数理解析研究所研究集会

確率論シンポジウム

日程　平成２５年１２月１７日（火）～２０日（金）
会場　京都大学数理解析研究所　４２０号室

世話人：長田 博文 (九州大学)
日野 正訓 (大阪大学)
種村 秀紀 (千葉大学)
福島 竜輝 (RIMS)

プログラム

12月17日（火）

9:30 - 10:00　道工　勇（埼玉大学）
ある積分方程式の解の確率論的構成

10:10-10:40　瀬川悦生（東北大学）
量子ウォークの統計的性質と単位円周上の直交多項式

10:50-11:20　松井 宗也（南山大学）
Representations of fractional moments and their truncations

11:30-12:00　井上 昭彦（広島大学）笠原 雪夫（北海道大学）M. Pourahmadi （Texas A&M 大学）
多次元の予測理論的手法の最近の進展について

13:30-14:00　高橋 博樹（慶應義塾大学）
カオス的な一次元力学系の大偏差原理

14:10-14:40　須崎 清剛（大阪大学）
An SDE approach to leafwise diffusions on foliated spaces and its applications

14:50-15:20　梶野 直孝（神戸大学）
Sierpiński gasket 上の測度論的 Riemann 構造に対する Laplacian の Weyl 型固有値漸近挙動

15:40-16:10　永沼 伸顕（東北大学）
Asymptotic error distributions of the Crank-Nicholson scheme for SDEs driven by fractional Brownian motion

16:20-16:50　一場 知之 (University of California Santa Barbara)
Rank-based diffusions with skew elastic collisions

12 月 18 日（水）

9:30-10:00　岡村 和樹（東京大学）
On the range of random walk on graphs satisfying a uniform condition

10:10-10:40　白石 大典（京都大学）
Growth exponent for loop-erased random walk in three dimensions

10:50-11:20　久保田 直樹（日本大学）
Rate of convergence in first passage percolation with low moment conditions

11:30-12:00　江崎 翔太（千葉大学）
長距離相互作用をもつ飛躍型無限粒子系

13:30-14:00　長田 博文（九州大学）
Dynamical rigidity of stochastic Coulomb systems in infinite-dimensions

14:10-14:40　白井 朋之（九州大学）
α-determinantal point field associated with green kernel

14:50-15:20　Trinh Khanh Duy（九州大学）
Some results on spectral measures of Wigner matrices and applications

15:40-16:50
ショートコミュニケーション

12 月 19 日（木）

9:00-9:30　松浦 將國（東北学院大学）
一般化ファインマン・カッツ乗法汎関数に対するゲージ関数の無限遠での漸近挙動

9:40-10:10　和田 正樹（東北大学）
Growth of Feynman-Kac semigroup associated with critical Schrodinger form

10:20-10:50　塩沢 裕一（岡山大学）
Escape rate of symmetric Markov processes

11:00-11:30　鈴木 康平 (京都大学)
On instability of global path properties of symmetric Markov processes under Mosco convergence

11:40-12:10　桑江 一洋（熊本大学）
On a stability for generalized Feynman-Kac semigroups of stable-like processes

13:30-14:00　福島 正俊（大阪大学）金子　宏（東京理科大学）
On BMD Schwarz kernels and Villat's kernels in Komatu-Loewner equations

14:10-14:40　新井 拓児（慶應義塾大学）鈴木良一（慶應義塾大学）
Local risk-minimization for Lévy Markets

14:50-15:20　天羽 隆史 (立命館大学)
A Time-Discrete Clark-Ocone Formula for Poisson Functionals

15:40-16:10　清水 信孝（立命館大学）
多次元多重オイラー積と Levy 測度の関係

16:20-16:50　吉川 和宏　（立命館大学）
無限積表現可能な多次元新谷ゼータ分布

12 月 20 日（金）

9:30-10:00　南　就将（慶應義塾大学）
Definition and self-adjointness of the stochastic Airy operator

10:10-10:40　鍜治 俊輔 (九州産業大学)
Martingale approach to first passage problems of Levy processes over moving boundary

10:50-11:20　廣島 文生（九州大学）
確率解析的 UV くりこみ理論

11:30-12:00　矢野 孝次（京都大学）
周遊路を結合してできる過程の汎関数極限定理

13:30-14:00　桑田 和正 (お茶の水女子大学)
The entropic curvature dimension condition and Bochner's inequality

14:10-14:40　稲浜　譲（名古屋大学）
Large deviation principle for certain spatially lifted Gaussian rough path

14:50-15:20　竹内 敦司（大阪市立大学）
Asymptotic behavior of densities for stochastic functional differential equations

15:40-16:10　会田 茂樹（東北大学）
Wong-Zakai approximations for reflecting SDE

本研究集会は数理解析研究所の他、次の科学研究費補助金から資金援助を受けて開催するものです。

科研費基盤（A）課題番号 24244010「2次元クーロンポテンシャルによって相互作用する無限粒子径の確率幾何と確率力学」（代表者：長田博文（九州大学））
科研費基盤（A）課題番号 25247007「複雑な系の上の確率過程―離散モデルとそのスケール極限の解析」（代表者：熊谷隆（京都大学・京都大学数理解析研究所））

ある積分方程式の解の確率論的構成

A Probabilistic Construction of Solutions to A Class of Integral Equations

道工勇 (Isamu Dôku) 埼玉大学 (Saitama Univ.） e-mail: idoku@mail.saitama-u.ac.jp

$D_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ とし, $\alpha \cdot \beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{C}^3)$ で内積を表し, $e_x = x/|x|$, $(x \in D_0)$ と定める. 未知関数 $u \equiv u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times D_0 \to \mathbb{C}^3$ に関する下記の積分方程式を考える.

$$\begin{aligned} e^{\lambda t|x|^2} u(t,x) &= u_0(x) + \frac{\lambda}{2} \int_0^t ds\ e^{\lambda s|x|^2} \int p(s,x,y;u) n(x,y) dy \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \int_0^t e^{\lambda s|x|^2} f(s,x) ds, \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times D_0 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで, $\lambda > 0$, $u_0 : D_0 \to \mathbb{C}^3$, $u(t,x)|_{t=0} = u_0(x)$, $f(t,x) : \mathbb{R}_+ \times D_0 \to \mathbb{C}^3$, $f(t,x)/|x|^2 = \tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $p(t,x,y;u) = u(x,y) \cdot e_x \ \{u(t, x-y) - e_x(u(t,x-y) \cdot e_x)\}$ である. 一方, マルコフ核 $K : D_0 \to D_0 \times D_0$ を元 $z \in D_0$ に対して, $K_z(dx, dy) \in \mathcal{P}(D_0 \times D_0)$ であって, 正値可測関数 $h = h(x, y)$ に対して, $D_0 \times D_0$ 上の可測関数 $k > 0$ がとれて $\iint h(x,y) K_z(dx,dy) = \int h(x, z-x) k(x,z) dx$, $k(x,y) = i|x|^{-2} n(x,y)$ と定め, $\mathbb{R}^+$ 上の任意の可測関数 $f, g > 0$ に対して

$$\int h(|z|) \nu(dz) \int g(|x|) K_z(dx,dy) = \int g(|z|) \nu(dz) \int h(|y|) K_z(dx,dy) \tag{2}$$

が成り立つとする. ただし, $\nu(dz) = |z|^{-3} dz$ である.

$\mathbb{C}^3$ 内において, 要素 z の直交部分への射影を $\mathrm{Proj}^z(\cdot)$ と表し, β, γ の $z \in D_0$ に対する ★ 積を $\beta \bigstar_{[z]} \gamma = -i\ (\beta \cdot e_z)\ \mathrm{Proj}^z(\gamma)$ と定める. いま分枝率がパラメータ $\lambda|x|^2$ で与えられ, 分枝機構が等確率の 2 元的なもので, 子分枝粒子の挙動（分布）が K_x で定まる, 空間 D_0 上の連続時間 2 元臨界的分枝過程 $Z^{K_x}(t)$ を考える. このとき, この $Z^{K_x}(t)$ の定める樹形構造に着目して, マーク付き樹木 $\omega = (t, (t_m), (x_m), (\eta_m), m \in \mathcal{V})$ の空間を Ω とする. また $P_{t,x}$ を Ω 上の確率測度で時間逆進行の $Z^{K_x}(t)$ の法則とする. ここで t は共通の祖先が誕生した時刻とし, $\eta_m = 0$ で粒子 x_m は死滅し, $\eta_m = 1$ で 2 つの子孫 x_{m1}, x_{m2} を生成するものとする. ただし, $\mathcal{V} = \cup_{\ell \geq 0} \{1, 2\}^\ell$ は樹形構造を記述するための長さ ℓ の有限記号系列であるラベル全体の集合である. $\Omega \ni \omega$ に対して, $\mathcal{N}(\omega)$ で樹形分岐点となる節点のラベル全体, $\mathcal{V} \setminus \mathcal{N}(\omega) \ni m$ の直属の節点が $\mathcal{N}(\omega)$ に入るものの中で正時間部分 $t_m(\omega) > 0$ を $N_+(\omega)$, 非負時間部分 $t_m(\omega) \leqslant 0$ を $N_-(\omega)$ と表し, $N(\omega) = N_+(\omega) \cup N_-(\omega)$ とする. つぎに $\Theta^m(\omega)$ は $m \in N_+(\omega)$ なら $\tilde{f}(t_m(\omega), x_m(\omega))$, $m \in N_-(\omega)$

