \sum_{A \le z_k \le B} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{z_k^2}{2}\right\} r_n(k) \right| < M\varepsilon.$$

よって (1.19) が証明された. □

ところで (1.8) で述べた表示を用いると, (1.19) の左辺は

$$P(np + A\sqrt{npq} \le R_n \le np + B\sqrt{npq}) = P(A \le R_n^* \le B).$$

ただし

$$R_n^* = \frac{R_n - np}{\sqrt{npq}} \tag{1.22}$$

と表わされるから, 積分型極限定理は

$$\lim_{n\to\infty} P(A \le R_n^* \le B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-x^2/2} dx \tag{1.23}$$

と書き換えられることになる. じつは, np, npq は, それぞれ確率変数 R_n の平均と分散に等しい. また k 回目の試行の結果が成功ならば 1, 失敗ならば 0 という値をとる確率変数を Z_k で表すと, R_n を

$$R_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

なる和の形に表示することができる. (1.22) で定義される R^* は, したがって**正規化された和** と呼ばれ, その平均値, 分散はそれぞれ 0 と 1 に等しく n に依存しない. ド・モアブル-ラプラスの積分型極限定理を (1.23) のように表示すると, それは独立同分布の確率変数の正規化された和の極限定理の形として一般的意味をもつ. これが, 今日中心極限定理と呼ばれているものにほかならない.

2　分布の収束と特性関数

2.1　特性関数

定義 2.1 (i)　$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 μ の**特性関数** $\varphi_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を次で定義する.

$$\varphi_\mu(t) = \mathbb{E}^\mu[e^{\sqrt{-1}t\xi}] = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}tx}\mu(dx),\ t \in \mathbb{R}.$$

ただし $\xi(x) = x(x \in \mathbb{R})$.

(ii)　X が確率変数で, $\mu = P^X$ のとき φ_{P^X} を φ_X と書き, X の特性関数と呼ぶ.

定理 2.1 μ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とする. $\varphi_\mu(0) = 1, |\varphi_\mu(t)| \leq 1$ となる. さらに φ_μ は一様連続であり, 次の意味で正定値である; 任意の $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ に対し, 行列 $(\varphi_\mu(t_i - t_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ はエルミート行列であり,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j)\xi_i\overline{\xi_j} \geq 0,\ \forall \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

証明　$\varphi_\mu(0) = 1,\ |\varphi_\mu(t)| \leq 1$ は容易に分かる.

$$|\varphi_\mu(t) - \varphi_\mu(s)| = |\mathbb{E}^\mu[e^{\sqrt{-1}s\xi}(e^{\sqrt{-1}(t-s)\xi} - 1)]| \leq \mathbb{E}^\mu[|e^{\sqrt{-1}(t-s)\xi} - 1|]$$

より, Lebesgue の有界収束定理により一様連続性を得る.

正値性は $e^{\sqrt{-1}(x-y)} = e^{\sqrt{-1}x}\overline{e^{\sqrt{-1}y}}$ に注意し,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j)\xi_i\overline{\xi_j} = \mathbb{E}^\mu\left[\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\sqrt{-1}t_i\xi}\xi_i\right)\overline{\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\sqrt{-1}t_i\xi}\xi_i\right)}\right]$$

と変形すれば明らかである. □

定理 2.2 （レヴィ (*P. Lévy*) の反転公式）μ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とする. $a, b \in \mathbb{R}$ を分布関数 $F_\mu(x) \equiv \mu((-\infty, x])$ の連続点とすれば,

$$F_\mu(b) - F_\mu(a) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi_\mu(t) \frac{e^{-\sqrt{-1}tb} - e^{-\sqrt{-1}ta}}{-\sqrt{-1}t} dt. \tag{2.2}$$

とくに ν を $\varphi_\mu = \varphi_\nu$ となる $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とすれば, $\mu = \nu$ である.

証明　(2.2) 式の右辺で極限をとるまえの項を次のように変形する.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi_\mu(t) \frac{e^{-\sqrt{-1}tb} - e^{-\sqrt{-1}ta}}{-\sqrt{-1}t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathbb{E}^\mu\left[\int_{-T}^{T} \frac{e^{\sqrt{-1}t(\xi-b)} - e^{\sqrt{-1}t(\xi-a)}}{-\sqrt{-1}t} dt\right] \quad (\because \text{積分の順序交換, フビニの定理}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathbb{E}^\mu\left[\int_{-T}^{T} \frac{\sin(t(\xi-b)) - \sin(t(\xi-a))}{-t} dt\right] \quad (\because \text{奇関数の積分は } 0) \\
&= \frac{1}{\pi}\mathbb{E}^\mu\left[\int_{0}^{T} \frac{\sin(t(\xi-b)) - \sin(t(\xi-a))}{-t} dt\right]
\end{aligned}$$

$u(T, z) = \int_0^T (\sin(tz)/t)dt$ とおく. 変数変換を行うと $u(T, z) = u(Tz, 1)$ であるから, 関数論で見た

$$\int_0^\infty (\sin x/x)dx = \pi/2 \tag{2.3}$$

を思い出せば,

$$\sup_{T\geq 0, z\in\mathbb{R}} |u(T,z)| < \infty, \qquad u(T,z) \to \begin{cases} \pi/2, & (z>0), \\ -\pi/2, & (z<0), \\ 0, & (z=0) \end{cases} \quad T\to\infty,$$

となることがわかる. 有界収束定理により,

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \varphi_\mu(t) \frac{e^{-\sqrt{-1}tb} - e^{-\sqrt{-1}ta}}{-\sqrt{-1}t} dt &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\mathbb{E}^\mu[-u(T,\xi-b)+u(T,\xi-a)] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}^\mu[1_{(0,\infty)}(\xi-a) - 1_{(-\infty,0)}(\xi-a) - 1_{(0,\infty)}(\xi-b) + 1_{(-\infty,0)}(\xi-b)] \\ &= \frac{1}{2}\{\mu((a,b]) + \mu([a,b))\} = \frac{1}{2}\{F_\mu(b) - F_\mu(a) + F_\mu(b-) - F_\mu(a-)\} \end{aligned}$$

となる. a, b ともに連続点ならば最後の項は $F_\mu(b) - F_\mu(a)$ である. 以上より定理の前半が示された. 2 つの分布関数が連続点で一致すれば, 全体で一致することは分布関数の右連続性から明らかである. 従って定理の後半も示された. □

演習 2.0　等式 (2.3) の証明を与えなさい .

注意　ここで紹介したレヴィの反転公式は 1 次元の場合であるが, 一般の多次元に対してもレヴィの定理は成立する. (詳しくは, 例えば, [2] 確率論, 西尾真喜子 著, 実教出版の 112 頁を参照.)

定理 2.3 $E[|X|^n] < \infty$ ならば, 任意の $k \leq n$ に対して φ_X は k 階微分可能で, $E[X^k] = \sqrt{-1}^{-k}\varphi_X^{(k)}(0)$.

証明　$(d/dt)^k e^{\sqrt{-1}tX} = \sqrt{-1}^k X^k e^{\sqrt{-1}tX}$ であるから, Lebesgue の優収束定理 (微分版) より主張をえる. □

特性関数は, フーリエ変換の一般化である. 以下にフーリエ変換に関する基本的な性質を参考のために纏めておく.

定義 A.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が **急減少関数** であるとは, 任意の $k, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し, $\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|x|^k|f^{(m)}(x)|\} < \infty$ となることをいう.

急減少関数の全体を $\mathcal{S}$ と表す.

定義 A.2. $f \in \mathcal{S}$ に対し,

$$\mathfrak{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx, \quad \overline{\mathfrak{F}}[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{\sqrt{-1}\xi x}d\xi$$

とおき, $\mathfrak{F}[f]$ を f の **フーリエ変換**, $\overline{\mathfrak{F}}[f]$ を f の **フーリエ逆変換**という.

定理 A.3. $f \in \mathcal{S}$ とする.

(i) $\mathfrak{F}[f], \overline{\mathfrak{F}}[f] \in \mathcal{S}$.

(ii) $\overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}[f] = \mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}}[f] = f$.

証明. $k, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ とする. $f \in \mathcal{S}$ に対し, $\tilde{f}_m(x) = x^m f(x)$ とおく. $\tilde{f}_m \in \mathcal{S}$ である. Lebesgue の優収

束定理 (微分版) を用い, 部分積分を行えば

$$\begin{aligned}\xi^k(\mathfrak{F}[f])^{(m)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)(-\sqrt{-1}x)^m \xi^k e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx \\ &= (-\sqrt{-1})^{m-k}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_m(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^k (e^{-\sqrt{-1}\xi x})dx \\ &= (-1)^m\sqrt{-1}^{\ m-k}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_m^{(k)}(x)e^{-\sqrt{-1}\xi x}dx\end{aligned}$$

となる. したがって $\mathfrak{F}[f] \in \mathcal{S}$ となる. $\overline{\mathfrak{F}}[f](x) = \mathfrak{F}[f](-x)/(2\pi)$ より, $\overline{\mathfrak{F}}[f]$ もまた $\mathcal{S}$ に属する.

$f, g \in \mathcal{S}$ とする. 積分の順序交換により

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}[f](\xi)g(\xi)e^{\sqrt{-1}\xi x}d\xi = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-\sqrt{-1}\xi y}dy\right)g(\xi)e^{\sqrt{-1}\xi x}d\xi \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(y)g(\xi)e^{-\sqrt{-1}\xi(y-x)}dyd\xi = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-\sqrt{-1}\xi(y-x)}dy\right)g(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y)e^{-\sqrt{-1}\xi y}dy\right)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\left(\int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{-\sqrt{-1}\xi y}d\xi\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\mathfrak{F}[g](y)dy.\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ とし, $g(\xi) = e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}$ とおけば, $\mathfrak{F}[g](y) = (2\pi)^{1/2}\varepsilon^{-1}e^{-y^2/(2\varepsilon^2)}$ となる.

($\because$) 変数変換により

$$\int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{-\xi z}d\xi = \frac{(2\pi)^{1/2}}{\varepsilon}e^{z^2/(2\varepsilon^2)}$$

を得る. 解析接続して, $z = \sqrt{-1}y$ を代入すればよい. ///

上式に代入すれば

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}[f](\xi)e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}e^{\sqrt{-1}\xi x}d\xi &= (2\pi)^{1/2}\varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(x+y)e^{-y^2/(2\varepsilon^2)}dy \\ &= (2\pi)^{1/2}\int_{\mathbb{R}} f(x+\varepsilon y)e^{-y^2/2}dy.\end{aligned}$$

$\varepsilon \to 0$ とすれば, Lebesgue の優収束定理より,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}[f](\xi)e^{\sqrt{-1}\xi x}d\xi = 2\pi f(x).$$

すなわち, $\overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}[f] = f$ を得る. 逆の関係式はこれから容易に従う. $\square$

上述の定理を用いて, 定理 2.2 の後半部分の別証明を与えましょう.

急減少関数 $f \in \mathcal{S}$ は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\xi)e^{\sqrt{-1}\xi x}d\xi,$$

と表現できる. Fubini の定理より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\xi)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x}\mu(dx)\right)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\xi)\varphi_\mu(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\xi)\varphi_\nu(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\nu(dx)\end{aligned} \tag{2.4}$$

となる．$-\infty < a < b < \infty$ とする．$f_n \in \mathcal{S}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \quad \text{もしくは} \quad x \ge b, \\ 1, & x \in [a+1/n, b-1/n], \end{cases}$$

をみたすものとする．このとき

$$\mu((a,b)) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\nu(dx) = \nu((a,b))$$

となり $\mu = \nu$ が示された．ここで 1 番目と 3 番目の等号は有界収束定理から導かれ，2 番目の等号は上の等式 (2.4) より導かれることに注意しておく．

演習 2.1　X は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数とする．X が以下の確率分布に従う場合の特性関数を計算しなさい．
(i) パラメータ (n,p) の二項分布に従う場合 $(X \sim B(n,p))$, i.e.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ \ k = 0,1,2,\ldots,n.$$

(ii) パラメータ p の幾何分布に従う場合 $(X \sim Ge(p))$, i.e.

$$P(X=k) = p(1-p)^k, \ \ k = 0,1,2,\ldots.$$

(iii) パラメータ (m,p) の負の二項分布に従う場合 $(X \sim NB(m,p))$, i.e.

$$P(X=k) = \binom{m+k-1}{k} p^m (1-p)^k, \ \ k = 0,1,2,\ldots.$$

(iv) パラメータ λ のポアソン分布に従う場合 $(X \sim P_o(\lambda))$, i.e.

$$P(X=k) = (\lambda^k/k!)e^{-\lambda}, \ \ k = 0,1,2,\ldots$$

(v) $[a,b]$ 上の一様分布に従う場合 $(X \sim U(a,b))$, i.e.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(y) dy.$$

(vi) パラメータ λ の指数分布に従う場合 $(X \sim E_X(\lambda))$, i.e.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda y} 1_{(0,\infty)}(y) dy.$$

(vii) パラメータ (ν, λ) のガンマ分布に従う場合 $(X \sim \Gamma(\nu,\lambda))$, i.e.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\lambda^\nu y^{\nu-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\nu)} 1_{(0,\infty)}(y) dy.$$

(viii) コーシー分布に従う場合 $(X \sim Cau)$, i.e.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+y^2)} dy.$$

(ix) パラメータ (m, σ^2) のガウス分布に従う場合 $(X \sim N(m,\sigma^2))$, i.e.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-(y-m)^2/(2\sigma^2)] dy.$$

2.2 概収束, 確率収束, 弱収束

定義 2.2 (i) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ を確率変数とする.