なら $u_0(x_m(\omega))$ を表すとする．このとき, $\Xi^{m_1}_{m_2.m_3}(\omega) \equiv \Xi^{m_1}_{m_2,m_3}[u_0,f](\omega) := \Theta^{m_2}(\omega)$ $\bigstar_{[x_{m_1}]}\ \Theta^{m_3}(\omega)$ と定める．ただし, 積の順序は自然順序 $\prec$ に関して lexicographically に $m \prec m'$ のとき m のものが左に, m' のものが右にくるように書き表すものとする．また $m \in \mathcal{V}$ が樹形の単独端点のラベルのとき, $\Xi^{\emptyset}_{m,\emptyset}(\omega) = \Theta^m(\omega)$ とする．$\mathcal{N}(\omega)$ における各節点で, 上述のような設定の下で $\bigstar$ 積を帰納的に実行して得られる量（樹状 $\bigstar$ 積汎関数）を

$$M^{\langle u_0,f\rangle}_{\bigstar}(\omega) = \prod \bigstar_{[x_{\tilde{m}}]}\Xi^{m_1}_{m_2.m_3}[u_0,f](\omega) \tag{3}$$

と表す．ここで $m_1 \in \mathcal{N}(\omega)$, $m_2, m_3 \in N(\omega)$ であり, (3) 式の $\bigstar$ 積 $\prod_{\bigstar}$ は $|m_1| = \ell$ のとき $\tilde{m} \in \mathcal{N}(\omega) \cap \{|\tilde{m}| = \ell - 1\}$ なる $x_{\tilde{m}}$ に関して $\bigstar$ 積を lexicographical な順にとることを意味する．

一方, 2 元的樹木の節点 (x_m) に依って索引付けられた, 重み (U, F) 付き樹状 $*$ 積汎関数 $M^{\langle U,F\rangle}_{*}(\omega)$ を構成する．ここで U (F) はそれぞれ D_0 $(\mathbb{R}_+ \times D_0)$ 上の非負可測関数で, 各 x ごとに $F(\cdot, x) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ である．また汎関数構成時の積は通常の乗数積 $*$ をとったものである．

定理. $|u_0(x)| \leqslant U(x)$, $|\tilde{f}(t,x)| \leqslant F(t,x)$, $(\forall t, x)$, かつ $T > 0$ に対して, $E_{T,x}[M^{\langle U,F\rangle}_{*}]$ $< \infty$, a.e.-x を仮定する．このとき, 2 元臨界的分枝過程 $Z^{K_x}(t)$ の定める樹形構造から決まる節点のラベル集合により索引付けられた, ある適当な重み (u_0, f) 付き樹状 $\bigstar$ 積汎関数 $M^{\langle u_0,f\rangle}_{\bigstar}(\omega)$ が存在して, $u(t,x) = E_{t,x}[M^{\langle u_0,f\rangle}_{\bigstar}]$ は積分方程式 (1) の一意解である．ただし $E_{t,x}$ は確率測度 $P_{t,x}$ による期待値を表す．

References.

[1] Aldous, D. The continuum random tree I. & III. AP 19 (1991), 1–28; ibid. 21 (1993), 248–289.

[2] Aldous, D. Tree-based models for random distribution of mass. J. Stat. Phys. 73 (1993), 625–641.

[3] Aldous, D. and Pitman, J. Tree-valued Markov chains derived from Galton-Watson processes. Ann. Inst. Henri Poicaré 34 (1998), 637–686.

[4] Aldous, D. and Pitman, J. Inhomogeneous continuum random trees and the entrance boundary of the additive coalescent. PTRF 118 (2000), 455–482.

[5] Chauvin, B., Klein, T., Marckert, J.-F. and Rouault, A. Martingales and profile of binary search trees. Electr. J. Probab. 10 (2005), 420-435.

[6] Drmota, M. *Random Trees.* Springer, Wien, 2009.

[7] Evans, S.N. *Probability and Real Trees.* LNM vol.1920, Springer, Berlin, 2008.

[8] Harris, T.E. *The Theory of Branching Processes.* Springer, Berlin, 1963.

[9] Le Gall, J.-F. Random trees and applications. Probab. Survey. 2 (2005), 245–311.

量子ウォークの統計的性質と単位円周上の直交多項式

瀬川悦生*
(東北大学 情報科学研究科)

1 はじめに

量子ウォーク (QW) は, Feynman による時空間離散版の自由粒子の相対運動を記述するものとして [1] の中に原型として既に現れている．そして量子情報におけるその効能が示されて以降 [2], QW は各分野を横断しながら, ここ 10 年で着目されて続けている．特に, QW の実験室での実装の研究はここ数年で目覚ましく発展を遂げ続けているトピックの 1 つになっている．

QW の時間発展はユニタリ作用素 U で記述され, 初期状態 Ψ_0 が与えられたとき, $\Psi_0 \overset{U}{\mapsto} \Psi_1 \overset{U}{\mapsto} \Psi_2 \overset{U}{\mapsto} \cdots$ のように逐次作用していく．時間発展のユニタリ性からノルムが保存されるため, 各時刻で確率分布が定義できる．そこでここでは, ユニタリ作用素 U が与えられたときの, 確率分布の列の漸近挙動に着目する．

ところで, QW は時間発展のユニタリ性から単位円周上の測度に付随するローラン直交多項式系と強い繋がりがある [6]. そこで, 最も直接的に関係性を見出すことのできる, 半直線上の QW を考察することで, このローラン直交多項式間の 5 項の漸化式を与える CMV 行列 [3] のスペクトルが QW の統計的性質にどのように影響するのかを調べる．また逆に QW の統計的性質からその背後にある CMV 行列のスペクトルの構造を特徴付けることができる場合もあるのでそれも紹介する．QW の時刻 n での確率分布 $\nu_n : \mathbb{Z}_+ \to [0,1]$ とおくと, この講演では以下で定義する QW の性質に着目する．

(1) 局在: $j \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $\limsup_{n\to\infty} \nu_n(j) > 0$

(2) 線形的伝搬: $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} \sum_{j<nx} \nu_n(j) \neq \mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}(x)$.

(3) 弾道的伝搬: $j \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $\limsup_{n\to\infty} \nu_n(|n-j|) > 0$

(3) は (2) の伝搬が極端な特別な場合になる．

2 半直線上の量子ウォークと CMV 行列

ここで扱う半直線上の離散時間 QW を定義する．これはツリー構造をしたグラフ上 [4] や超立方体, ジョンソングラフ上 [2] の QW の考察などに基本となる QW になっている．

Definition 1. まず量子コインパラメータ呼ばれる複素数の列 $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$, $(|\gamma_j| < 1)$ を用意する．そして, 各 $j \in \mathbb{Z}_+$ に対して, 次の $SU(2)$ の行列を定義する．但し, $\rho_j = \sqrt{1-|\gamma_j|^2}$.

$$H_j = \begin{bmatrix} \rho_j & \bar{\gamma}_j \\ -\gamma_j & \rho_j \end{bmatrix}.$$

(1) 全空間*:* $\mathcal{H}_+ = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\delta}_{j,L}, \boldsymbol{\delta}_{j,R}; j \in \mathbb{Z}_+\}$

---

*e-segawa@m.tohoku.ac.jp

Key words. Quantum walks, Orthogonal polynomials on the unit circle, Szegö class

(2) 時間発展 $U : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_+$ (ユニタリ) : 初期状態は $\boldsymbol{\delta}_{0,L}$ とする. 時間発展は, 二つのユニタリ作用素 S, C を用いて, $U = SC$ で表される. 但し,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \bigoplus_{j\geq 1} H_j \tag{2.1}$$

$$S\boldsymbol{\delta}_{j,L} = \boldsymbol{\delta}_{j-1,L},\ S\boldsymbol{\delta}_{j,R} = \boldsymbol{\delta}_{j+1,R}. \tag{2.2}$$

ここで, $\boldsymbol{\delta}_{j,L} = \boldsymbol{\delta}_j \otimes {}^T[1,0]$, $\boldsymbol{\delta}_{j,R} = \boldsymbol{\delta}_j \otimes {}^T[0,1]$ と置いた.

初期状態と原点での量子コインにより, この QW は $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\delta}_{(0,L)}, \boldsymbol{\delta}_{(1,R)}, \boldsymbol{\delta}_{(1,L)}, \boldsymbol{\delta}_{(2,R)}, \dots\}$ で閉じている. 今, パスの重みと呼ばれる $\Xi_n : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{C})$ を次のように定める.

$$\Xi_n(j) \equiv \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\delta}_{j,L}, U^{(\gamma)^n}\boldsymbol{\delta}_{0,L}\rangle & \langle \boldsymbol{\delta}_{j,L}, U^{(\gamma)^n}\boldsymbol{\delta}_{0,R}\rangle \\ \langle \boldsymbol{\delta}_{j,R}, U^{(\gamma)^n}\boldsymbol{\delta}_{0,L}\rangle & \langle \boldsymbol{\delta}_{j,R}, U^{(\gamma)^n}\boldsymbol{\delta}_{0,L}\rangle \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

次に,

$$P_j = \begin{bmatrix} \rho_j & \overline{\gamma}_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ Q_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma_j & \rho_j \end{bmatrix},\ R_j = \begin{bmatrix} -\gamma_j & \rho_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

と置く. Ξ_n がパスの重みと呼ばれる所以は, ランダムウォークの類推による, 以下のような漸化式が成立するためである.

$$\Xi_n(j) = P_{j+1}\Xi_{n-1}(j+1) + Q_{j-1}\Xi_{n-1}(j-1). \tag{2.5}$$

但し, 一般に P_l と Q_m 等は非可換であることに注意. ここで, 場所 j から出発して, j よりも大きいところから時刻 n で初めて j に戻ってくるパスの重みを $F_n(j)$ とすると, ある $g_n(j) \in \mathbb{C}$ が存在して, $F_n(j) = g_n(j)R_j$ と書ける. 今, この $g_n(j)$ の母関数を $\widetilde{g}_j^{(\gamma_1,\gamma_2,\dots)}(z) = \sum_{n\geq 1} g_n(j)z^n$ とおくと, ある連分数表示が明示的に得られる [7].