(a) X_n が X に概収束するとは, $X_n \to X \quad a.s.$, つまり $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$ がなりたつことをいう.

(b) X_n が X に確率収束するとは, 次が成り立つことをいう.

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0,\ \forall\varepsilon > 0.$$

(c) X_n が X に弱収束するとは, X の分布関数 F_X のすべての連続点 x において $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ となることをいう.

(ii) μ_n, μ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とする. μ_n が μ に弱収束するとは, F_μ のすべての連続点 x において $F_{\mu_n}(x) \to F_\mu(x)$ となることをいう.

注 1.1. X_n が X に弱収束することは P^{X_n} が P^X に弱収束することの言い換えに過ぎない.

命題 2.1 X_n が X に確率収束するための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right] = 0$$

となることである. とくに X_n が X に概収束すれば確率収束する.

証明 後半は有界収束定理より従う.

写像 $[0,\infty) \ni x \mapsto x/(1+x)$ は単調増加である. $x > \varepsilon$ ならば, $x/(1+x) > \varepsilon/(1+\varepsilon)$ である. よって

$$P(|X - X_n| > \varepsilon) \leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right]$$

となる. これより十分性が従う. $x \leq \varepsilon$ では $x/(1+x) \leq \varepsilon/(1+\varepsilon)$ となることから,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}; |X - X_n| > \varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}; |X - X_n| \leq \varepsilon\right] \\
&\leq P(|X_n - X| > \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}
\end{aligned}$$

となり, $n \to \infty$, $\varepsilon \searrow 0$ として必要性を得る. □

定理 2.4 μ_n, μ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とする. 次の条件は同値となる.

(i) μ_n は μ に弱収束する.

(ii) 任意の有界連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mu_n}[f] = \mathbb{E}^{\mu}[f]$.

(iii) 任意の有界一様連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mu_n}[f] = \mathbb{E}^{\mu}[f]$.

(iv) 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{R}$ に対し, $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$ となる.

(v) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}$ に対し, $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$ となる.

(vi) 任意の境界が $\mu-$ 零集合となる $A \in \mathcal{B}(E)$ に対し, $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ となる.

(vii) $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\mu_n}(t) = \varphi_\mu(t) (\forall t \in \mathbb{R})$.

証明 (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iv) $\Leftrightarrow$ (v), (vi) $\Rightarrow$ (i), (ii) $\Rightarrow$ (vii) は明らか.

<u>(i)$\Rightarrow$ (ii)</u> : $\varepsilon, \delta > 0$ を任意に固定する. $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ とおく. F_μ の連続点 $a < b$ を $F(a) < \varepsilon, F(b) > 1-\varepsilon$ となるように選ぶ.

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : F_{\mu_n}(a) < 2\varepsilon, F_{\mu_n}(b) > 1 - 2\varepsilon,\ \forall n \geq N_0.$$

f の $[a,b]$ での一様連続性に注意し, $a=a_1<\cdots<a_{N+1}=b$ を, 各 a_i は F_μ の連続点で, $\sup_{x,y\in[a_j,a_{j+1}]}|f(x)-f(y)|<\delta$ となるように選ぶ. $h(x)=\sum_{j=1}^N f(a_j)1_{(a_j,a_{j+1}]}(x)$ とおく. このとき $|f(x)-h(x)|<\delta(\forall x\in(a,b])$ となる.

$$\mathbb{E}^\nu[h]=\sum_{j=1}^N f(a_j)\{F_\nu(a_{j+1})-F_\nu(a_j)\},\ \ \nu\in\{\mu_n,\mu:n\in\mathbb{N}\}$$

であるから,

$$\left|\mathbb{E}^{\mu_n}[f]-\sum_{j=1}^N f(a_j)\{F_{\mu_n}(a_{j+1})-F_{\mu_n}(a_j)\}\right|\le\delta+4M\varepsilon$$

$$\left|\mathbb{E}^{\mu}[f]-\sum_{j=1}^N f(a_j)\{F_{\mu}(a_{j+1})-F_{\mu}(a_j)\}\right|\le\delta+2M\varepsilon$$

となる. したがって

$$\limsup_{n\to\infty}|\mathbb{E}^{\mu_n}[f]-\mathbb{E}^\mu[f]|\le 2\delta+6M\varepsilon.$$

$\delta,\varepsilon\to 0$ として, (ii) を得る.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : $F\subset\mathbb{R}$ を閉集合とし, $\rho(x,F)$ を x と F の距離とする. $f_k(x)=(1+\rho(x,F))^{-k}, k=1,2,\ldots$ とおけば, $f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は有界一様連続であり, さらに $1_F\le f_k, \lim_{k\to\infty}f_k(x)=1_F(x)(x\in\mathbb{R})$ が成り立つ. したがって (iii) より

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)\le\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mu_n}[f_k]=\mathbb{E}^\mu[f_k].$$

Lebseque の有界収束定理により

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}^\mu[f_k]=\mu(F).$$

したがって

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)\le\mu(F).$$

(iv)(v) $\Rightarrow$ (vi) : $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の内部を A°, 閉包を $\overline{A}$ とし, $\mu(\overline{A}\backslash A^\circ)=0$ と仮定する. このとき (iii), (iv) の不等式より

$$\mu(A)=\mu(A^\circ)\le\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A^\circ)\le\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A)\le\limsup_{n\to\infty}\mu_n(\overline{A})\le\mu(\overline{A})=\mu(A).$$

(vii) $\Rightarrow$ (iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が急減少関数であるとする. このとき急減少関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が見つかって, $f(x)=\int_{-\infty}^\infty g(t)e^{\sqrt{-1}tx}dt$ と表現できる. とくに

$$\mathbb{E}^\nu[f]=\int_{-\infty}^\infty g(t)\varphi_\nu(t)dt,\ \ \forall\nu\in\{\mu,\mu_n|n\in\mathbb{N}\}$$

である. 優収束定理より $n\to\infty$ とすれば,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mu_n}[f]=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty g(t)\varphi_{\mu_n}(t)dt=\int_{-\infty}^\infty g(t)\varphi_\mu(t)dt=\mathbb{E}^\mu[f].$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が有界一様連続とする.

$$f_\varepsilon(x)=\int_{-\infty}^\infty f(y)(2\pi\varepsilon)^{-1/2}\exp[-(y-x)^2/(2\varepsilon)]dy$$

とおけば, f_ε は急減少関数で, $\varepsilon\to 0$ とすれば f_ε は f に一様収束する. したがって, 等式

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mu_n}[f_\varepsilon]=\mathbb{E}^\mu[f_\varepsilon]$$

において $\varepsilon\to 0$ とすれば (iii) を得る. □

系 2.1　X_n が X に確率収束すれば, 弱収束する.

証明　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を有界一様連続とする. 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\delta>0$ を, $|x-y|\le\delta$ ならば $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ となるように選ぶ. $M=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ とおけば,

$$|\mathbb{E}^{P^{X_n}}[f]-\mathbb{E}^{P^X}[f]|=|\mathbb{E}[f(X_n)]-\mathbb{E}[f(X)]|\le\varepsilon+MP(|X_n-X|>\delta)$$

したがって, 定理 5.3(iii) より, P^{X_n} は P^X に弱収束する. □

演習 2.2. $\Omega=[0,1],\mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1]),P$ を Lebesque 測度とする. $n=2^m+k(0\le k<2^m)$ のとき, $X_n(\omega)=1_{[k2^{-m},(k+1)2^{-m}]}(\omega)$ とおく.

(i)　X_n は 0 に確率収束することを示せ.

(ii)　$\liminf_{n\to\infty}X_n(\omega),\limsup_{n\to\infty}X_n(\omega)$ を求めよ.

(iii)　X_n は概収束するか？

演習 2.3　X_n が X に測度収束するとき, 部分列 $\{X_{n_k}\}$ を, X に概収束するように選べることを証明せよ.

2.3　Bochner の定理

既に確率測度の弱収束と特性関数の収束が同等であることは見たが, 実は特性関数の収束から極限となる確率測度の存在まで証明することができる.

定理 2.5 μ_n を $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とし, $\varphi_n=\varphi_{\mu_n}$ とおく. 各 $t\in\mathbb{R}$ に対し, $\varphi_n(t)$ は $\varphi(t)$ に収束し, $\varphi(t)$ は $t=0$ で連続であると仮定する. このとき $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 μ が存在し, $\varphi=\varphi_\mu$ となる. とくに μ_n は μ に弱収束する.

Remark.　上の定理を適用することができない代表的なものとして $[-n,n]$ 上の一様分布がある,. この場合 , $d\mu_n(x)=(2n)^{-1}\mathbf{1}_{[-n,n]}(x)dx$ であるので

$$\varphi_n(t)=\int_{-n}^{n}e^{\sqrt{-1}tx}\frac{1}{2n}dx\to\mathbf{1}_{\{0\}}(t),\quad n\to\infty,$$

t で連続とならない. 実際, 極限測度は, 全測度が零である測度になるので確率測度にはならない . この例からも分かるように上述の定理での条件, $\varphi(t)$ の $t=0$ での連続性は, 必要である.

定理 2.5 の証明

- $F_n=F_{\mu_n}$ とする. $\mathbb{Q}=\{r_j|j=1,2,\ldots\}$ と番号をつける. 各 j に対し, $\{F_n(r_j)\}_{n=1}^\infty\subset[0,1]$ であるから, $\{F_n(r_j)\}_{n=1}^\infty$ は収束部分列を持つ. 対角線論法により, 部分列 $1<n_1<n_2<\ldots$ が存在し, 任意の j に対し, $F_{n_k}(r_j)$ は $k\to\infty$ で有限確定な極限を持つ. $G_k=F_{n_k},b_r=\lim_{k\to\infty}G_k(r)(r\in\mathbb{Q})$ とおく.

- $G(x)=\inf_{r>x}b_r(x\in\mathbb{R})$ と定義する. G は非減少かつ右連続である.

  $(\because)$ $x<y$ とする. $G(x)\le G(y)$ は定義より明らか. $x_n\searrow x$ とする. $r_n\in\mathbb{Q},>x$ を $G(x)\le b_{r_n}\le G(x)+(1/n)$ ととる. 各 n に対し, 十分大きな m をとれば $x<x_m<r_n$ となる. したがって $G(x_m)\le b_{r_n}\le G(x)+(1/n)$. よって

$$G(x)\le\liminf_m G(x_m)\le\limsup_m G(x_m)\le G(x)+(1/n).$$

  $n\to\infty$ として右連続性を得る. ///

- x を G の連続点とする．このとき $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x)$.

  $(\because) r \in \mathbb{Q}, > x$ とする．$G_n(x) \le G_n(r)$, $\lim_{n\to\infty} G_n(r) = b_r$ であるから,

  $$\limsup_{n\to\infty} G_n(x) \le b_r.$$

  r について下限をとれば $\limsup_{n\to\infty} G_n(x) \le G(x)$.