次に, 単位円周上の固有値分布に付随する直交ローラン多項式間の漸化式を与える CMV 行列について簡単に説明する. 単位円周上の確率分布 μ が与えられたとき, 以下で内積が与えられるヒルベルト空間 L^2_μ を定義する.

$$(f,g)_\mu = \int_{|z|=1} \overline{f(z)}g(z)d\mu,\ f,g \in L^2_\mu.$$

そして, $\{1, z^{-1}, z, z^{-2}, z^2, \dots\}$ から, L^2_μ の完全正規直交基底を構成する. 今, $\{\chi_j\}_j$ をその直交基底とすると, Schur パラメータと呼ばれる複素数列 $(\gamma_0, \gamma_1, \dots)$, $|\gamma_j| < 1$ が存在して, $\{\chi_m\}_m$ 間の 5 項の漸化式を与える. この 5 項間漸化式を与える $(\mathcal{C})_{l,m} = (\chi_l, z\chi_m)_\mu$ は, CMV 行列と呼ばれる. その明示的な表示は [3] で初めて得られた. CMV 行列と我々の QW の間には次のような関係がある [6, 8].

Proposition 1. *U を QW の時間発展とする. すると, $\mathcal{H}_e = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\delta}_{(x,L)}, \boldsymbol{\delta}_{(x,R)} : x\ even\}$, $\mathcal{H}_o = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\delta}_{(x,L)}, \boldsymbol{\delta}_{(x,R)} : x\ odd\}$ とおくと,*

$$\mathcal{C} \cong U^2|_{\mathcal{H}_e},\ {}^T\mathcal{C} \cong U^2|_{\mathcal{H}_o}.$$

逆に, $(\gamma_0, \gamma_1, \dots)$ が与えられると, この単位円周上の固有値分布が一意的に決まることが知られている. 実際に, $(\gamma_0, \gamma_1, \dots)$ で定まる Carathéodory 関数によって, 固有値分布 $d\mu(e^{i\theta}) = w(e^{i\theta})d\theta + d\mu_s(e^{i\theta})$ が理論的に求まる [5]. 但し, $w(e^{i\theta})$ は絶対連続関数, $d\mu_s(e^{i\theta})$ は singular part. より具体的には, Carathéodory 関数 $F(z) = (1 + zf(z))/(1 - zf(z))$ によって, $w(e^{i\theta}) = \lim_{r\uparrow 1} \mathrm{Re}(F(re^{i\theta}))$, また, singular part の台は $\{\theta \in [0, 2\pi) : \lim_{r\uparrow 1} \mathrm{Re}(F(re^{i\theta})) = \infty\}$ で定まる. ここで, $f(z) = f_0^{(\gamma_0,\gamma_1,\dots)}(z)$ は $(\gamma_0, \gamma_1, \dots)$ で決まる Schur 関数で, 以下の連分数表現によって求まる.

$$f_0^{(\gamma_0,\gamma_1,\dots)}(z) = f(z);\ f_{j+1}^{(\gamma_0,\gamma_1,\dots)}(z) = \frac{1}{z}\frac{f_j^{(\gamma_0,\gamma_1,\dots)}(z) - \gamma_j}{1 - \overline{\gamma_j}f_j^{(\gamma_0,\gamma_1,\dots)}(z)},\ j \geq 0.$$

そして, 固有値分布を決める $\{f_j(z)\}_{j\geq 0}$ と QW の母関数を与える $\{g_j(z)\}_{j\geq 0}$ の間には次のような重要な関係がある [8].

Proposition 2.

$$\widetilde{g}_j^{(\gamma_1,\gamma_2,\dots)}(z) = z^2 f_j^{(\bar{\gamma}_1,\bar{\gamma}_2,\dots)}(z^2)$$

3 結果

ここでは特に二つの例 $(1)\gamma_j = \gamma$, $(2)\gamma_j = 1/(r+j)$ $(r > 1)$ に対して, 考察する. それぞれ, CMV 行列の固有値解析により,

$$f_j^{(\gamma,\gamma,\dots)}(z) = \frac{z^2 - 1 + \sqrt{(z^2-1)^2 + 4|a|^2 z^2}}{2\bar{\gamma} z^2},\ f_j^{(1/(r+1),1/(r+2),\dots)}(z) = \frac{1}{r+j+1-(r+j)z}$$

と表されるので, Proposition 2 から, それぞれの QW の母関数が求まる. すると, 以下のような統計的性質が得られる.

Theorem 1. *(1)* $\gamma_j = \gamma$ *のとき. 局在と線形的伝搬が同時に起こる.*

(2) $\gamma_j = 1/(r+j)$ $(r > 1)$ *のとき. 局在と弾道的伝搬が同時に起こる.*

(1)(2) の場合の具体的な極限分布はそれぞれ [4, 9] と [8] で与えられている. (1) の線形的伝搬を与える極限分布の密度関数は $[0, \sqrt{1-|\gamma|^2})$ を台に持つ連続関数と, 原点のデルタ測度の凸結合で表される [4, 9]. その一方で, (2) では, 線形的伝搬を与える極限分布の密度関数は, $x = 1$ のデルタ測度と $x = 0$ のデルタ測度との凸結合になり, より両極端な二つの現象が同時に起きていることを反映している.

さらに, 弾道的伝搬に対する, 以下のような一般的な結果が得られた [10].

Theorem 2. *弾道的伝搬が起こる為の必要十分条件は,* U *の固有値分布が Szegö class に入ることである.*

ここで, Szegö class であるためのよく知られた等価な表現を以下にいくつか挙げておく [5].

$$\int_0^{2\pi} \log w(e^{i\theta}) d\theta > -\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho_{n-1}^2 \cdots \rho_1^2 > 0 \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} |\gamma_n|^2 < \infty.$$

References

[1] R. F. Feynman and A. R. Hibbs, McGraw-Hill, Inc., NewYork (1965).

[2] A. Ambainis, Int. J. Quantum Inf. **1** (2003) pp.507-518.

[3] M. J. Cantero, L. Moral and L. Velázquez, Linear Algebra and its Applications **362** (2003) pp.29–56.

[4] K. Chisaki, N. Konno and E. Segawa, Quantum Inf. Comput. **12** (2012) pp.0314–0333

[5] B. Simon, AMS Colloq. Publ. **54** AMS, Providence, RI (2005).

[6] M. J. Cantero, F. A. Grünbaum, L. Moral A. and L. Velázquez, Quantum Inf. Process. **11** (2012) pp.1149–1192.

[7] N. Konno, T. Łuczak and E. Segawa, Quantum Inf. Process. **12** (2013) pp.33–53.

[8] N. Konno and E. Segawa, arXiv:1305.1722 (2013).

[9] N. Konno and E. Segawa, Quantum Inf. Comput. **11** (2011) pp.485–495.

[10] F.A. Grünbaum, N. Konno, E. Segawa and L. Velázquez, in preparation.

Representations of fractional moments and their truncations

Muneya Matsui, Nanzan University 松井宗也 南山大学
(joint work with Iosif Pinelis)
mmuneya@nanzan-u.ac.jp

Abstract

New expressions for fractional moments of both positive and negative parts are given in terms of the characteristic function (ch.f.). Additionally, formulae to calculate truncated fractional moments by ch.f. are obtained, from which conditional fractional moments are calculated only with ch.f. We connect our new expressions with preceding studies, which yields additional results. Several applications such as the extreme value theory and the expected shortfall are pointed out. We give some examples to show how our results could be applied.

1 Positive and negative parts moments

Notations. Take any $p \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}$. Let $k := \lfloor p \rfloor$ and $\lambda := p - k$, so that $\lambda \in (0,1)$. For a complex-valued function f, its fractional derivative of order $p = k + \lambda$ is given by

$$(\mathrm{D}^p f)(t) := (\mathrm{D}^\lambda f^{(k)})(t) := \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \int_{-\infty}^{t} \frac{f^{(k)}(t) - f^{(k)}(u)}{(t-u)^{1+\lambda}} \mathrm{d}u$$

for $t \in \mathbb{R}$ (see e.g. Eq. (2.1) of Laue (1980)).

Another tool is the following expression of x_+^p by Corollary 2 in Pinelis (2011), which is obtained by the Cauchy integral theorem. Let $m \in \mathbb{Z}_+$ and $z \in \mathbb{C}$, $e_m(z)$ denotes the remainder of Maclaurin expansion of e^z, $e_m(z) := e^z - \sum_{j=0}^m \frac{z^j}{j!}$. Then

$$x_+^p = \frac{x^{\lfloor p \rfloor}}{2} \mathbf{1}_{\{p \in \mathbb{N}\}} + \frac{\Gamma(p+1)}{\pi} \int_0^\infty \mathfrak{Re} \, \frac{e_{\lceil p-1 \rceil}(itx)}{(it)^{p+1}} \mathrm{d}t.$$

Throughout we let f be a ch.f. of arbitrary random variable X, $f(t) = \mathsf{E}[e^{itX}]$.

Main Results.