  $y < x$ とし, $r \in \mathbb{Q}$ を $y < r < x$ ととる．$G_n(x) \ge G_n(r)$, $\lim_{n\to\infty} G_n(r) = b_r$ であるから

  $$\liminf_{n\to\infty} G_n(x) \ge b_r \ge \inf_{s>y} b_s = G(y).$$

  $y \nearrow x$ とすれば, x が連続点であるから, $G(y) \to G(x)$. これより主張を得る.///

- $G(-\infty) = 0, G(\infty) = 1$ となる．

  $(\because)$ $T > 0$ とする．

  $$\begin{aligned}
  &\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi_{\mu_{n_k}}(t)dt = \mathbb{E}^{\mu_{n_k}}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{\sqrt{-1}t\xi}dt\right] = \mathbb{E}^{\mu_{n_k}}\left[\frac{\sin T\xi}{T\xi}\right] \\
  &\le \mathbb{E}^{\mu_{n_k}}\left[\left|\frac{\sin T\xi}{T\xi}\right|\right] = \mathbb{E}^{\mu_{n_k}}\left[\left|\frac{\sin T\xi}{T\xi}\right|; |\xi| < \ell\right] + \mathbb{E}^{\mu_{n_k}}\left[\left|\frac{\sin T\xi}{T\xi}\right|; |\xi| \ge \ell\right] \\
  &\le \mu_{n_k}(|\xi| < \ell) + \frac{1}{T\ell}\mu_{n_k}(|\xi| \ge \ell).
  \end{aligned}$$

  書き直せば

  $$\begin{aligned}
  &1 - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi_{\mu_{n_k}}(t)dt \ge 1 - \mu_{n_k}(|\xi| < \ell) - \frac{1}{T\ell}\mu_{n_k}(|\xi| \ge \ell) \\
  &= \left(1 - \frac{1}{T\ell}\right)\mu_{n_k}(|\xi| \ge \ell) \ge \left(1 - \frac{1}{T\ell}\right)\{1 - F_{n_k}(\ell) + F_{n_k}(-\ell)\}.
  \end{aligned}$$

  $\ell = 2/T$ とすれば

  $$1 - F_{n_k}(2/T) + F_{n_k}(-2/T) \le 2\left\{1 - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi_{\mu_{n_k}}(t)dt\right\}.$$

  $\pm 2/T$ が G の連続点ならば, $k \to \infty$ として

  $$1 - G(2/T) + G(-2/T) \le 2\left\{1 - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t)dt\right\}.$$

  $\varphi(0) = 1$ で φ は $t = 0$ で連続であるから, $T \to 0$ とすれば, $0 \le 1 - G(\infty) + G(-\infty) \le 0$ となる．よって $1 - G(\infty) + G(-\infty) = 0$ となり, $0 \le G(-\infty) \le G(\infty) \le 1$ と合わせれば, $G(-\infty) = 0, G(\infty) = 1$ となる．///

  前期確率論 I の講義録での定理 2.8 より $G = F_\mu$ となる $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 μ が存在することがわかる．G の構成法から μ_{n_k} は μ に収束し, $\varphi_\mu = \varphi$ であることは明らかである．□

上述の定理には, 次の類似と定理がある,.

1. （グリベンコ (Glivenko) の定理） ν, μ_n の特性関数を φ, φ_n とする,.　任意の t に対して $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ ならば, $\mu_n \to \mu$ が成り立つ,.
2. （レヴィーの定理） μ_n の特性関数を φ_n とする,. 各店で φ_n は φ 収束し, 原点の近傍で一様収束するならば, μ_n はある分布 μ に収束し, その特性関数は φ となる,.

定理 2.6 （*Bochner* の定理）$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が $\varphi(0) = 1, t = 0$ で連続であり, 正定値（定理 2.1 参照）であるとする. このとき $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 μ が存在し, $\varphi = \varphi_\mu$ となる.

証明

- $|\varphi(t)| \leq 1$ であり, φ は $\mathbb{R}$ 上で連続である.

  $(\because)$ $t, 0$ に対応する行列 $\begin{pmatrix} 1 & \varphi(t) \\ \varphi(-t) & 1 \end{pmatrix}$ は正定値であるから, エルミート性から $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$ となり, さらに

$$1 - |\varphi(t)|^2 = \det \begin{pmatrix} 1 & \varphi(t) \\ \varphi(-t) & 1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

  つぎに $t, s, 0$ に対応する 3×3 行列の行列式を計算して

$$\begin{aligned}
&0 \leq \det \begin{pmatrix} 1 & \varphi(t-s) & \varphi(t) \\ \overline{\varphi(t-s)} & 1 & \varphi(s) \\ \overline{\varphi(t)} & \overline{\varphi(s)} & 1 \end{pmatrix} \\
&= 1 + \varphi(s)\varphi(t-s)\overline{\varphi(t)} + \overline{\varphi(s)\varphi(t-s)}\varphi(t) - |\varphi(s)|^2 - |\varphi(t)|^2 - |\varphi(t-s)|^2 \\
&= 1 - |\varphi(s) - \varphi(t)|^2 - |\varphi(t-s)|^2 - \varphi(t)\overline{\varphi(s)}(1 - \varphi(t-s)) - \overline{\varphi(t)}\varphi(s)(1 - \overline{\varphi(t-s)}) \\
&\leq 1 - |\varphi(s) - \varphi(t)|^2 - |\varphi(t-s)|^2 + 2|1 - \varphi(t-s)| \ \ (\because |\varphi| \leq 1)
\end{aligned}$$

  したがって

$$\begin{aligned}
|\varphi(s) - \varphi(t)|^2 &\leq 1 - |\varphi(t-s)|^2 + 2|1 - \varphi(t-s)| \\
&= (1 + |\varphi(t-s)|)(1 - |\varphi(t-s)|) + 2|1 - \varphi(t-s)| \\
&\leq 4|1 - \varphi(t-s)|. \ (\because |\varphi| \leq 1)
\end{aligned}$$

  ///

- φ は $\mathbb{R}$ で連続であり, さらに $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < \infty$ をみたすと仮定する. このとき,

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{-1}tx} \varphi(t) dt$$

  とおけば, f は連続, $f \geq 0, \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ であり $\mu(A) = \int_A f(x)dx$ とおけば, $\varphi = \varphi_\mu$ である.

  $(\because)$ f の連続性は Lebesgue の優収束定理の簡単な応用である.

  $G : [0, T]^2 \to \mathbb{R}$ が連続であれば, 変数変換により,

$$\int_0^T \int_0^T G(t-s) dt ds = \int_0^T ds \int_{-s}^{T-s} du G(u) = \int_{-T}^T (T - |u|) G(u) du$$

  $(\{(s,u)|0 \leq s \leq T, -s \leq u \leq T-s\} = \{(s,u)|0 \leq s \leq T-u, u \geq 0\} \cup \{(s,u)| -u \leq s \leq T, u < 0\}$ に注意せよ) となることにより,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) e^{-\sqrt{-1}tx} \varphi(t) dt \ \ (\because \text{優収束定理}) \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T} \int_0^T \int_0^T e^{-\sqrt{-1}(t-s)x} \varphi(t-s) dt ds \\
&= \lim_{T\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi T} 2^{-2n} \sum_{j,k=0}^{2^n} \varphi(jT2^{-n} - kT2^{-n}) e^{-\sqrt{-1}jTx2^{-n}} e^{\sqrt{-1}kTx2^{-n}} \geq 0.
\end{aligned}$$

最後の等式は Riemann 積分の近似と,φ の正定値性を使った. よって $f \geq 0$ となる.

$f_\sigma(x) = f(x)\exp[-\sigma^2 x^2/2]$ とおく. Fubini の定理より,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}tx} f_\sigma(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}tx}\varphi(s)e^{-\sqrt{-1}sx}e^{-\sigma^2x^2/2}dsdx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(t-s)^2/2\sigma^2}ds = \int_{\mathbb{R}}\varphi(t+\sigma s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-s^2/2}ds
\end{aligned}
$$

まず $t=0$ とし, $|\varphi| \leq 1$ に注意して $\sigma \to 0$ とすれば, Fatou の補題と優収束定理により

$$
\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \leq \liminf_{\sigma\to 0}\int_{\mathbb{R}}\varphi(\sigma s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-s^2/2}ds = \varphi(0) = 1.
$$

したがって f は可積分である. 再び優収束定理を用いれば

$$
\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}tx}f(x)dx = \lim_{\sigma\to 0}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t+\sigma s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-s^2/2}ds = \varphi(t).
$$

μ の定義より, $\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}tx}f(x)dx = \varphi_\mu(t)$ であるから, $\varphi = \varphi_\mu$ となる. ///

- φ を定理のとおりとする. $\varphi(t;y) = \varphi(t)e^{\sqrt{-1}ty}$ もまた定理の条件をみたす.

$$
\varphi^{(\sigma)}(t) = \varphi(t)e^{-\sigma^2t^2/2} = \int_{\mathbb{R}}\varphi(t;y)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-y^2/2\sigma^2}dy
$$

もまた定理の条件をみたす. ($\because$ リーマン積分の近似を用いよ). さらに, $|\varphi(t)| \leq 1$ より, これは先の段落の条件 ($\int_{\mathbb{R}}|\varphi^{(\sigma)}(t)|dt < \infty$) を満たしている. よって $\mu^{(\sigma)}$ が存在し, $\varphi^{(\sigma)} = \varphi_{\mu(\sigma)}$ となる. $\varphi^{(\sigma)} \to \varphi(\sigma \to 0)$ であるから, 定理 2.5 より μ が存在して $\varphi = \varphi_\mu$ となる. □

演習 2.4 $\lambda > 0, X_n \sim B(n, \lambda/n), X \sim P_O(\lambda)$ とする. $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ となることを示せ.

演習 2.5 $\lambda > 0, Y_n \sim P_O(n\lambda)$ とする. $X_n = n^{-1/2}(Y_n - n\lambda)$ とおく.
(i) $\varphi_{X_n}(t)$ を求めよ.
(ii)$X \sim N(0,\lambda)$ とする. $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ となることを示せ.

3 独立確率変数

3.1 独立確率変数

定義 3.1 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする.

(i) $A, B \in \mathcal{F}$ が独立とは $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つことを言う.

(ii) 確率変数 X, Y が独立とは, 任意の $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し, $X^{-1}(A)$ と $Y^{-1}(B)$ が独立となることをいう.

(iii) 確率変数列 $X_1, \dots, X_n$ が独立とは, 任意の $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し, 次が成り立つことを言う.

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}(A_j)\right) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j^{-1}(A_j)). \tag{3.1}$$

(iv) 確率変数列 $X_1, X_2, \dots$ が独立とは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $X_1, \dots, X_n$ が独立となることをいう.

(v) 確率変数列 $X_1, X_2, \dots$ が独立で, さらに分布 P^{X_i} が一致するとき, すなわち $P^{X_i} = P^{X_j}$ となるとき, **独立同分布**な *(independent identically distributed)* 確率変数列という. 略して *i.i.d.* 確率変数列とも書く.

演習 3.1 サイコロを 2 回投げることに対応する標本空間 $\Omega = \{(i,j) | i,j = 1, \dots, 6\}$ を考える. $\mathcal{F} = 2^\Omega$ とし, $P(A) = \#A/36$ とする. $X((i,j)) = i, Y((i,j)) = j$ とすれば, X と Y は独立となることを証明せよ. 同じ Ω で, X, Y が独立とならないような P の例を挙げよ.
演習 3.2 任意の $a < b, c < d$ に対し,

$$P(X \in (a,b), Y \in (c,d)) = P(X \in (a,b))P(Y \in (c,d))$$

となるとき, X, Y は独立であることを証明せよ.
演習 3.3 確率変数 X_1, X_2, X_3 は任意の $i \neq j$ に対し X_i と X_j が独立になるという. このとき X_1, X_2, X_3 は独立か?

定理 3.1 X, Y を確率変数とする. 次の条件は同値である.

(i) X と Y は独立である.

(ii) $T : \Omega \to \mathbb{R}^2$ を $T(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ とおく. このとき, T の $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ に誘導する確率測度 $P \circ T^{-1}$ は直積確率測度 $P^X \times P^Y$ に一致する.