Theorem 1.1 *Let $p \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}$ and assume that $\mathsf{E}|X|^p < \infty$. Then*

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}X_+^p &= \frac{(-1)^{k+1}}{\sin \pi\lambda} \, \mathfrak{Re} \left(\mathrm{D}^p (i^{-p-1} \bar{f})\right)(0), \\
\mathsf{E}X_-^p &= \frac{(-1)^{k+1}}{\sin \pi\lambda} \, \mathfrak{Re} \left(\mathrm{D}^p (i^{-p-1} f)\right)(0), \\
\mathsf{E}|X|^p &= 2\frac{(-1)^{k+1}}{\sin \pi\lambda} \, \mathfrak{Re}(i^{-p-1}) \, \mathfrak{Re}(\mathrm{D}^p f)(0),
\end{aligned}$$

where, as usual, $X_- := (-X)_+$.

Proposition 1.1 *Let $p > 0$ and $0 \le m \le \lfloor p \rfloor$. Assume that $\mathsf{E}|X|^p < \infty$, then*

$$\mathsf{E}X_+^p = \frac{f^{\lfloor p \rfloor}(0)}{2i^{\lfloor p \rfloor}} \mathbf{1}_{\{p \in \mathbb{N}\}} + \frac{\Gamma(p-m+1)}{\pi} \mathfrak{Re} \int_0^\infty \frac{\frac{d^m}{dt^m}\left(f(t) - \sum_{j=0}^{\lceil p-1 \rceil} f^{(j)}(0)\frac{t^j}{j!}\right)}{i^{p+1} t^{p-m+1}} \mathrm{d}t,$$

$$\mathsf{E}X_-^p = \frac{f^{\lfloor p\rfloor}(0)}{2i^{\lfloor p\rfloor}}\mathbf{1}_{\{p\in\mathbb{N}\}} + \frac{\Gamma(p-m+1)}{\pi}\,\mathfrak{Re}\int_0^\infty \frac{\frac{d^m}{dt^m}\left(\bar f(t) - \sum_{j=0}^{\lceil p-1\rceil}\bar f^{(j)}(0)\frac{t^j}{j!}\right)}{i^{p+1}t^{p-m+1}}\mathrm{d}t,$$

$$\mathsf{E}|X|^p = \frac{f^{\lfloor p\rfloor}(0)}{i^{\lfloor p\rfloor}}\mathbf{1}_{\{p\in\mathbb{N}\}} + 2\frac{\Gamma(p-m+1)}{\pi}\,\mathfrak{Re}\, i^{-p-1}\,\mathfrak{Re}\int_0^\infty \frac{\frac{d^m}{dt^m}\left(f(t) - \sum_{j=0}^{\lceil p-1\rceil}f^{(j)}(0)\frac{t^j}{j!}\right)}{t^{p-m+1}}\mathrm{d}t.$$

Theorem 1.2 *Take any $p\in(0,\infty)\setminus\mathbb{N}$ with $k:=\lfloor p\rfloor$ and any r.v. X with $\mathsf{E}X_+^p<\infty$. Then the following three conditions are equivalent to each other:*

(I) $\mathsf{E}|X|^k<\infty$ *and* $\mathsf{E}X_+^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\pi}\int_{0+}^\infty \mathfrak{Re}\,\frac{\mathsf{E}e_k(itX)}{(it)^{p+1}}\,\mathrm{d}t;$

(I') $f^{(k)}(0)$ *exists in* $\mathbb{R}$ *and* $\mathsf{E}X_+^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\pi}\int_{0+}^\infty \mathfrak{Re}\,\frac{(Rf)_k(t)}{(it)^{p+1}}\,\mathrm{d}t,$ *where*

$$(Rf)_k(t) := f(t) - \sum_{j=0}^k f^{(j)}(0)\frac{t^j}{j!}.$$

(II) $\mathsf{P}(X_->x)=o(1/x^p)$ *as* $x\to\infty$.

2 Truncated fractional moments

Notations Define a transform which generalizes the inversion formula;

$$\mathfrak{G}(f)(x) := \frac{i}{2\pi}\,\text{p.v.}\int_{-\infty}^\infty e^{-itx}f(t)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

where p.v. denotes "principal value", so that p.v. $\int_{-\infty}^\infty := \lim_{\{\varepsilon\downarrow0,A\uparrow\infty\}}\left(\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_\varepsilon^A\right)$.

Main Results.

Theorem 2.1 *Let X be r.v. with dist. $F(x)$ and ch.f. f. Define a measure $\mu_p(\mathrm{d}x) = x^p\mathrm{d}F(x)$ where $x^p = x_+^p + (-1)^p x_-^p$ for $p\in(0,\infty)\setminus\mathbb{N}$ and denote the positive and negative part measures respectively by $\mu_{p,+}(\mathrm{d}x) = x_+^p\mathrm{d}F(x)$ and $\mu_{p,-}(\mathrm{d}x) = x_-^p\mathrm{d}F(x)$. Further we define $|\mu_p|(\mathrm{d}x) = |x|^p\mathrm{d}F(x)$. Assume $\mathsf{E}|X|^p<\infty$.*
(1) *Fourier transforms of $\mu_{p,+}(\mathrm{d}x)$ and $\mu_{p,-}(\mathrm{d}x)$ respectively have the following expressions. For $k:=\lfloor p\rfloor$ and $\lambda:=p-k$,*

$$g_{\mu_{p,+}}(u) := \mathsf{E}[X_+^p e^{iuX}] = \frac{1}{2i^{k+1}\sin\pi\lambda}\left\{i^\lambda(\mathrm{D}^p f)(u) - (-1)^k i^{-\lambda}(\mathrm{D}^p\bar f)(-u)\right\}$$

and

$$g_{\mu_{p,-}}(u) := \mathsf{E}[(-X)_+^p e^{iuX}] = \frac{1}{2i^{k+1}\sin\pi\lambda}\left\{i^\lambda(\mathrm{D}^p\bar f)(-u) - (-1)^k i^{-\lambda}(\mathrm{D}^p f)(u)\right\}.$$

Accordingly, $g_{\mu_p}(u) := \mathsf{E}[X^p e^{iuX}] = g_{\mu_{p,+}}(u) + (-1)^p g_{\mu_{p,-}}(u)$ and $g_{|\mu_p|}(u) := \mathsf{E}[|X|^p e^{iuX}] = g_{\mu_{p,+}}(u) + g_{\mu_{p,-}}(u)$.
(2) *Moreover, for $x\in\mathbb{R}$*

$$\mathsf{E}[X^p\mathbf{1}_{\{X\ge x\}}] = \frac12\mathsf{E}X^p - \mathfrak{G}(g_{\mu_p})(x) + \frac12\mu_p(\{x\}),$$

$$\mathsf{E}[|X|^p\mathbf{1}_{\{X\ge x\}}] = \frac12\mathsf{E}|X|^p - \mathfrak{G}(g_{|\mu_p|})(x) + \frac12|\mu_p|(\{x\}).$$

Theorem 2.2 *Let* $p \in \mathbb{N}$. *Define a measure* $\mu_p(\mathrm{d}x) := x^p \mathrm{d}F(x)$ *where* $x_+^p + (-1)^p x_-^p$ *and define measures* $\mu_{p,+}(\mathrm{d}x) := x_+^p \mathrm{d}F(x)$ *and* $\mu_{p,-}(\mathrm{d}x) := x_-^p \mathrm{d}F(x)$. *Further we define* $|\mu_p|(\mathrm{d}x) = |x|^p \mathrm{d}F(x)$. *Assume* $\mathsf{E}|X|^p < \infty$. *Then Fourier transforms of* $\mu_{p,\pm}(\mathrm{d}x)$ *respectively have*

$$
\begin{aligned}
g_{\mu_{p,+}}(u) = \mathsf{E}[X_+^p e^{iuX}] &= \frac{f^{(p)}(u)}{2i^p} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{f^{(p)}(t+u) - f^{(p)}(u-t)}{i^{p+1}t}\mathrm{d}t, \\
g_{\mu_{p,-}}(u) = \mathsf{E}[X_-^p e^{iuX}] &= \frac{\bar{f}^{(p)}(-u)}{2i^p} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\bar{f}^{(p)}(t-u) - \bar{f}^{(p)}(-u-t)}{i^{p+1}t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Accordingly, $g_{\mu_p}(u) := g_{\mu_{p,+}}(u) + (-1)^p g_{\mu_{p,-}}(u) = f^{(p)}(u)/i^p$ *and* $g_{|\mu_p|}(u) := g_{\mu_{p,+}}(u) + g_{\mu_{p,-}}(u)$. *Moreover, for* $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}[X^p \mathbf{1}_{\{X \ge x\}}] &= \frac{1}{2}\mathsf{E}X^p - \mathfrak{G}(g_{\mu_p})(x) + \frac{1}{2}\mu_p(\{x\}), \\
\mathsf{E}[|X|^p \mathbf{1}_{\{X \ge x\}}] &= \frac{1}{2}\mathsf{E}|X|^p - \mathfrak{G}(g_{|\mu_p|})(x) + \frac{1}{2}|\mu_p|(\{x\}).
\end{aligned}
$$

REFERECES

[1] Laue, G. (1980) Remarks on the relation between fractional moments and fractional derivatives of characteristic functions, *J. Appl. Probab.* **17**, 456–466.

[2] Matsui, M. and Pawlas, Z. Fractional absolute moments of heavy tailed distributions, *preprint, submitted.* (old version is available at arXiv:1301.4804)

[3] Matsui, M. and Pinelis, I. Representations of fractional moments and their truncations, *preprint, under construction.*

[4] Pinelis I. (2011) Positive-part moments via the Fourier-Laplace transform, *J. Theoret. Probab.* **24**, 409–421.

多次元の予測理論的手法の最近の進展について

井上 昭彦 (広島大学), 笠原 雪夫 (北海道大学),
M. Pourahmadi (Texas A&M 大学)

Let $\mathbb{T}$ and $\mathbb{D}$ be the unit circle and open unit disk, respectively, in $\mathbb{C}$. For $1 \leq p \leq \infty$, we write L^p for the usual Lebesgue space on $\mathbb{T}$ (w.r.t. the normalized Lebegue measure). Let $\mathscr{M} := M_d(\mathbb{C})$ be the space of complex $d \times d$ matrices and $\mathscr{V} := \mathbb{C}^d$ the Euclidean space of column vectors. An $\mathscr{M}$-valued function f on $\mathbb{T}$ is called *nondegenerate* if $\det f \neq 0$ a.e. Let $L^p_{\mathscr{M}}$ (resp., $L^p_{\mathscr{V}}$) be the Lebesgue space of $\mathscr{M}$-valued (resp., $\mathscr{V}$-valued) functions on $\mathbb{T}$. The Hardy space $H^p_{\mathscr{M}}$ may be defined by

$$H^p_{\mathscr{M}} := \left\{ f \in L^p_{\mathscr{M}} \,\middle|\, \int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = 0 \text{ for } n = 1, 2, \dots \right\}.$$

The Hardy space $H^p_{\mathscr{V}}$ is defined similarly, with $\mathscr{M}$ replaced by $\mathscr{V}$. A nondegenerate function $g \in H^p_{\mathscr{M}}$ is called *outer* if

$$\det g(z) = c \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |\det g(e^{i\theta})| d\theta \right) \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

where $c = \det g(0)/|\det g(0)|$.

We put

$$\mathscr{D} := \{(f, f_\sharp) \in H^2_{\mathscr{M}} \times H^2_{\mathscr{M}} : f \text{ is nondegenerate, } f_\sharp \text{ is outer, } f^* f = f_\sharp f_\sharp^*\}.$$

Any nondegenerate function F in $H^1_{\mathscr{M}}$ admits a factorization of the form

$$F = f f_\sharp, \qquad (f, f_\sharp) \in \mathscr{D} \tag{1}$$

(see Helson and Lowdenslager[HL]). This factorization, which we call the *HL-factorization* of F, is unique up to a constant unitary factor. On the other hand, for any nondegenerate function f in $H^2_{\mathscr{M}}$, there exists $f_\sharp$ such that $(f, f_\sharp) \in \mathscr{D}$, and $f_\sharp$ is unique up to a constant unitary factor.

For a nondegenerate function $F \in H^1_{\mathscr{M}}$, let U_F be its unitary part, that is,

$$F = U_F \sqrt{F^* F} = \sqrt{F F^*}\, U_F.$$

Then, in terms of the HL-factorization $F = f f_\sharp$, we have

$$U_F = f (f_\sharp^*)^{-1} = (f^*)^{-1} f_\sharp. \tag{2}$$

We introduce the following key definition.

Definition. A nondegenerate function $F \in H^1_{\mathscr{M}}$ is called *rigid* if for any nondegenerate function $G \in H^1_{\mathscr{M}}$ with HL-factorization $G = gg_\sharp$, $U_F = U_G$ implies $G = fkf_\sharp$ for some constant positive $k \in \mathscr{M}$.

Rigid functions are outer, while there are outer functions that are not rigid.

We put

$$H^{2-}_{\mathscr{V}} := \left\{ f \in L^2_{\mathscr{V}} \,\middle|\, \int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = 0 \ \text{ for } n = 0, -1, -2, \dots \right\}.$$

Theorem 1. *Let $(f, f_\sharp) \in \mathscr{D}$ and $F := ff_\sharp$. Then the following three conditios are equivalent:*

(1) *F is rigid.*

(2) *$(g, g_\sharp) \in \mathscr{D}$, $G = gg_\sharp$, $U_F = U_G \quad \Rightarrow \quad g = fc$ for some constant invertible $c \in \mathscr{M}$.*

(3) *$U_F H^{2-}_{\mathscr{V}} \cap H^2_{\mathscr{V}} = \{0\}$.*

Let $X = (X_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, $X_j = (X_{j,1}, \dots, X_{j,d})$, be a centered d-dimensional weakly stationary process. We assume that X is purely nondeterministic (PND) and full rank, so

$$\mathbb{E}[X_j^* X_0] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} w(\theta) d\theta \qquad (j \in \mathbb{Z})$$

for some nonnegative Hermitian matrix-valued function $w \in L^1_{\mathscr{M}}$ satisfying

$$\det w > 0 \quad \text{a.e.,} \qquad \log \det w \in L^1.$$

The density w may be factored as

$$w = h^* h = h_\sharp h_\sharp^*, \tag{3}$$

where h and $h_\sharp$ are outer functions in $H^2_{\mathscr{M}}$ (cf. [HL]), and these factorizations are unique up to constant unitary factors. In the scalar case ($d = 1$), these factorizations reduce to $w = |h|^2$ with $h = h_\sharp$.

For $I \subset \mathbb{R}$, we write H_I for the closed subspace of $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spanned by the entries $\{X_{j,k} : j \in I \cap \mathbb{Z},\ k = 1, \dots, d\}$. The process X is called *completely nondeterministic* (CND) if $H_{(-\infty,0]} \cap H_{[1,\infty)} = \{0\}$. It is easy to see that X is CND if and only if $h(h_\sharp^*)^{-1} H^{2-}_{\mathscr{V}} \cap H^2_{\mathscr{V}} = \{0\}$. Therefore, Theorem 1 yields the next theorem, which may be viewed as a multi-dimensional extension of the results of Levinson–McKean [LM], Bloomfield et al. [BJH] and Nakazi [N].

Theorem 2. *The following three conditions are equivalent:*

(1) *$hh_\sharp$ is rigid.*

(2) *$(g, g_\sharp) \in \mathscr{D}$, $h(h_\sharp^*)^{-1} = g(g_\sharp^*)^{-1} \Rightarrow g = fc$ for some constant invertible $c \in \mathscr{M}$.*

(3) *X is CND.*

A useful sufficient condition for X to be CND is $w^{-1} \in L^1_{\mathscr{M}}$.

Let $\hat{X}_n$ be the linear predictor of X_n based on $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, and write

$$\hat{X}_n = X_{n-1}\phi_{1,n} + X_{n-1}\phi_{2,n} + \ldots + X_0\phi_{n,n}. \tag{4}$$

We are concerned with the n-th predictor coefficient $\phi_{n,n}$. In the scalar case ($d = 1$), the sequence $\{\phi_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ corresponds to the *Verblunsky coefficients*.

We put $v := h(0)^*h(0)$, $v^\sharp := h_\sharp(0)h_\sharp(0)^*$ (corresponding to prediction error variances) and

$$\gamma_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta} h(h_\sharp^*)^{-1} d\theta \qquad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{(phase coefficients).} \tag{5}$$

The next theorem is a multi-dimensional extension of the results of [BIK] and [KB]; see also [I] for the first result of this type.

Theorem 3. *If X is CND, then $\phi_{n,n}$ may be expressed as*

$$\phi_{n,n} = -\sqrt{v}^{\,-1}\left(\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} {}^t\boldsymbol{\gamma}_n (\,\Gamma_n^*\,\Gamma_n\,)^k\,\boldsymbol{e}\right)\sqrt{v^\sharp} \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{6}$$

where

$$\boldsymbol{\gamma}_n := \begin{pmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{n+1} \\ \gamma_{n+2} \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_n := \begin{pmatrix} \gamma_{n+1} & \gamma_{n+2} & \gamma_{n+3} & \cdots \\ \gamma_{n+2} & \gamma_{n+3} & \gamma_{n+4} & \cdots \\ \gamma_{n+3} & \gamma_{n+4} & \gamma_{n+5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e} := \begin{pmatrix} id \\ o \\ o \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

参考文献

[BIK] N. H. Bingham, A. Inoue and Y. Kasahara, An explicit representation of Verblunsky coefficients, *Statist. Probab. Lett.*, **82** (2012), 403–410.

[BJH] P. Bloomfield, N. P. Jewell and E. Hayashi, Characterizations of completely nondeterministic stochastic processes, *Pacific J. Math.* **107** (1983), 307–317.

[HL] H. Helson and D. Lowdenslager, Prediction theory and Fourier series in several variables. *Acta Math.* **99** (1958), 165-202; II. *Acta Math.* **106** (1961) 175–213.

[I] A. Inoue, AR and MA representation of partial autocorrelation functions, with applications, *Probab. Theory Related Fields* **140** (2008), 523–551.

[KB] Y. Kasahara and N. H. Bingham, Verblunsky coefficients and Nehari sequences, *Trans. Amer. Math. Soc.*, electronically published in 2013.

[LM] N. Levinson and H. P. McKean, Weighted trigonometrical approximation on R^1 with application to the germ field of a stationary Gaussian noise, *Acta Math.* **112** (1964), 99–143.

[N] T. Nakazi, Kernels of Toeplitz operators, *J. Math. So. Japan* **38** (1986), 607–616.