(iii) $\varphi_{aX+bY}(t) = \varphi_X(at)\varphi_Y(bt) (\forall a, b, t \in \mathbb{R})$.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) : $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とすれば, 独立性より

$$\begin{aligned} P \circ T^{-1}(A \times B) &= P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) \\ &= P(X^{-1}(A))P(Y^{-1}(B)) \\ &= P^X(A)P^Y(B) = P^X \times P^Y(A \times B). \end{aligned}$$

Caratheodory の拡張定理より, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 上, $P \circ T^{-1} = P^X \times P^Y$ となる.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $\xi : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$, $\xi_i : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2)$ とおけば, Fubini の定理より,

$$\begin{aligned} \varphi_{aX+by}(t) &= \mathbb{E}^P[\exp\{\sqrt{-1}t(aX + bY)\}] \\ &= \mathbb{E}^{P \circ T^{-1}}[\exp\{\sqrt{-1}t(a\xi_1 + b\xi_2)\}] \\ &= \mathbb{E}^{P^X \times P^Y}[\exp\{\sqrt{-1}t(a\xi_1 + b\xi_2)\}] \\ &= \mathbb{E}^{P^X}[\exp\{\sqrt{-1}at\xi\}]\mathbb{E}^{P^Y}[\exp\{\sqrt{-1}bt\xi\}] = \varphi_X(at)\varphi_Y(bt). \end{aligned}$$

$\underline{(iii) \Rightarrow (i):}$ $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を急減少関数とし, $g_i = (2\pi)^{-1}\Im[f_i]$ とすれば, $f_i(x) = \int_{\mathbb{R}} g_i(a)e^{\sqrt{-1}ax}da$ である $(i = 1, 2)$. (定理 A.3 参照). Fubini の定理より

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f_1(X)f_2(Y)] &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g_1(a)g_2(b)\varphi_{aX+bY}(1)dadb \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g_1(a)g_2(b)\varphi_X(a)\varphi_Y(b)dadb \\
&= \mathbb{E}[f_1(X)]\mathbb{E}[f_2(Y)].
\end{aligned}$$

任意の $a < b$ に対し, $f_n \in \mathcal{S}$ がとれ, $0 \le f_n \le f_{n+1} \nearrow 1_{(a,b)}$ とできる. したがって上式より,

$$P(X \in (a,b), Y \in (c,d)) = P(X \in (a,b))P(Y \in (c,d))$$

となる. よって X, Y は独立となる. □

演習 3.4 X, Y が独立でともに可積分ならば, XY もまた可積分で, $E[XY] = E[X]E[Y]$ となることを証明せよ.

Hint: まず, X, Y ともに $\mathbb{SF}$ の元であるときに示せ. 次に, 単調収束定理を用いて $X, Y \ge 0$ の場合に拡張せよ. 最後に一般の X, Y に対し証明せよ.

演習 3.5 X, Y が独立ならば, $Cov(X,Y) = 0, Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ となることを示せ.

3.2 大数の法則

定理 3.2 (大数の弱法則) $X_1, X_2, \ldots$ は可積分な *i.i.d.* 確率変数列とする. $\mathbb{E}[X_i] = m$ とおく. このとき $X_1 + \cdots + X_n)/n$ は m に確率収束する.

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \ge \delta\right) \to 0 \quad (n \to \infty), \quad \forall\delta > 0.$$

証明 $C > 0$ を任意に固定し,

$$X_i^C = \begin{cases} X_i, & |X_i| \le C, \\ 0 & |X_i| > C \end{cases}, \quad Y_i^C = X_i - X_i^C, \quad a_C = \mathbb{E}[X_i^C], \quad b_C = \mathbb{E}[Y_i^C]$$

とおく. 優収束定理より,

$$\mathbb{E}[|Y_i^C|] = \mathbb{E}[|Y_1^C|] \to 0 \quad (C \to \infty).$$

Chebyshev の不等式を使えば,

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{X_1^C + \cdots + X_n^C}{n} - a_C\right| \ge \delta\right) &\le \delta^{-2}Var((X_1^C + \cdots + X_n^C)/n) \\
&= \delta^{-2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i^C) \\
&\le \frac{1}{n\delta^2}Var(X_1^C) \\
&\le \frac{C^2}{n\delta^2}
\end{aligned}$$

となる.

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m = \frac{X_1^C + \cdots + X_n^C}{n} - a_C + \frac{Y_1^C + \cdots + Y_n^C}{n} - b_C$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
&P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-m\right|\geq\delta\right)\\
&\leq P\left(\left|\frac{X_1^C+\cdots+X_n^C}{n}-a_C\right|\geq\delta/2\right)+P\left(\left|\frac{Y_1^C+\cdots+Y_n^C}{n}-b_C\right|\geq\delta/2\right)\\
&\leq\frac{4C^2}{n\delta^2}+\frac{2}{\delta}\mathbb{E}\left[\left|\frac{Y_1^C+\cdots+Y_n^C}{n}-b_C\right|\right]\\
&\leq\frac{4C^2}{n\delta^2}+\frac{2}{\delta}\mathbb{E}\left[\frac{|Y_1^C|+\cdots+|Y_n^C|}{n}+|b_C|\right]\\
&\leq\frac{4C^2}{n\delta^2}+\frac{4}{\delta}\mathbb{E}[|Y_1^C|]
\end{aligned}
$$

$n\to\infty, C\to\infty$ とすれば, 主張を得る. □

補題 3.1 (Borel-Cantelli の補題)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$ ならば,

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq m}A_n\right)=0.$$

(ii) $A_1,A_2,\ldots$ が独立で, $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$ ならば,

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq m}A_n\right)=1.$$

証明

(i)

$$P\left(\bigcup_{n\geq m}A_n\right)\leq\sum_{n=m}^{\infty}P(A_n),\quad\forall m\in\mathbb{N}$$

となるから,

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq m}A_n\right)=\lim_{m\to\infty}P\left(\bigcup_{n\geq m}A_n\right)\leq\lim_{m\to\infty}\sum_{n=m}^{\infty}P(A_n)=0.$$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$ とする. このとき明らかに $\sum_{n=m}^{\infty}P(A_n)=\infty(\forall m)$ である.

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n\geq m}A_n\right)&=1-P\left(\bigcap_{n\geq m}(\Omega/A_n)\right)=1-\prod_{n\geq m}(1-P(A_n))\quad(\because \text{独立性})\\
&\geq 1-\exp\left[-\sum_{n\geq m}P(A_n)\right]=1\quad(\because 1-x\leq e^{-x}).
\end{aligned}
$$

したがって測度の単調性より主張を得る. □

定理 3.3 (大数の強法則 (I)) $X_1,X_2,\ldots$ は $i.i.d.$ 確率変数列とする. X_i は 4 乗可積分, すなわち X_i^4 が可積分であると仮定する. このとき

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\to\mathbb{E}[X_1]\quad a.s.$$

証明 $Y_i = X_i - \mathbb{E}[X_1]$ は i.i.d. で期待値は 0 である.

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]$$

であるから, $(Y_1 + \cdots + Y_n)/n \to 0$ $a.s.$ となることが示せれば主張を得る. よって $\mathbb{E}[X_i] = 0$ と仮定してよい. 独立性と $\mathbb{E}[X_i] = 0$ より, $i \neq j, k$ ならば $\mathbb{E}[X_i X_j X_k^2] = \mathbb{E}[X_i X_j^3] = 0$ となるので,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_1 + \cdots + X_n)^4] &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_j^4] + \binom{4}{2} \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i^2 X_j^2] \\
&= n\mathbb{E}[X_1^4] + 3n(n-1)(\mathbb{E}[X_1^2])^2 \\
&\leq (n + 3n^2)\mathbb{E}[X_1^4] \leq 4n^2 \mathbb{E}[X_1^4].
\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
P(|(X_1 + \cdots + X_n)/n| \geq \delta) &\leq P(|X_1 + \cdots + X_n| \geq n\delta) \\
&\leq (n\delta)^{-4} \mathbb{E}[(X_1 + \cdots + X_n)^4] \leq 4\delta^{-4} \mathbb{E}[X_1^4] n^{-2}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|(X_1 + \cdots + X_n)/n| \geq \delta) < \infty.$$

Borel-Cantelli の補題より,

$$P\left(\bigcup_{m-1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} \{|(X1 + \cdots + X_n)/n| < \delta\} \right) = 1.$$

すなわち, ほとんど全ての $\omega \in \Omega$ に対し, $n(\omega) \in \mathbb{N}$ がとれて, $n \geq n(\omega)$ ならば $|(X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega))/n| < \delta$ となる. したがって

$$P(\limsup_{n \to \infty} |(X_1 + \cdots + X_n)/n| \leq \delta) = 1, \quad \forall \delta > 0.$$

$\delta \searrow 0$ とすれば,

$$P\left(\limsup_{n \to \infty} |(X_1 + \cdots + X_n)/n| = 0 \right) = 1.$$

すなわち $(X_1 + \cdots + X_n)/n \to 0$ $a.s.$ $\square$

3.3 独立確率変数の和

補題 3.2 $X_1, X_2, \ldots$ を独立な確率変数列とし, S_k, T_n を次で定義する.

$$S_k = X_1 + \cdots + X_k, \quad T_n = \sup_{1 \leq k \leq n} |S_k|.$$

(i) (Kolmogorov の不等式) 各 X_i は *2* 乗可積分, すなわち X_i^2 が可積分で, $\mathbb{E}[X_i] = 0$ を満たすと仮定する. $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$ とおく. このとき

$$P(T_n \geq \ell) \leq \sigma_n^2/\ell^2, \quad \forall \ell > 0.$$

(ii) (Levy の不等式) $\ell > 0, \delta \in (0,1)$ とする. もし

$$P(|X_i + X_{i+1} + \cdots + X_n| \geq \ell/2) \leq \delta, \quad 1 \leq \forall i \leq n,$$

が成り立てば,

$$P(T_n \geq \ell) \leq \delta/(1-\delta).$$

証明

$$E_k = \{|S_1| < \ell, \ldots, |S_{k-1}| < \ell, |S_k| \geq \ell\}$$

とおく. $E_i \cap E_j = \emptyset$ であり, $\{T_n \geq \ell\} = \bigcup_{k=1}^n E_k$ となる.

(i) $S_k 1_{E_k}$ は $X_1, \ldots, X_k$ から定まるので, $S_n - S_k = X_{k+1} + \cdots + X_n$ とは独立になる. $\mathbb{E}[S_n - S_k] = 0$ なので,

$$\begin{aligned} P(E_k) &\leq \frac{1}{\ell^2}\mathbb{E}[S_k^2 1_{E_k}] \leq \frac{1}{\ell^2}\mathbb{E}[\{S_k^2 + (S_n - S_k)^2\}1_{E_k}] \\ &= \frac{1}{\ell^2}\mathbb{E}[\{S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2\}1_{E_k}] = \frac{1}{\ell^2}\mathbb{E}[S_n^2 1_{E_k}]. \end{aligned}$$

k について和をとれば,

$$P(T_n \geq \ell) \leq \frac{1}{\ell^2}\mathbb{E}[S_n^2 1_{\{T_n \leq \ell\}}] \leq \frac{\sigma_n^2}{\ell^2}.$$

(ii) 仮定より,

$$P(\{T_n \geq \ell\} \cap \{|S_n| > \ell/2\}) \leq P(|S_n| > \ell/2) \leq \delta.$$

また E_k と $S_n - S_k$ の独立性より,

$$\begin{aligned} P(\{T_n \geq \ell\} \cap \{|S_n| \leq \ell/2\}) &= \sum_{k=1}^n P(E_k \cap \{|S_n| \leq \ell/2\}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n P(E_k \cap \{|S_n - S_k| \geq \ell/2\}) = \sum_{k=1}^n P(E_k)P(|S_n - S_k| \geq \ell/2) \\ &\leq \delta \sum_{k=1}^n P(E_k) = \delta P(T_n \geq \ell). \end{aligned}$$

上とあわせて

$$P(T_n \geq \ell) \leq \delta P(T_n \geq \ell) + \delta$$

となり, これより望む不等式を得る. □

定理 3.4 (Levy の定理) $X_1, X_2, \ldots$ を独立確率変数列とし, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とする. 次の条件 (i), (ii), (iii) は同値である.

(i) S_n は弱収束する. (ii) S_n は確率収束する. (iii) S_n は概収束する.