An SDE approach to leafwise diffusions on foliated spaces and its applications

大阪大学大学院理学研究科　須崎 清剛 *

M と Z を局所コンパクトで可分な距離付け可能空間とする．$0 \le k \le \infty$ と $\mathbb{R}^d \times Z$ の開集合 U に対し，$f : U \to \mathbb{R}$ が C_L^k 級であるとは，任意の z に対し，$f(\cdot, z)$ は C^k 級で各偏導関数が U 上連続であるときをいう．$f : U \to \mathbb{R}^q$ が C_L^k 級であるとは，f のどの成分関数も C_L^k 級であるときをいう．

次の (i), (ii) の性質をもつ M の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ が存在するとき，M は横断方向 Z 型の d 次元葉層付き空間（foliated space）という．

(i) 各 α に対して，U_α から $\mathbb{R}^d$ の開集合 $B_{\alpha,1}$ と Z の開集合 $B_{\alpha,2}$ との直積への同相写像 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to B_{\alpha,1} \times B_{\alpha,2}$ が存在する．

(ii) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき，座標変換は次のような形で与えられる：

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \ni (y_\alpha, z_\alpha) \mapsto (y_\beta(y_\alpha, z_\alpha), z_\beta(z_\alpha)) \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

ここで，y_β は C_L^∞ 級であり，z_β は連続である．$\varphi_\alpha^{-1}(B_{\alpha,1} \times \{z\})$ の形をした集合は plaque と呼ばれ，plaque を繋いで得られる M の部分集合は葉（leaf）と呼ばれる．各 leaf には plaque を座標近傍とするような滑らかな多様体の構造が入り，M はいくつもの leaf によって分割されていることがわかる．

本講演では M はコンパクトであると仮定する．$C(M)$ を M 上の連続関数全体とし，$1 \le k \le \infty$ に対して，$C_L^k(M)$ を各座標近傍上で C_L^k 級であるような M 上の関数全体とする．また，$g = g_{ij}(y, z) dy^i \otimes dy^j$ と $b = b^i(y, z) \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ をそれぞれ座標近傍上で C_L^∞ 級の表示をもつ M 上の Riemann 計量とベクトル場とし，g によって定まる leafwise Laplace-Beltrami 作用素 Δ_g を用いて $C_L^2(M)$ から $C(M)$ へ定義される線形作用素 $A = (1/2)\Delta_g + b$ を考える．

注意 1. 各座標近傍上で C_L^∞ 級の係数をもち，leaf ごとに 0 次の項をもたない 2 階の楕円型偏微分作用素となっているような $C_L^2(M)$ 上の線形作用素は，適当な Riemann 計量 g とベクトル場 b を用いて A のように表現される．

$\pi : O(M) \to M$ を計量 g の入った M の正規直交標構束とすると，$O(M)$ もまたコンパクトな foliated space となる．b の $O(M)$ への水平リフト $\widetilde{H}_0$ と標準水平ベクトル場 $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_d$ から定まる $O(M)$ 上の確率微分方程式

$$dR(t) = \widetilde{H}_\alpha(R(t)) \circ dB^\alpha(t) + \widetilde{H}_0(R(t))\, dt \tag{1}$$

を考える．(1) の解、およびそれを M へ射影して得られる確率過程に関して，次のことを示すことができる．

---

*k-suzaki@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

定理 1. (i) foliated space $O(M)$ 上の確率微分方程式 (1) は，一意的な強い解をもつ．とくに各 $r \in O(M)$ に対して，d-次元 Wiener 空間 (W_0^d, P^W) 上で定義された r を出発点とする (1) の解 $R(r) = \{R(t,r)\}_{t\geq 0}$ が存在する．

(ii) $\{R(r)\}_{r\in O(M)}$ は出発点に関する確率連続性をもつ．すなわち，すべての $r_0 \in O(M)$ に対して

$$R(r) \to R(r_0) \quad \text{in probability} \quad (r \to r_0)$$

が成り立つ．

(iii) $\pi(R(r))$ の分布は $x = \pi(r)$ のみに依存する．$X(t,x) = \pi(R(t,r))$ とおけば，$X(x) = \{X(t,x)\}_{t\geq 0}$ はパスが x を通る leaf に含まれる M-値拡散過程である．

(iv) $f \in C(M)$ に対して $(T(t)f)(x) = E\left[f(X(t,x))\right]$ とする．このとき，$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ は A の閉拡大を生成作用素とする $C(M)$ 上の Feller 半群である．

注意 2. foliated space は多様体の構造をもつとは限らないため，出発点に関する連続性（とくに leaf を横断する方向）や微分可能性はただちにはわからない．しかし，定理 1 (ii) の確率連続性によって，定理 1 (iv) の Feller 性が導かれる．

Feller 性と M のコンパクト性から $X = \{X(t,x)\}_{t\geq 0, x\in M}$ の拡散不変測度が存在し，それらは A-調和測度と呼ばれる．

注意 3. 調和測度は Garnett[2] によってコンパクトな foliated Riemannian manifold 上の leafwise Brownian motion の場合に導入された．その中の Feller 性の証明中にあった難点を克服し一般化を行ったのが Candel であって，[1] において発展方程式の一般論と Hille-Yosida の定理を用いて，A の閉拡大を生成作用素とするような Feller 半群とそれによって定まる各パスが 1 つの leaf に含まれるような M 上の拡散過程（A-leafwise diffusion）を構成している．これらの先行研究と比較して，定理 1 は foliated space 上の確率微分方程式の強い解の存在を示すことで A-leafwise diffusion が構成できることを述べており，本構成は極限定理への応用を容易にする．

A-調和確率測度を用いたエルゴード定理，およびマルチンゲールに関する基本的な事実から以下の A-leafwise diffusion に関する極限定理が得られる．

定理 2. 次の (i), (ii), (iii) をみたす M の Borel 集合 Q が存在する．

(i) 任意の A-調和確率測度 m に対して $m(Q) = 1$ となる．

(ii) $x \in Q$ に対し，A-調和確率測度 m_x が存在して，どんな $f \in C(M)$ に対しても

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(X(s,x))\,ds \to \int_M f\,dm_x \quad P^W\text{-a.s.} \quad (T \to \infty)$$

が成り立つ．

(iii) M 上の関数 f は，$h \in C_L^2(M)$ を用いて $f = Ah$ と表されているとする．このとき，任意の $x \in Q$ に対し

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\lambda(\cdot)} f(X(s,x))\,ds \to W_{\langle f \rangle (x)}(\cdot) \quad \text{in law} \quad (\lambda \to \infty)$$

が成り立つ．ここで $W_{\langle f \rangle (x)} = \left\{ W_{\langle f \rangle (x)}(t) \right\}_{t \geq 0}$ は各時刻 t で平均 0，分散

$$\left(\int_M \|\mathrm{grad}_L h\|^2 \, dm_x \right) \cdot t$$

をもつ 1 次元 Brown 運動であり，$\|\mathrm{grad}_L h\|$ は leaf ごとに計量 g によって定まる h の勾配の長さを対応させることで得られる関数である．

注意 4. もし A-調和確率測度が一意的に存在するならば，定理 2 (iii) における極限分散は出発点によらないことがわかる．さらにこのとき，“$x \in Q$” という条件は “$x \in M$” という条件に置き換えることができる．これらの定理の証明の詳細は，[4] の中で与えられている．

注意 5. M が位相力学系から定まる写像トーラスで X が自然な計量から誘導される leafwise Brownian motion である場合に，[3] は 1 次元 Brown 運動の性質を用いて初等的な方法で調和測度の構造を明らかにし，その後定理 2 に対応する結果を導いている．さらに，もし $f \in C(M)$ が調和確率測度 m に対して $\int_M f\,dm = 0$ であったとしても，$f \in A(C_L^2(M))$ とはならない M と X の例を挙げている．

参考文献

[1] A. Candel, *The harmonic measures of Lucy Garnett*, Adv. Math. **176** (2003) 187–247

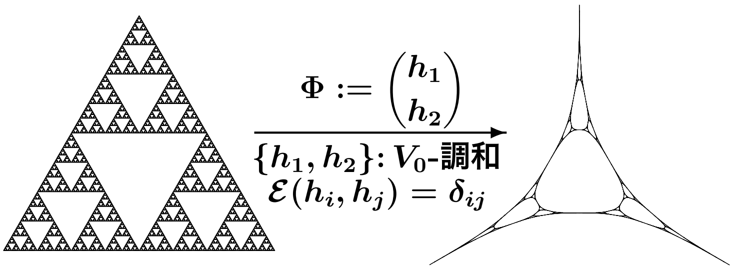
[2] L. Garnett, *Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion*, J. Funct. Anal. **51** (1983) 285–311

[3] T. Morita and K. Suzaki, *Central limit theorem for leafwise Brownian motions on mapping tori*, submitted

[4] K. Suzaki, *An SDE approach to leafwise diffusions on foliated spaces and its applications*, submitted

Sierpiński gasket 上の測度論的 Riemann 構造に対する Laplacian の Weyl 型固有値漸近挙動

梶野　直孝　(神戸大学)　http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/nkajino/



1. Introduction

本講演では，[3, 1] で考察された Sierpiński gasket 上の測度論的「Riemann 構造」に関して，対応する Laplacian の固有値の Weyl 型漸近挙動について得られた結果を報告する．より詳しい説明や関連する結果については概説論文 [2] とその参考文献を参照のこと．

K を $V_0 = \{q_1, q_2, q_3\} \subset \mathbb{R}^2$ を 3 頂点とする Sierpiński gasket[1]（上図左）とする．木上 [3] は，K の $\mathbb{R}^2$ への「調和な埋め込み」$\Phi : K \to \mathbb{R}^2$ を通して K を $\mathbb{R}^2$ の「部分多様体」とみなすことにより，K 上に一種の「Riemann 構造」が定まり，さらに対応する熱核 $p_t^{\mathcal{H}}(x, y)$ が Riemann 多様体の場合に類似の Gauss 型評価を満たすことを示した．埋め込みの像 $\Phi(K) =: K_{\mathcal{H}}$ はこの「Riemann 構造」の幾何学的実現であり，調和 Sierpiński gasket（上図右）と呼ばれる．これを受けて筆者は [1] において，Varadhan 型漸近挙動

$$\lim_{t\downarrow 0} 4t \log p_t^{\mathcal{H}}(x, y) = -\rho_{\mathcal{H}}(x, y)^2, \qquad x, y \in K \tag{1.1}$$

を初めとする，熱核 $p_t^{\mathcal{H}}(x, y)$ のより詳細な漸近挙動を示した．ここで $\rho_{\mathcal{H}}$ は $K_{\mathcal{H}}$ 内での最短測地線の長さにより定まる K 上の自然な測地距離であり，調和測地距離と呼ばれる．

本講演ではこの「Riemann 構造」に対応する Laplacian の Weyl 型固有値漸近挙動について述べる．以下に見るように，そこには空間のフラクタル的特異性が反映される．

2. Sierpiński gasket 上の測度論的 Riemann 構造

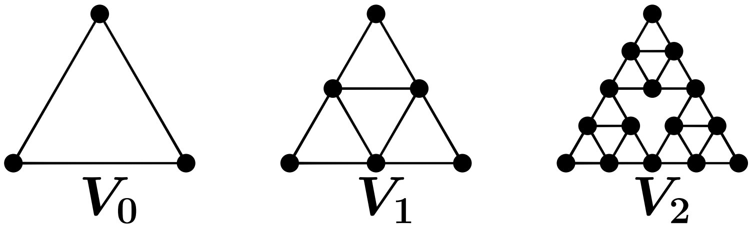
$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を Sierpiński gasket K 上の標準 Dirichlet 形式とする．これは Riemann 多様体における Dirichlet 積分 $\int |\nabla u|^2 d\mathrm{vol}$ に相当する．次頁の図のように K の近似グラフ $(V_m, \overset{m}{\sim})$ を考え，V_m 上の 2 次形式 $\mathcal{E}_m$ を $\mathcal{E}_m(u, u) := (5/3)^m \sum_{x,y\in V_m,\, x\overset{m}{\sim}y}(u(x) - u(y))^2$ で定めると，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $\mathcal{F} := \{u \in C(K) \mid \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(u, u) < \infty\}$, $\mathcal{E}(u, v) := \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(u, v)$, $u, v \in \mathcal{F}$, により定義される．ここで scaling factor $(5/3)^m$ があることにより，$u \in C(K)$ に対し $\mathcal{E}_m(u, u)$ は非減少となり $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(u, u) \in [0, \infty]$ が定まることを注意しておく．

V_0-調和[2] な $h \in \mathcal{F}$ の全体を $\mathcal{H}_0$ とし，$\mathcal{E}$ が $\mathcal{H}_0/\mathbb{R}\mathbf{1}$ の内積を定めることに注意して，$\mathcal{E}(h_i, h_j) = \delta_{ij}$ となる $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_0$ を取る．上述の「調和な埋め込み」$\Phi : K \to \mathbb{R}^2$ は $\Phi(x) := (h_1(x), h_2(x))$ で定義される．実際，Φ が単射で，従って像 $\Phi(K) = K_{\mathcal{H}}$ への同相写像であることが h_1, h_2 の値の直接計算によって示される．さらに「Φ のエネルギー

本研究は German Research Council (DFG) SFB 701 の助成を受けたものである．

[1] すなわち，q_1, q_2, q_3 を $\mathbb{R}^2$ 内の正 3 角形の 3 頂点，$i = 1, 2, 3$ に対し $F_i(x) := (x + q_i)/2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とするとき，$K = \bigcup_{i=1}^{3} F_i(K)$ を満たす唯 1 つの空でない $\mathbb{R}^2$ の compact 部分集合 K

[2] $h \in \mathcal{F}$ が V_0-調和とは，$u|_{V_0} = 0$ を満たす任意の $u \in \mathcal{F}$ に対し $\mathcal{E}(h, u) = 0$ となることを言う．V_0-調和関数の全体 $\mathcal{H}_0$ は線型空間をなし，$\mathcal{H}_0 \ni h \mapsto h|_{V_0} \in \mathbb{R}^{V_0}$ は線型同型である．また $\mathbf{1} \in \mathcal{H}_0$ である．



測度」として K 上の測度 μ が $\mu := \mu_{\langle h_1 \rangle} + \mu_{\langle h_2 \rangle}$ により定まる．ここで $u \in \mathcal{F}$ に対し $\mu_{\langle u \rangle}$ は u のエネルギー測度と呼ばれる，Riemann 多様体における $|\nabla u|^2 d\mathrm{vol}$ に相当する測度であり，$\int_K f d\mu_{\langle u \rangle} = \mathcal{E}(fu, u) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(f, u^2)$, ${}^\forall f \in \mathcal{F}$ を満たす唯1つの K 上の非負 Borel 測度として定義される．測度 μ を用いると，μ-a.e. $x \in K$ に対し $\mathbb{R}^2$ の1次元部分空間 $T_x^\Phi K$ が「$\Phi(x)$ における $K_\mathcal{H}$ の接線」として定まることがわかり，これにより K に計量付きの1次元接空間の構造（「Riemann 構造」）が入る．さらに $u \in \mathcal{F}$ とすると μ-a.e. $x \in K$ に対し「勾配ベクトル」$\widetilde{\nabla} u(x) \in T_x^\Phi K$ が定まり，かつ $\mathcal{E}(u, v) = \int_K \langle \widetilde{\nabla} u, \widetilde{\nabla} v \rangle_{\mathbb{R}^2} d\mu$, ${}^\forall u, v \in \mathcal{F}$ であることが示される．この「Riemann 構造」を K 上の測度論的 Riemann 構造と呼ぶ．μ はこの測度論的 Riemann 構造の下での「Riemann 体積測度」とみなすことができ，また自然な「測地距離」として $\rho_\mathcal{H} : K \times K \to [0, \infty)$ が次で定義される：

$$\rho_\mathcal{H}(x, y) := \min\{\mathrm{length}_{\mathbb{R}^2}(\Phi \circ \gamma) \mid \gamma : [0,1] \to K,\ \gamma \text{ は連続},\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\}. \tag{2.1}$$

さらに $L^2(K, \mu)$ の内積を経由して $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から $L^2(K, \mu)$ 上の非正自己共役作用素として Laplacian Δ_μ が定まり，Δ_μ に対応する熱方程式の基本解として熱核 $p_t^\mathcal{H}(x, y)$ が定まる．

3. 主結果

d を調和測地距離 $\rho_\mathcal{H}$ に関する K の Hausdorff 次元，$\mathcal{H}^d_{\rho_\mathcal{H}}$ を $\rho_\mathcal{H}$ に関する K 上の d 次元 Hausdorff 測度とする．$d \in (1, 2)$ である．K の空でない開集合 U に対し，Laplacian $-\Delta_\mu$ の U 上での Dirichlet 固有値の全体を $\{\lambda_n^U\}_{n \in \mathbb{N}}$（各固有値は重複度分繰り返す）とし，$\lambda \in \mathbb{R}$ に対し $\mathcal{N}_U(\lambda) := \#\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n^U \le \lambda\}$ とする．次が本講演の主定理である．

定理 3.1 (K.). 定数 $c_\mathcal{N} \in (0, \infty)$ が存在して，$\mathcal{H}^d_{\rho_\mathcal{H}}(\partial_K U) = 0$ なる任意の K の空でない開集合 U に対し

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\mathcal{N}_U(\lambda)}{\lambda^{d/2}} = c_\mathcal{N} \mathcal{H}^d_{\rho_\mathcal{H}}(U) \in (0, \infty). \tag{3.1}$$

(3.1) では Riemann 多様体の場合と異なり，$\mathcal{N}_U$ の漸近挙動に「Riemann 体積測度」μ ではなく，$\rho_\mathcal{H}$ に関する Hausdorff 測度 $\mathcal{H}^d_{\rho_\mathcal{H}}$ が現れている．そこで μ と $\mathcal{H}^d_{\rho_\mathcal{H}}$ の関係が問題になるが，これについて次が成り立つ．$B_r(x, \rho_\mathcal{H}) := \{y \in K \mid \rho_\mathcal{H}(x, y) < r\}$ とおく．

定理 3.2 (K.). 定数 $d^{\mathrm{loc}} \in (1, d)$ が存在して，$\lim_{r \downarrow 0} \bigl(\log \mu(B_r(x, \rho_\mathcal{H}))\bigr) / \log r = d^{\mathrm{loc}}$ が μ-a.e. $x \in K$ に対し成立する．（$\boldsymbol{d^{\mathrm{loc}} < d}$ に注意.）

$\{x \in K \mid \lim_{r \downarrow 0} \bigl(\log \mu(B_r(x, \rho_\mathcal{H}))\bigr) / \log r = d^{\mathrm{loc}}\}$ の $\rho_\mathcal{H}$ に関する Hausdorff 次元は d^{loc} であるので，$d^{\mathrm{loc}} < d$ と合わせて次の系を得る．

系 3.3 (K.). μ と $\mathcal{H}^d_{\rho_\mathcal{H}}$ は互いに特異である．

参考文献

[1] N. Kajino, *Potential Anal.* **36** (2012), 67–115.
[2] N. Kajino, *Contemp. Math.*, vol. 600, 2013, pp. 91–133 (拙 web サイトでご覧になれます).
[3] J. Kigami, *Math. Ann.* **340** (2008), 781–804.