証明 (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) は既知である. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) を示す.
(i) $\Rightarrow$ (ii) : $\delta > 0$ とする. $m(N) < n(N) < m(N+1) < n(N+1) < \cdots \nearrow \infty$ を

$$\limsup_{n,m\to\infty} P(|S_n - S_m| \geq \delta) = \lim_{N\to\infty} P(|S_{n(N)} - S_{m(N)}| \geq \delta)$$

となるように選ぶ. $\varphi_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t)$ となる (定理 3.1) から, P^{S_n} の弱収束極限を μ とすれば, 定理 2.4 より, $\varphi_{S_n}(t) \to \varphi_\mu(t)$ である. $\varphi_\mu(0) = 1$ より, $r > 0$ が存在し, $|t| \leq r$ ならば $\varphi_\mu(t) \neq 0$ となる. したがって

$$\varphi_{S_{n(N)} - S_{m(N)}}(t) = \frac{\varphi_{S_{n(N)}}(t)}{\varphi_{S_{m(N)}}(t)} \to 1 \quad (N \to \infty), \quad \forall |t| \leq r$$

となる.

$$|e^{\sqrt{-1}\theta} - 1|^2 = (\cos\theta - 1)^2 + (\sin\theta)^2 = 2(1 - \cos\theta)$$

に注意すれば

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_{S_{n(N)}-S_{m(N)}}(t)-\varphi_{S_{n(N)}-S_{m(N)}}(s)| \\
&\quad \le \mathbb{E}[|e^{\sqrt{-1}(t-s)(S_{n(N)}-S_{m(N)})}-1|] \le (\mathbb{E}[|e^{\sqrt{-1}(t-s)(S_{n(N)}-S_{m(N)})}-1|^2])^{1/2} \\
&\quad = (2\mathbb{E}[(1-\cos[(t-s)(S_{n(N)}-S_{m(N)})])])^{1/2} \le (2|1-\varphi_{S_{n(N)}-S_{m(N)}}(t-s)|)^{1/2}
\end{aligned}
$$

である．上とあわせて

$$\varphi_{S_{n(N)}-S_{m(N)}}(t) \to 1 \quad (N\to\infty), \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

δ_0 を原点に集中した Dirac 測度とすれば, $\varphi_{\delta_0}(t)\equiv 1$ であるから, $P^{S_{n(N)}-S_{m(N)}}$ は δ_0 に弱収束する．(定理 2.4)．集合 $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,\infty)$ は δ_0 のもと境界が測度零の集合となっているから, 再び 定理 2.4 より

$$\lim_{N\to\infty} P(|S_{n(N)}-S_{m(N)}|\ge\delta)=0$$

である．これより

$$\lim_{n,m\to\infty} P(|S_n-S_m|\ge\delta)=0 \qquad (*)$$

となり, S_n が確率収束するといえる．

<u>(ii) ⇒ (iii) :</u> S_n が確率収束するので, 上の (*) が成立する．これより, 自然数列 $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ を $N_k<N_{k+1}\nearrow\infty$,

$$\sup_{m,n\ge N_k} P(|S_n-S_m|\ge 2^{-k-1})\le 2^{-k-1}$$

となるように選ぶことができる．とくに

$$\sup_{N_k<m\le N_{k+1}} P(|S_m-S_{N_k}|\ge 2^{-k-1})\le 2^{-k-1}.$$

Levy の不等式より,

$$P\left(\sup_{N_k<m\le N_{k+1}}|S_m-S_{N_k}|\ge 2^{-k}\right)\le\frac{2^{-k-1}}{1-2^{-k-1}}\le 2^{-k}, \quad k=1,2,\dots \tag{3.2}$$

となる．Borel-Cantelli の補題より,

$$P\left(\bigcup_{j=1}^\infty\bigcap_{k\ge j}\left\{\sup_{N_k<m\le N_{k+1}}|S_m-S_{N_k}|<2^{-k}\right\}\right)=1.$$

これより

$$S_n-S_m=(S_n-S_{N_k})-(S_m-S_{N_\ell})+\sum_{p=\ell}^{k-1}(S_{N_{p+1}}-S_{N_p}), \quad n>m, N_k<n\le N_{k+1}, N_\ell<m\le N_{\ell+1},$$

と表せば, S_n は概収束するといえる．□

定理 3.5 $X_1,X_2,\dots$ は独立確率変数列とし, $S_n=X_1+\cdots+X_n$ とおく．

(i) (Kolmogorov の 1 級数定理) X_i は 2 乗可積分で, $\mathbb{E}[X_i]=0$, かつ $\sum_{n=1}^\infty Var(X_n)$ が収束すれば, S_n は概収束する．

(ii) (Kolmogorov の 2 級数定理) X_i は 2 乗可積分で, $\sum_{n=1}^\infty\mathbb{E}[X_n]$ かつ $\sum_{n=1}^\infty Var(X_n)$ が収束すれば, S_n は概収束する．

(iii) (Kolmogorov の 3 級数定理) S_n は概収束するためには, 次を満たす $C>0$ が存在することが必要かつ十分である．

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > C)$ が収束する.

(b) $Y_n = X_n 1_{[-C,C]}(X_n)$ とおけば $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_n]$ が収束する.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} Var(Y_n)$ が収束する.

証明 **(i)** Kolmogorov の不等式より, 任意の $\delta > 0$ に対し,

$$P\left(\sup_{m<k\le n} |S_k - S_m| \ge \delta\right) \le \delta^{-2} \sum_{k=m+1}^{n} Var(X_k).$$

これより

$$\limsup_{m,n\to\infty} P\left(\sup_{m<k\le n} |S_k - S_m| \ge \delta\right) = 0.$$

これより, 自然数列 $\{N_k\}$ を $N_k < N_{k+1} \nearrow \infty$,

$$P\left(\sup_{N_k<m\le N_{k+1}} |S_m - S_{N_k}| \ge 2^{-k}\right) \le 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

となるように選べる. すなわち, (3.2) を得る. 以下は定理 3.4 の証明と同様である.

(ii) $Y_n = X_n - \mathbb{E}[X_n]$ とし, (i) を適用すれば $Y_1 + \cdots + Y_n$ が概収束する. したがって $X_n + \cdots + X_n = (Y_1 + \cdots + Y_n) + (\mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n])$ もまた概収束する.

(iii)（十分性） 仮定 (b),(c) と (ii) より, $Y_1 + \cdots + Y_n$ は概収束する. 仮定 (a) より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \ne Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > C) < \infty.$$

Borel-Cantelli の補題により,

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n\ge m} \{X_n = Y_n\}\right) = 1.$$

すなわち, ほとんどすべての ω に対し, $n(\omega) \in \mathbb{N}$ がとれて $X_n(\omega) = Y_n(\omega)(\forall n \ge n(\omega))$ となる. よって S_n も概収束する.

(iii)(必要性) $C = 1$ として (a), (b), (c) を示す. S_n が概収束するから, X_n は 0 に収束する. したがって

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n\ge m} \{|X_n| > 1\}\right) = 0 \qquad (\#)$$

となる. $\{|X_n| > 1\}, n = 1, 2, \ldots,$ は独立であるから Borel-Cantelli の補題 (ii) から (a) を得る. (#) より

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n\ge m} \{X_n = Y_n\}\right) = 1.$$

したがって $\tilde{S_n} = Y_1 + \cdots + Y_n$ もまた概収束する. (c) が示されれば, $Var(Y_n) = Var(Y_n - \mathbb{E}[Y_n])$ なので, $Y_n - \mathbb{E}[Y_n]$ に (i) を適用して $\sum_n (Y_n - \mathbb{E}[Y_n])$ の概収束がいえる. $\sum_n Y_n$ の概収束と合わせて, (b) が従う. したがってあとは (c) を示せばよい.

Y_i' を Y_i の独立なコピーとする（正確には直積確率空間を用意する）. $Y_1' + \cdots + Y_n'$ も概収束し, 従って $Z_n = Y_n - Y_n'$ とおけば, $Z_1 + \cdots + Z_n$ も概収束する. Y_n, Y_n' が独立であるから, $Var(Z_n) = Var(Y_n) + Var(Y_n') = 2Var(Y_n)$ である. したがって $\sum_{n=1}^{\infty} Var(Z_n) < \infty$ を示せばよい.

$$F_n = \{\omega | |Z_1(\omega) + \cdots + Z_j(\omega)| \le \ell, j = 1, 2, \ldots, n\}$$

とおく．$Z_1+\cdots+Z_n$ が収束するから，$\ell>0,\delta>0$ が存在し，$P(F_n)\geq\delta(\forall n)$ となる．Z_n の独立性と $\mathbb{E}[Z_n]=0$ により，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Z_1+\cdots+Z_n)^2;F_{n-1}] &= \mathbb{E}[(Z_1+\cdots+Z_{n-1})^2;F_{n-1}]+\mathbb{E}[Z_n^2;F_{n-1}]\\
&= \mathbb{E}[(Z_1+\cdots+Z_{n-1})^2;F_{n-1}]+Var(Z_n)P(F_{n-1})\\
&\geq \mathbb{E}[(Z_1+\cdots+Z_{n-1})^2;F_{n-1}]+\delta Var(Z_n)
\end{aligned}$$

$F_n\subset F_{n-1}$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Z_1+\cdots+Z_n)^2;F_{n-1}] &= \mathbb{E}[(Z_1+\cdots+Z_n)^2;F_n]+\mathbb{E}[(Z_1+\cdots+Z_n)^2;F_{n-1}/F_n]\\
&\leq \mathbb{E}[(Z_1+\cdots+Z_n)^2;F_n]+(\ell+2)^2P(F_{n-1}/F_n).
\end{aligned}$$

これより

$$\delta Var(Z_n)\leq\mathbb{E}[(Z_1+\cdots+Z_n)^2;F_n]-\mathbb{E}[(Z_1+\cdots+Z_{n-1})^2;F_{n-1}]+(\ell+2)^2P(F_{n-1}/F_n).$$

F_{n-1}/F_n は互いに素となるから，n について和をとれば

$$\delta\sum_{n=1}^{m}Var(Z_n)\leq\mathbb{E}[(Z_1+\cdots+Z_m)^2;F_m]+(\ell+2)^2\leq\ell^2+(\ell+2)^2.$$

$m\to\infty$ として $\sum_n Var(Z_n)<\infty$ を得る．□

定理 3.6 (大数の強法則 (II)) $X_1,X_2,\ldots$ を *i.i.d.* 確率変数列とする．X_1 は可積分であるとし，$\mathbb{E}[X_i]=0$ と仮定する．このとき $(X_1+\cdots+X_n)/n$ は 0 に概収束する．

証明　$Y_n=X_n1_{[-n,n]}(X_n)$ とおき，

$$a_n=P(X_n\neq Y_n),\quad b_n=\mathbb{E}[Y_n],\quad c_n=Var(Y_n)$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>n)=\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}1_{\{|X_1|>n\}}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n1_{\{n<|X_1|\leq n+1\}}\right]\leq\mathbb{E}[|X_1|]<\infty,\\
&\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_11_{\{|X_1|\leq n\}}]\to\mathbb{E}[X_1]=0,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\frac{X_1^2}{n^2}1_{\{|X_1|\leq n\}}\right]=\mathbb{E}\left[X_1^2\sum_{n\geq|X_1|}\frac{1}{n^2}\right]\leq C\mathbb{E}[\max\{|X_1|,2\}]<\infty.
\end{aligned}$$

ただし C は定数．また $x\geq 2$ ならば，$\sum_{n\geq x}n^{-2}\leq(x-1)^{-1}\leq 2/x$ を用いた．

$\mathbb{E}[(Y_n-b_n)/n]=0, Var((Y_n-b_n)/n)=c_n/n^2$ であるから，2 級数定理より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(Y_n-b_n)/n$ が収束するといえる．$\sum_n a_n$ が収束するから，Borel-Cantelli の補題より，ほとんどすべての ω に対し n が十分大きければ $X_n(\omega)=Y_n(\omega)$ となる．よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(X_n-b_n)/n$ が収束する．

一般に $\sum_n(\alpha_n/n)$ が収束すれば $(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)/n$ は 0 に収束する．

$(\because)$　$\beta_n=\alpha_n/n$, $\gamma_n=\beta_1+\cdots+\beta_n$ とする．仮定より $\gamma_n\to\exists\gamma$.

$$\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\beta_k=\gamma_n-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n}\beta_k=\gamma_n-\frac{\gamma_1+\cdots+\gamma_{n-1}}{n}\to\gamma-\gamma=0.///$$

よって $\{(X_1-b_1)+\cdots+(X_n-b_n)\}/n$ は 0 に概収束する．$b_n\to 0$ より，$(b_1+\cdots+b_n)/n\to 0$ である．よって $(X_1+\cdots+X_n)/n$ は 0 に概収束する．□

3.4 中心極限定理

定理 3.7 (中心極限定理)　$X_1, X_2, \dots$ を *i.i.d.* 確率変数列とする．X_n は *2* 乗可積分であり，$\mathbb{E}[X_n] = 0, \sigma^2 = Var(X_n) > 0$ を仮定する．$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とおき，$X \sim N(0, \sigma^2)$ とする．このとき $P^{S_n/\sqrt{n}}$ は P^X に弱収束する．

証明　X_n は i.i.d. であるから

$$\varphi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \{\varphi_{X_1}(t/\sqrt{n})\}^n$$

となる．Taylor の公式

$$e^{\sqrt{-1}tx} = 1 + \sqrt{-1}tx - \frac{t^2x^2}{2} - x^2\int_0^t\int_0^s (e^{\sqrt{-1}ux} - 1)dsdu$$

より，

$$R(t) = -\int_0^t\int_0^s \mathbb{E}[X_1^2(e^{\sqrt{-1}uX_1} - 1)]dsdu$$

とおけば

$$\varphi_{X_1}(t/\sqrt{n}) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2n} + R(t/\sqrt{n}) \tag{3.3}$$

となる. 変数変換 $(\sqrt{n}u, \sqrt{n}s) \mapsto (u, s)$ と Lebesgue の優収束定理より

$$n|R(t/\sqrt{n})| \leq \int_0^t\int_0^s \mathbb{E}[X_1^2\left|e^{\sqrt{-1}uX_1/\sqrt{n}} - 1\right|]dsdu \to 0, \quad n \to \infty.$$

これと (3.3) より

$$\{\varphi_{X_1}(t/\sqrt{n})\}^n \to \exp[-\sigma^2t^2/2] = \varphi_X(t).$$

定理 2.4 (vii) より, $P^{S_n/\sqrt{n}}$ は P^X に弱収束する．□

定理 3.8 (Lindeberg の定理)　$X_1, X_2, \dots$ を *2* 乗可積分で $\mathbb{E}[X_n] = 0$ なる独立確率変数列とする．$s_n > 0$ を $s_n^2 = \sum_{j=1}^n Var(X_j)$ とおき，$s_n^2 \to \infty$ と，次の *Lindeberg* の条件を仮定する．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X_j^2; |X_j| \geq \varepsilon s_n] = 0 \quad \forall\varepsilon > 0.$$

このとき P^{S_n/s_n} は P^X に弱収束する．ただし $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ であり，X は 標準正規分布に従う確率変数である．

証明　$X_{n,j} = X_j/s_n$ とおく．

$$\varphi_{X_{n,j}}(t) = \varphi_{X_j}(t/s_n)$$

である. $T > 0$ を固定する. $\mathbb{E}[X_j] = 0$ であることに注意して, さらに

$$|e^{\sqrt{-1}x} - 1 - \sqrt{-1}x| = \left|\int_0^x\int_0^y e^{\sqrt{-1}u}dydu\right| \leq x^2/2$$

を用いると

$$\begin{aligned}
\sup_{|t|\leq T}|\varphi_{X_{n,j}}(t) - 1| &= \sup_{|t|\leq T}|\mathbb{E}[e^{\sqrt{-1}tX_j/s_n} - 1]| \\
&= \sup_{|t|\leq T}|\mathbb{E}[e^{\sqrt{-1}tX_j/s_n} - 1 - itX_j/s_n]| \leq (T^2/2)\mathbb{E}[(X_j/s_n)^2] \\
&\leq (T^2/2)\varepsilon^2 + (T^2/2)\mathbb{E}[(X_j/s_n)^2; |X_j| \geq \varepsilon s_n] \\
&\leq (T^2/2)\varepsilon^2 + \frac{T^2}{2s_n^2}\mathbb{E}[X_j^2; |X_j| \geq \varepsilon s_n]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

が導かれる. Lindeberg の条件より

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{1\le j\le n} \sup_{|t|\le T} |\varphi_{X_{n,j}}(t)-1| \le (T^2/2)\varepsilon^2$$

となり, $\varepsilon\to 0$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\le j\le n} \sup_{|t|\le T} |\varphi_{X_{n,j}}(t)-1| = 0 \tag{3.5}$$

が得られる. (3.4) と s_n^2 の定義より

$$\sup_{|t|\le T} \sum_{j=1}^{n} |\varphi_{X_{n,j}}(t)-1| \le (T^2/2) \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_j^2/s_n^2] = T^2/2, \quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.6}$$

(3.5) より n が十分大きいときに $|\varphi_{X_{n,j}}(t)-1| < 1/2$ としてよい. $D=\{z\in\mathbb{C}||z|<1/2\}$ 上 $\log(1+z)$ は正則関数となり, $|\log(1+z)-z| \le C|z|^2 (\forall z\in D)$ を満たす定数 C が存在する. とくに (3.5), (3.6) より

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{n}\left\{\log(1+(\varphi_{X_{n,j}}(t)-1))-(\varphi_{X_{n,j}}(t)-1)\right\}\right| \\
&\le C\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{X_{n,j}}(t)-1|^2 \\
&\le C\left\{\sup_{1\le j\le n}\sup_{|t|\le T}|\varphi_{X_{n,j}}(t)-1|\right\}\sup_{|t|\le T}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{X_{n,j}}(t)-1| \\
&\le C(T^2/2)\sup_{1\le j\le n}\sup_{|t|\le T}|\varphi_{X_{n,j}}(t)-1| \to 0, \quad n\to\infty
\end{aligned}$$

となる. X_j の独立性より,

$$\varphi_{S_n/s_n}(t) = \prod_{j=1}^{n}\varphi_{X_{n,j}}(t) = \prod_{j=1}^{n}(1+(\varphi_{X_{n,j}}(t)-1))$$

と表すことができるので,

$$\begin{aligned}
&\varphi_{S_n/s_n}(t)\exp\left[-\sum_{j=1}^{n}(\varphi_{X_{n,j}}(t)-1)\right] \\
&= \prod_{j=1}^{n}\exp\left[\log(1+(\varphi_{X_{n,j}}(t)-1))-(\varphi_{X_{n,j}}(t)-1)\right] \to 1, \qquad n\to\infty.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$\sigma_j^2 = Var(X_j)$ とする.

$$|e^{\sqrt{-1}x}-1-\sqrt{-1}x+(x^2/2)| \le \min\{x^2, |x|^3/6\}$$

となることに注意すれば

$$
\begin{aligned}
&\sup_{|t|\le T}\left|\left(\sum_{j=1}^{n}(\varphi_{X_{n,j}}(t)-1)\right)+\frac{t^2}{2}\right| \\
&\le \sup_{|t|\le T}\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_{X_{n,j}}(t)-1+\frac{t^2\sigma_j^2}{2s_n^2}\right| \\
&\le \sup_{|t|\le T}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|e^{\sqrt{-1}tX_j/s_n}-1-\sqrt{-1}(tX_j/s_n)+\frac{t^2X_j^2}{2s_n^2}\right|\right] \\
&\le \sup_{|t|\le T}\sum_{j=1}^{n}\left\{\mathbb{E}[|tX_j/s_n|^3/6;|X_j|<\varepsilon s_n]+\mathbb{E}[|tX_j/s_n|^2;|X_j|\ge\varepsilon s_n]\right\} \\
&\le T^3\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathbb{E}[X_j^2]}{s_n^2}+T^2\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[X_j^2;|X_j|\ge\varepsilon s_n] \\
&= T^3\varepsilon+T^2\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[X_j^2;|X_j|\ge\varepsilon s_n]
\end{aligned}
$$

Lindeberg の条件より $n\to\infty$ とし, さらに $\varepsilon\to 0$ とすれば,

$$
\lim_{n\to\infty}\sup_{|t|\le T}\left|\left(\sum_{j=1}^{n}(\varphi_{X_{n,j}}(t)-1)\right)+\frac{t^2}{2}\right|=0.
$$

これを (3.7) と合わせれば,

$$
\varphi_{S_n/s_n}(t)\to e^{-t^2/2}
$$

となり, 結論を得る. □

4　条件付き期待値

4.1　条件付き期待値

定理 4.1 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を σ 加法族, X を可積分な確率変数とする．このとき $\mathcal{G}$ 可測かつ可積分な確率変数 Y_X が存在し,

$$\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[Y_X Z] \tag{4.1}$$

が任意の有界な $\mathcal{G}$ 可測な確率変数 Z に対して成立する．さらに $\widetilde{Y}_X$ も同じ性質を満たせば, $Y_X = \widetilde{Y}_X$ *a.s.* となる．

証明　<u>**一意性**</u>: $Y_X, \widetilde{Y}_X$ に対し, (4.1) が成り立つので

$$\mathbb{E}[(Y_X - \widetilde{Y}_X)Z] = 0$$

となる． $Z = 1_{\{Y_X \geq \widetilde{Y}_X\}}$ とおけば, $(Y_X - \widetilde{Y}_X)Z \geq 0$ であるから, 期待値の正値性より, 上式とあわせて, $(Y_X - \widetilde{Y}_X)Z = 0$ a.s. となる．すなわち, $Y_X \leq \widetilde{Y}_X$ a.s. 同様に逆の不等号もいえ, $Y_X = \widetilde{Y}_X$ a.s. となる．
<u>**存在**</u>:

(第一段階) X は有界とする．次のような 2 乗可積分な $\mathcal{G}$ 可測確率変数 Y_X が存在し, それは (4.1) を満たす．

$$\mathbb{E}[(X - Y_X)^2] = \inf\left\{\mathbb{E}[(X-Y)^2] : Y \text{ は } \mathcal{G} \text{ 可測で 2 乗可積分}\right\} \tag{4.2}$$

$(\because)$　$\mathcal{G}$ 可測 2 乗可積分確率変数 Y_n を

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X - Y_n)^2] = \inf\left\{\mathbb{E}[(X-Y)^2] : Y \text{ は } \mathcal{G} \text{ 可測で 2 乗可積分}\right\} =: c^2$$

ととる．Minkowski の不等式より,

$$\begin{aligned} c &\leq (\mathbb{E}[\{X - (Y_n + Y_m)/2\}^2])^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}(\mathbb{E}[\{X - Y_n\}^2])^{1/2} + \frac{1}{2}(\mathbb{E}[\{X - Y_m\}^2])^{1/2} \to c \quad (n, m \to \infty). \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} &\lim_{n,m\to\infty} \mathbb{E}[(X - Y_n)(X - Y_m)] \\ &= 2 \lim_{n,m\to\infty} \left\{\mathbb{E}[\{(X - (Y_n + Y_m)/2\}^2] - \frac{1}{4}\mathbb{E}[(X - Y_n)^2] - \frac{1}{4}\mathbb{E}[(X - Y_m)^2]\right\} \\ &= 2\{c^2 - (c^2/4) - (c^2/4)\} = c^2. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &\lim_{n,m\to\infty} \mathbb{E}[(Y_n - Y_m)^2] \\ &= \lim_{n,m\to\infty} \left\{\mathbb{E}[(X - Y_n)^2] + \mathbb{E}[(X - Y_m)^2] - 2\mathbb{E}[(X - Y_n)(X - Y_m)]\right\} \\ &= c^2 + c^2 - 2c^2 = 0. \end{aligned}$$

増大自然数列 $\{n_k\}$ を

$$\mathbb{E}[(Y_{n_k} - Y_{n_{k+1}})^2] \leq 2^{-3k}, k = 1, 2, \ldots$$

なるように選び, $Y_X = \liminf_{k\to\infty} Y_{n_k}$ とおけば, Y_X は $\mathcal{G}$ 可測な 2 乗可積分確率変数であり, さらに $\mathbb{E}[(Y_{n_k} - Y_X)^2] \to 0$ となる．よって Y_X は (4.2) を満たす． Z を有界な $\mathcal{G}$ 可測確率変数とする．このとき

$$0 \leq \mathbb{E}[(X - Y_X + aZ)^2] - c^2 = 2a\mathbb{E}[(X - Y_X)Z] + a^2\mathbb{E}[Z^2], \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

したがって判別式より $\mathbb{E}[(X - Y_X)Z] = 0$.　すなわち (4.1) が成り立つことが導かれた． ///

(第 2 段階) X, X' は有界な確率変数で $X \leq X'$ とする．このとき $Y_X \leq Y_{X'}$ a.s.

($\because$)　$Z = 1_{\{Y_X > Y_{X'}\}}$ とする．このとき (4.1) より

$$0 \leq \mathbb{E}[(X' - X)Z] = \mathbb{E}[(Y_{X'} - Y_X)Z].$$

よって $(Y_{X'} - Y_X)Z = 0$ a.s. すなわち $Z = 0$ a.s. つまり $Y_X \leq Y_{X'}$ a.s. が成り立つことが分かった．///

(第 3 段階) X 　は可積分確率変数で, $X \geq 0$ とする．このとき (4.1) を満たす $\mathcal{G}$ 可測な確率変数 Y_X が存在する．

($\because$)　$X_n = \min\{X, n\}$ とおく．(第 2 段階) より, $Y_{X_n} \leq Y_{X_{n+1}}$ a.s. が成り立つことが分かる,. $Y_X = \limsup_{n\to\infty} Y_{X_n}$ とおけば, 単調収束定理より, 任意の非負有界 $\mathcal{G}$ 可測確率変数 Z に対し,

$$\mathbb{E}[XZ] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n Z] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_{X_n} Z] = \mathbb{E}[Y_X Z].$$

したがって (4.1) が成り立つ．///

(第 4 段階) 一般の X については $Y_X = Y_{X^+} - Y_{X^-}$ とおけばよい．□

定義 4.1 定理 *4.1* の Y_X を $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ と表し, $\mathcal{G}$ で条件付けられた X の**条件付き期待値**という．$A \in \mathcal{F}$ のとき $\mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}](\omega)$ を $P(\omega, A)$ と表し, A の**条件付き確率**という．

演習 4.1 　$A \in \mathcal{F}$ とし, $\mathcal{G} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ とおく．$\mathcal{G}$ 可測な確率変数は, 適当な $a, b \in \mathbb{R}$ を用いて $a1_A + b1_{A^c}$ と表されることを示せ．

演習 4.2 　$A \in \mathcal{F}$ は $0 < P(A) < 1$ を満たすと仮定する．$\mathcal{G} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ とおく．$B \in \mathcal{F}$ に対し,

$$P(\omega, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} 1_A(\omega) + \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} 1_{A^c}(\omega)$$

となることを示せ．

定理 4.2 X, Y を可積分な確率変数とする．$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を σ 加法族とする．

(i) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.

(ii) もし X が $\mathcal{G}$ 可測ならば, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ a.s. とくに $\mathbb{E}[1|\mathcal{G}] = 1$ a.s.

(iii) $X \geq Y$ a.s. ならば, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ a.s. とくに

$$|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X||\mathcal{G}], \quad \text{a.s.}$$

(iv) $a, b \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

(v) Z が有界な $\mathcal{G}$ 可測確率変数ならば $\mathbb{E}[ZX|\mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ a.s.

(vi) $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ が σ 加法族ならば,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] \quad \text{a.s.}$$

(vii) X と $\mathcal{G}$ が独立なとき, すなわち任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ と $B \in \mathcal{G}$ に対し, $X^{-1}(A)$ と B が独立になるとき,

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X] \quad \text{a.s.}$$

証明 (i) は (4.1) より従う. (ii) は $\mathbb{E}[|\mathcal{G}]$ の一意性より従う. (iii) は 定理 4.1 の (存在)(第 2 段階) と同様. (iv),(v),(vi) は (4.1) と $\mathbb{E}[|\mathcal{G}]$ の一意性より従う. たとえば Z を $\mathcal{G}$ 可測な有界確率変数とすれば,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[aX+bY|\mathcal{G}]Z] &= \mathbb{E}[(aX+bY)Z] = a\mathbb{E}[XZ]+b\mathbb{E}[YZ]\\ &= a\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]Z]+b\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]Z] = \mathbb{E}[(a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]+b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}])Z]\end{aligned}$$

と変形し一意性を用いる.

(vii) Z を $\mathcal{G}$ 可測な有界確率変数とすれば, X と Z は独立である. したがって

$$\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]Z].$$

これより, 一意性により主張を得る. □

演習 4.3 上の定理の (i) から (vi) を証明せよ.

4.2 マルチンゲール

定義 4.2 **(i)** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}, n = 0, 1, 2, \ldots,$ が σ 加法族で $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ を満たすとき, $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ を **フィルトレーション**という. 四つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_n\})$ をフィルターつき確率空間 (Filtered probability space) と呼ぶ.

(ii) 確率変数列 $X_0, X_1, X_2, \ldots$ を $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$(または $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n\geq 0}$) と表し, **確率過程**と呼ぶ.

(iii) すべての $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して X_n が $\mathcal{F}_n$-可測であるとき, 確率過程 $\mathbf{X}$ は $\{\mathcal{F}_n\}$ に適合しているという.

例 3.1 確率過程 $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ は次のように自然にフィルトレーションを定める.

$$\mathcal{F}_n^{\mathbf{X}} = \sigma[\{X_j^{-1}(A)|1 \leq j \leq n, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}]$$

とおく. このとき $\{\mathcal{F}_n^{\mathbf{X}}\}_{n=0}$ はフィルトレーションである.

定義 4.3 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_n\})$ をフィルター付確率空間とする. 確率過程 $\mathbf{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$ **マルチンゲール**であるとは, 次の条件が成り立つことをいう.

(i) M_n は可積分かつ $\mathcal{F}_n$ 可測である.

(ii) $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$ a.s. $n = 0, 1, 2, \ldots$

条件 (ii) の等号を不等号 $\leq$ で置き換えたものが成り立つとき, $\mathbf{M}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$ **優マルチンゲール**という. また不等号 $\geq$ で置き換えたものが成り立つとき, $\mathbf{M}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$ **劣マルチンゲール**という. フィルトレーション $\{\mathcal{F}_n\}$ が明らかなときは $\{\mathcal{F}_n\}$ を略して単に (優, 劣) マルチンゲールともいう.

マルチンゲールは, 時刻 n における状態がどのようなものであっても増分 $M_{n+1} - M_n$ の条件付き平均が 0 であるので, 公平な賭けのモデル表す確率過程であることがわかる. また, 優マルチンゲールは, 増分が非正になることから不利な賭けのモデルを表し, 劣マルチンゲールは, 増分が非負であるこから有利な賭けのモデルを表していることになる. 優と劣が賭けの有利と不利とが合わないのは, これらの言葉がモデルからではなく, 優調和関数, 劣調和関数と関連して定められているからである.

定理 4.3 **(i)** M_n が可積分かつ $\mathcal{F}_n$ 可測であるとする. $\mathbf{M}=\{M_n\}_{n\geq 0}$ がマルチンゲールとなるための必要十分条件は

$$\mathbb{E}[M_m|\mathcal{F}_n]=M_n \quad \text{a.s.} \quad \forall m>n.$$

優マルチンゲールとなるための必要十分条件は上の等号を不等号 $\leq$ で置き換えたものであり, 劣マルチンゲールとなるための必要十分条件は上の等号を不等号 $\geq$ で置き換えたものである.

(ii) $\mathbf{M}=\{M_n\}_{n\geq 0}$ がマルチンゲールならば $\{|M_n|\}_{n\geq 0}$ は劣マルチンゲールである.

(iii) $\mathbf{M}=\{M_n\}_{n\geq 0}$ が劣マルチンゲールで各 M_n が非負かつ p 乗可積分 $(p\geq 1)$ ならば, $\{M_n^p\}$ も劣マルチンゲールである.

(iv) $X_0,X_1,\ldots$ を可積分な独立確率変数列とする. $\mathbb{E}[X_n]=0(\forall n)$ と仮定する. $S_n=X_1+\cdots+X_n$ とすれば, $\mathbf{S}=\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\{\mathcal{F}_n^{\mathbf{S}}\}$ マルチンゲールである.

証明 (i) 十分性は明らか. 必要性は定理 4.2 (vi) より,

$$\mathbb{E}[M_m|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_m|\mathcal{F}_{m-1}]|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[M_{m-1}|\mathcal{F}_n]=\cdots=\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]=M_m.$$

他の必要十分性も同様に証明できる.

(ii) 定理 4.2 (iii) より,

$$\mathbb{E}[|M_{n+1}||\mathcal{F}_n]\geq|\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]|=|M_n|.$$

(iii) $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ を σ 加法族とし, $X\geq 0$ とすれば,

$$(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^p)\leq\mathbb{E}[X^p|\mathcal{G}].$$

$(\because)$ $X_n=\sum_{k=0}^{n2^n}k2^{-n}1_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})}(X)$ とおく. $\sum_{k=0}^{n2^n}1_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})}(X_n)=1$ より, これを用いれば

$$\sum_{k=0}^{n2^n}\mathbb{E}[1_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})}(X_n)|\mathcal{G}]=1.$$

x^p は凸関数なので,

$$(\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}])^p\leq\sum_{k=0}^{n2^n}(k2^{-n})^p\mathbb{E}[1_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})}(X_n)|\mathcal{G}]=\mathbb{E}[X_n^p|\mathcal{G}].$$

$n\to\infty$ とすれば, 単調収束定理より主張を得る. これを用いれば, $M_n\geq 0$ より

$$\mathbb{E}[M_{n+1}^p|\mathcal{F}_n]\geq(\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n])^p\geq M_n^p.$$

(iv) 定理 4.2 (ii),(iv),(vii) より,

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n^{\mathbf{S}}]=\mathbb{E}[S_n+X_{n+1}|\mathcal{F}_n^{\mathbf{S}}]=S_n+\mathbb{E}[X_{n+1}]=S_n. \qquad \square$$

定理 4.4 (Doob の不等式) $\mathbf{M}=\{M_n\}_{n\geq 0}$ を非負劣マルチンゲールとする. このとき, 任意の $N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し,

$$P\left(\max_{0\leq n\leq N}M_n\geq x\right)\leq\frac{1}{x}\mathbb{E}\left[M_N;\max_{0\leq n\leq N}M_n\geq x\right], \quad \forall x>0. \tag{4.3}$$

さらに, もし $p>1$ に対し M_n^p が可積分ならば, 次式が成り立つ.

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\leq n\leq N}M_n^p\right]\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbb{E}[M_N^p]. \tag{4.4}$$

証明　$E_n = \{M_j < x, j = 0, \dots, n-1, M_n \geq x\}$ とおく.

$$
\begin{aligned}
P\left(\max_{0\leq n\leq N} M_n \geq x\right) &= \sum_{n=0}^{N} P(E_n) \\
&\leq \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}[(M_n/x); E_n] \quad (\because \quad E_n\text{上 } M_n/x \geq 1) \\
&\leq (1/x) \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}[M_N; E_n] \quad (\because \quad E_n \in \mathcal{F}_n, M_n \leq \mathbb{E}[M_N|\mathcal{F}_n]) \\
&= (1/x)\mathbb{E}\left[M_N; \max_{0\leq n\leq N} M_n \geq x\right].
\end{aligned}
$$

定理 4.3 (iii) より $\{M_n^p\}$ もまた劣マルチンゲールである. (4.3) より

$$
P\left(\max_{0\leq n\leq N} M_n > x\right) = P\left(\max_{0\leq n\leq N} M_n^p > x^p\right) \leq x^{-p}\mathbb{E}\left[M_N^p; \max_{0\leq n\leq N} M_n^p > x^p\right].
$$

これより

$$
\lim_{x\to\infty} x^p P\left(\max_{0\leq n\leq N} M_n > x\right) = 0. \tag{4.5}
$$

$1 < q < p$ とする. 部分積分の公式より, 非負確率変数 X に対し

$$
\mathbb{E}[X^q] = \int_0^\infty x^q dF_X(x) = q\int_0^\infty x^{q-1}(1-F_X(x))dx - \Big[x^q(1-F_X(x))\Big]_0^\infty
$$

が成り立つことに注意すれば,

$$
\mathbb{E}\left[\max_{0\leq n\leq N} M_n^q\right] = q\int_0^\infty x^{q-1}P\left(\max_{0\leq n\leq N} M_n > x\right)dx < \infty \quad (\because (4.5))
$$

また不等式 (4.3) を用いて計算すると

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\max_{0\leq n\leq N} M_n^q\right] &\leq q\int_0^\infty x^{q-1}\frac{1}{x}\mathbb{E}\left[M_N; \max_{0\leq n\leq N} M_n \geq x\right]dx \quad (\because (4.3)) \\
&= q\mathbb{E}\left[M_N \int_0^{\max_{0\leq n\leq N} M_n} x^{q-2}dx\right] \quad (\because \text{Fubini の定理}) \\
&= \frac{q}{q-1}\mathbb{E}\left[M_N\left(\max_{0\leq n\leq N} M_n\right)^{q-1}\right] \\
&\leq \frac{q}{q-1}(\mathbb{E}[M_N^q])^{1/q}\left(\mathbb{E}\left[\left(\max_{0\leq n\leq N} M_n\right)^q\right]\right)^{(q-1)/q} \quad (\because \text{Höder の不等式}).
\end{aligned}
$$

となる. よって

$$
\mathbb{E}\left[\max_{0\leq n\leq N} M_n^q\right] \leq \left(\frac{q}{q-1}\right)^q \mathbb{E}[M_N^q].
$$

$q \nearrow p$ として主張を得る. □

演習 4.4　$X \geq 0$ は p 乗可積分 $(p > 1)$ とする.

$$
\lim_{q\nearrow p} \mathbb{E}[X^q] = \mathbb{E}[X^p]
$$

となることを示せ.

Hint: $\mathbb{E}[X^q; X < 1]$ に有界収束定理, $\mathbb{E}[X^q; X \geq 1]$ に単調収束定理を適用せよ.

4.3 Doob の任意抽出定理

定義 4.4 $\mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$ に値をもつ確率変数 σ が, 任意の $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して $\{\omega:\sigma(\omega)\leq n\}\in\mathcal{F}_n$ をみたすとき, σ は停止時刻（*stopping time*）であるという.

演習 4.5 (i) 上の条件は, 任意の $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して $\{\omega:\sigma(\omega)=n\}\in\mathcal{F}_n$ をみたすとなることと同値であることを示せ.
(ii) 確率過程 $\mathbf{X}=\{X_n\}_{n\geq 0}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$ に適合しているとき, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\sigma_B(\omega)=\min\{n\geq 0: X_n(\omega)\in B\}\qquad (\text{ただし } min\ \emptyset=\infty \text{ とする.})$$

とおく. σ_B を B への到達時刻（hitting time）という. σ_B は停止時刻となることを示せ.

以降, $\mathcal{F}_0$ は測度 0 の集合をすべて含むものと仮定する. σ が停止時刻のとき

$$\mathcal{F}_\sigma=\{A\in\mathcal{F}:\ \text{任意の } n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \text{ に対して } \{\sigma\leq n\}\cap A\in\mathcal{F}_n\ \}$$

と定義する.

演習 4.6 (i) $\mathcal{F}_\sigma$ が σ-加法族であることを示せ.
(ii) 停止時刻 σ,τ が $\sigma\leq\tau$ をみたすとき, $\mathcal{F}_\sigma\subset\mathcal{F}_\tau$ であることを示せ.

マルチンゲールを停止時刻で止めるとどうなるか？ 公平なゲームに対していつでも儲けた時点でゲームを止める作戦はあるか？その答えとなるのが次に定理である.

定理 4.5 (**Doob の任意抽出定理** (Doob's optional sampling theorem)) σ,τ を有界な停止時刻とし, 確率 1 で $\sigma\leq\tau$ をみたすものとする. $\mathbf{X}=\{X_n\}_{n\geq 0}$ がマルチンゲールであれば,

$$E[M_\tau|\mathcal{F}_\sigma]=X_\sigma,\quad a.s. \tag{4.6}$$

が成り立つ. $\mathbf{X}$ が優マルチンゲールのときは *(4.6)* において等号は $\geq$ に代わり, $\mathbf{X}$ が劣マルチンゲールのときは *(4.6)* において等号は $\leq$ に代わる.

この定理を証明するために, いくつかの準備をする.

定義 4.5 確率過程 $\mathbf{X}=\{X_n\}_{n\geq 0}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-可予測 *(predictable)* であるとは, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して X_n が $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測であることをいう.

補題 4.1 確率過程 $\mathbf{X}=\{X_n\}_{n\geq 0}$ がマルチンゲール, $\{p_n\}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-可予測であり, 各 n に対して $p_n\in L^\infty(\Omega,P)\equiv\{g:g \text{ は可測で } \mathrm{esssup}_{\omega\in\Omega}|\mathrm{g}(\omega)|<\infty\}$ であるとき,

$$Y_n=Y_0+\sum_{i=1}^n p_i(X_i-X_{i-1})\quad (\text{ここで } Y_0 \text{ は任意の } \mathcal{F}_0 \text{ 可測可積分関数}) \tag{4.7}$$

とおくと, $\{Y_n\}$ もマルチンゲールである. $\mathbf{X}$ が優マルチンゲール（劣マルチンゲール）のときは, 上の条件に加えて各 n について $p_n\geq 0$ という条件があれば $\{Y_n\}$ も優マルチンゲール（劣マルチンゲール）である.

証明 Y_n が $\mathcal{F}_n$-可測であり, 可積分であることは簡単にチェックできる. $Y_n-Y_{n-1}=p_n(X_n-X_{n-1})$ であるから, 任意の $A\in\mathcal{F}_{n-1}$ に対して

$$E[\mathbf{1}_A(Y_n-Y_{n-1})]=E[\mathbf{1}_A p_n(X_n-X_{n-1})]=0$$

となるので, $\{Y_n\}$ がマルチンゲールであることが示された. ただし 2 番目の等号で, $\mathbf{1}_A p_n$ が, $L^\infty(\Omega, P)$ に属する $\mathcal{F}_{n-1}$-可測関数であることと,
(#) 確率過程 $\mathbf{X}$ がマルチンゲールであることの必要十分条件は, 任意の $n \geq 0$ と $\mathcal{F}_n$-可測関数 $g \in L^\infty(\Omega, P)$ に対して $E[X_{n+1}g] = E[X_n g]$ が成り立つことである. ということを用いた. $\mathbf{X}$ が優マルチンゲール（劣マルチンゲール）の場合も同様に証明できる. □

Remark 上述の補題の式 (4.7), $Y_n = Y_0 + \sum_{i=1}^n p_i(X_i - X_{i-1})$ は離散版の確率積分である .

演習 4.7 (i) （#）を示せ.
(ii) 定理 4.5 の仮定の下, X_σ が $\mathcal{F}_\sigma$ 可測かつ可積分であることを示せ.

定理 4.5 の証明 演習 4.7 (ii) より X_σ の可測性, 可積分性は保証されている. いま $p_n(\omega) = \mathbf{1}_{\sigma < n \leq \tau}(\omega)$ とすると,

$$\{\sigma < n \leq \tau\} = \bigcup_{i=0}^{n-1}\{\sigma = i\} \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1}\{\tau = i\} \in \mathcal{F}_n$$

であるので, p_n は $\mathcal{F}_{n-1}$-可測である. $Y_0 = 0$, $Y_n = \sum_{i=1}^n p_i(X_i - X_{i-1})$ とおくと, 補題 4.1 より $\{Y_n\}$ はマルチンゲールであるから

$$E[Y_{N+1}] = E[Y_0] = 0 \quad (\text{ ここで } N \text{ は } \sigma, \tau \leq N \text{ となる自然数}) \tag{4.8}$$

となる. 一方 $\{\sigma < \tau\}$ 上で

$$Y_{N+1} = \sum_{i=1}^{\sigma} p_i(X_i - X_{i-1}) + \sum_{i=\sigma+1}^{\tau} p_i(X_i - X_{i-1}) + \sum_{i=\tau+1}^{N+1} p_i(X_i - X_{i-1}) \tag{4.9}$$

と分けると, 右辺の第一項と第三項の $\sum$ の中の p_i は 0 , 第二項の $\sum$ の中の p_i は 1 となるので, $Y_{N+1} = X_\tau - X_\sigma$ となる. また $\{\sigma = \tau\}$ 上では $Y_{N+1} = 0 = X_\tau - X_\sigma$ となるから, (4.8) と合わせて

$$E[X_\tau] = E[X_\sigma] \tag{4.10}$$

を得る. $A \in \mathcal{F}_\sigma$ に対して

$$\sigma_A(\omega) = \sigma(\omega)\mathbf{1}_A(\omega) + (N+1)\mathbf{1}_{A^c}(\omega)$$

$$\tau_A(\tau) = \tau(\omega)\mathbf{1}_A(\omega) + (N+1)\mathbf{1}_{A^c}(\omega)$$

と定める. $n \leq N$ のとき, $\mathcal{F}_\sigma$ の定義と $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ に注意すると

$$\{\sigma_A \leq n\} = A \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \{\tau_A \leq n\} = A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

となるので σ_A, τ_A はともに停止時刻である. さらに, 確率 1 で $\sigma_A \leq \tau_A \leq N+1$ が成り立つ. したがって σ_A, τ_A も定理の仮定をみたいしているので, (4.10) より

$$E[X_\tau; A] + E[X_{N+1}; A^c] = E[X_{\tau_A}] = E[X_{\sigma_A}] = E[X_\sigma; A] + E[X_{N+1}; A^c]$$

つまり

$$E[X_\tau; A] = E[X_\sigma; A], \quad A \in \mathcal{F}_\sigma$$

となるので (4.6) が示させた. 優マルチンゲールの場合, 劣マルチンゲールの場合も同様の議論で証明することができる. □

$a, b \in \mathbb{R}$ に対して , $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $a \vee b - \max\{a, b\}$ とする.

系 4.1 (**任意停止定理** (optional stopping theorem))　σ を停止時刻とし, $\mathbf{X} = \{X_n\}$ をマルチンゲールとする. このとき $\mathbf{X}^\sigma = \{X_{n\wedge\sigma}\}$ もマルチンゲールである. $\mathbf{X}$ が優（劣）マルチンゲールのときは, $\mathbf{X}^\sigma$ も優（劣）マルチンゲールである.

証明　$p_n = \mathbf{1}_{\{\sigma\geq n\}}$ とおくと, $p_n \geq 0$, $E[|p_n|] \leq 1 < \infty$ であり, $\{\sigma \geq n\} = \{\sigma < n\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$ であるから p_n は可予測である. $X_0 = Y_0$ として (4.7) によって $\{Y_n\}$ を定めると, $n \leq \sigma$ のとき $Y_n = X_n$, $n > \sigma$ のとき $Y_n = X_\sigma$ となることが分かる. つまり $Y_n = X_{n\wedge\sigma}$ であるから, 補題 4.1 より $\mathbf{X}^\sigma$ はマルチンゲールである. $\mathbf{X}$ が優（劣）マルチンゲールのときも, 全く同様に示される. □

4.4　最適戦術

任意抽出定理の応用として最適戦術（ optimal strategy）, 特に, 最適停止（ optimal stopping）の問題を考える. 最適停止の問題とは, あるゲームを続けて行っているとき, どの時点でゲームを止めるとプレイヤーにとって利益が大きいかを求める問題である. この問題を数学的に設定してみると次のようになる. 完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上にフィルトレーション $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_N$ （ $\mathcal{F}_1$ は確率 0 の集合をすべて含む）と可積分の確率過程 $\{X_n\}_{n=1}^N$ が与えられているとする. このとき $\mathcal{G}$ を停止時刻全体とすると

$$\max_{\sigma\in\mathcal{G}} E[X_\sigma] \tag{4.11}$$

をみたす $\sigma_0 \in \mathcal{G}$ を求める問題が最適停止の問題であり, σ_0 を最適停止時刻（optimal stopping time）という. $\{X_n\}$ は, $\mathcal{F}_n$-適合である必要はないが, $E[X_n|\mathcal{F}_n]$ が $\mathcal{F}_n$-適合であることに注意すれば, 最適停止の問題は, $\mathcal{F}_n$-適合である q 場合を考えれば十分であることが分かる（各自確認）.

最適停止の問題を解くために, $\{Z_n\}_{n=1}^N$ を次のように帰納的に定義する :

1. $Z_N = X_N$.
2. $Z_N, \ldots, Z_n$ が定まったとき, $Z_{n-1} = E[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}] \vee X_{n-1}$ とおく.

このように定義した $\{Z_n\}_{n=1}^N$ に対して

$$\sigma_0(\omega) = \min\{n \geq 1 : X_n(\omega) = Z_n(\omega)\}$$

とおくと, $\{\sigma_0 \leq k\} \in \mathcal{F}_k$ であるから $\sigma_0 \in \mathcal{G}$ である.

定理 4.6 任意の $\sigma \in \mathcal{G}$ に対して, $E[X_{\sigma_0}] \geq E[X_\sigma]$ が成り立つ. つまり, σ が最適時刻である . さらに $E[X_{\sigma_0}] = E[Z_{\sigma_0}] = E[Z_1]$ が成り立つ.

例　サイコロを最大 N 回振ることが許されているとき, 最後に出た目の期待値を最大にするには, いつサイコロを振るのを止めればよいか？

この例は, $\{X_n\}_{n=1}^N$ 独立同分布をもつ確率変数列で

$$P(X_n = i) = \frac{1}{6}, \quad I = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

であり $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \vee \mathcal{N} = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \cup \mathcal{N}$ から生成された σ 加法族, であるときに最適停止時間の問題である. ただし, $\mathcal{N}$ を測度 0 の集合全体から生成された σ 加法族である.