Asymptotic error distributions of the Crank-Nicholson scheme for SDEs driven by fractional Brownian motion

永沼 伸顕 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

1 はじめに

本講演では，非整数 Brown 運動により駆動される確率微分方程式の解を Crank-Nicholson 近似により近似した場合の近似誤差に関する結果を報告する．この結果は [1] で与えられた予想を肯定的に解決するものである．

まずは非整数 Brown 運動の定義を与える．

定義 1. 実数値確率過程 $B=\{B_t\}_{0\le t\le 1}$ が Hurst 定数 $0<H<1$ をもつ非整数 Brown 運動であるとは，B は連続な Gauss 過程であって，平均が 0，分散が

$$\boldsymbol{E}[B_sB_t]=\frac{1}{2}\left(s^{2H}+t^{2H}-|s-t|^{2H}\right)$$

となるものをいう．

この定義から，$\boldsymbol{E}[|B_t-B_s|^2]=|t-s|^{2H}$，および，パスの H 未満の Hölder 連続性が分かる．さらに，$H\neq 1/2$ のときには，非整数 Brown 運動がセミマルチンゲールにならないことも分かる．これらの事実から，非整数 Brown 運動による確率積分は伊藤積分としては定義できず，通常の確率解析の議論を適用することができない．このような確率微分方程式を駆動過程の Gauss 性を用いて解析することが，本問題の骨子となる．

2 設定および結果

本講演では，

$$\begin{cases} dX_t=\sigma(X_t)\,d^\circ B_t, \quad t\in(0,1], \\ X_0=x_0, \end{cases} \tag{1}$$

なる確率微分方程式を考える．ここで，σ は実数値関数，$x_0\in\mathbf{R}$，$d^\circ B$ は Russo-Vallois の意味での対称積分を表わす．つぎに，Crank-Nicholson 近似 $\{X^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ を

$$\begin{cases} X_0^{(m)}=x_0, \\ X_t^{(m)}=X_{\eta^{(m)}(t)}^{(m)}+\dfrac{1}{2}\left(\sigma\left(X_t^{(m)}\right)+\sigma\left(X_{\eta^{(m)}(t)}^{(m)}\right)\right)\left(B_t-B_{\eta^{(m)}(t)}\right), \quad t\in(0,1], \end{cases} \tag{2}$$

で定義する．ただし，$\eta^{(m)}(t)=\sup\{l2^{-m}:0\le l2^{-m}<t\}$ である．こうして定められた $X^{(m)}$ は連続な確率過程であることに注意する．

このときに，以下の定理が得られる．

仮定 2. (A1) $\sigma\in C_{\mathrm{bdd}}^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})$，(A2) $\inf|\sigma|>0$.

定理 3. 仮定 2 の下で，$1/3<H<1/2$ ならば

$$\lim_{m\to\infty}\left(B,2^{m(3H-1/2)}(X^{(m)}-X)\right)=\left(B,c_{3,H}\sigma(X_\cdot)\int_0^\cdot\frac{1}{24}(\sigma^2)''(X_s)\,dW_s\right)$$

が一様位相における弱収束の意味で成り立つ．ここで，$c_{3,H}$ は H に依存する定数，W は B とは独立な通常の Brown 運動，dW は通常の伊藤積分を表わす．

3 証明

定理 3 の証明の概略を述べる．

まず，[2] に従い，方程式 (1) の解，Crank-Nicholson 近似 (2) の表現を述べる．方程式 (1) の解 X は，$X_t = \phi(x_0, B_t)$ と表される．ただし，ϕ は，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) = \sigma(\phi(x,y)), \quad y \in \mathbf{R}, \\ \phi(x,0) = x, \end{cases}$$

の解である．そして，仮定 2 の (A2) の下で，Crank-Nicholson 近似 $X^{(m)}$ は，$X_t^{(m)} = \phi(x_0, B_t + U_t^{(m)})$ と表される．ここで，$U^{(m)}$ は

$$U_t^{(m)} = \sum_{j=0}^{\lfloor 2^m t\rfloor - 1} \left\{ f_3(X_{j2^{-m}}^{(m)})(\triangle B_{j2^{-m}})^3 + f_4(X_{j2^{-m}}^{(m)}))(\triangle B_{j2^{-m}})^4 + R(X_{j2^{-m}}^{(m)}), \triangle B_{j2^{-m}}) \right\}$$

で定義される確率過程である．ただし，$\lfloor \xi \rfloor$ は $\xi > 0$ の整数部分，$f_3 = (\sigma^2)''/24$，$f_4 = \sigma(\sigma^2)'''/48$，$\triangle B_{j2^{-m}} = B_{(j+1)2^{-m}} - B_{j2^{-m}}$，$R$ は $|R(\xi,h)| \le M|h|^5$ を満たす関数である．[1] は，これらの表現を用いて，定理 3 の限定的な場合を示している．

つぎに，$U^{(m)}$ の漸近挙動を見る．そのために，weighted Hermite variation とよばれる Wiener 汎関数の解析を行う．この weighted Hermite variation は

$$G_q^{(m)}(t) = 2^{-m/2} \sum_{j=0}^{\lfloor 2^m t\rfloor - 1} \frac{f(B_{(j+1)2^{-m}}) + f(B_{j2^{-m}})}{2} H_q(2^{mH} \triangle B_{j2^{-m}})$$

として定義される．ただし，f は実数値関数，H_q は q 次の Hermite 多項式である．この Wiener 汎関数に対して，Nualart-Peccati による fourth moment theorem を用いることで次が得られる．

定理 4. 自然数 q は 2 以上，関数 f は滑らかで導関数は多項式増大を持つとする．このとき，$1/2q < H < 1 - 1/2q$ であれば，

$$\lim_{m\to\infty} \left(B, G_q^{(m)}\right) = \left(B, c_{q,H} \int_0^{\cdot} f(B_s)\, dW_s\right)$$

が Skorohod 位相における弱収束の意味で成り立つ．ここで，$c_{q,H}$ は q と H によって決まる正定数，W は B とは独立な通常の Brown 運動である．

最後に，$U^{(m)}$ を $G_3^{(m)}$ を用いて表現し，定理 4 を用いて定理 3 を導く．定理 3 で現れる正定数 $c_{3,H}$ および Brown 運動 W は定理 4 で与えられるものである．

参考文献

[1] Neuenkirch, A., Nourdin, I.: Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion. J. Theoret. Probab. **20**(4), 871–899 (2007)

[2] Nourdin, I.: A simple theory for the study of SDEs driven by a fractional Brownian motion, in dimension one. In: Séminaire de probabilités XLI, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1934, pp. 181–197. Springer, Berlin (2008)

Rank-based diffusions with skew-elastic collisions

TOMOYUKI ICHIBA [1]

Let us fix an integer $n \geq 2$ and examine an n-dimensional diffusion $(X_1(\cdot), \ldots, X_n(\cdot))$ where each of its component particles behaves locally like Brownian motion and the local characteristics of these random motions are assigned by rank. In the interest of concreteness and simplicity we shall look at the system of particles competing each other and colliding elastically.

When $n = 2$ the system is a planar diffusion $(X_1(\cdot), X_2(\cdot))$ where the leader has drift $-h \leq 0$ and dispersion $\rho \geq 0$, whereas the laggard has drift $g \geq 0$ and dispersion $\sigma \geq 0$ with $\lambda := g + h > 0$, $\rho^2 + \sigma^2 = 1$. To be more precise, we shall construct and examine a probability space $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ endowed with a filtration $\mathbf{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{0 \leq t < \infty}$ that satisfies the "usual conditions" of right continuity and of augmentation by $\mathbb{P}-$negligible sets, and on it two pairs $(B_1(\cdot), B_2(\cdot))$ and $(X_1(\cdot), X_2(\cdot))$ of continuous, $\mathbf{F}-$adapted processes, such that $(B_1(\cdot), B_2(\cdot))$ is planar Brownian motion and $(X_1(\cdot), X_2(\cdot))$ is a continuous planar semimartingale that starts at some given site $(X_1(0), X_2(0)) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on the plane and satisfies the dynamics

$$\mathrm{d}X_1(t) = \Big(g\, \mathbf{1}_{\{X_1(t) \leq X_2(t)\}} - h\, \mathbf{1}_{\{X_1(t) > X_2(t)\}} \Big) \mathrm{d}t + \Big(\rho\, \mathbf{1}_{\{X_1(t) > X_2(t)\}} + \sigma\, \mathbf{1}_{\{X_1(t) \leq X_2(t)\}} \Big) \mathrm{d}B_1(t)$$

$$+ \frac{1 - \zeta_1}{2} \mathrm{d}L^{X_1 - X_2}(t) + \frac{1 - \eta_1}{2} \mathrm{d}L^{X_2 - X_1}(t) \,, \tag{1}$$

$$\mathrm{d}X_2(t) = \Big(g\, \mathbf{1}_{\{X_1(t) > X_2(t)\}} - h\, \mathbf{1}_{\{X_1(t) \leq X_2(t)\}} \Big) \mathrm{d}t + \Big(\rho\, \mathbf{1}_{\{X_1(t) \leq X_2(t)\}} + \sigma\, \mathbf{1}_{\{X_1(t) > X_2(t)\}} \Big) \mathrm{d}B_2(t)$$

$$+ \frac{1 - \zeta_2}{2} \mathrm{d}L^{X_1 - X_2}(t) + \frac{1 - \eta_2}{2} \mathrm{d}L^{X_2 - X_1}(t) \,. \tag{2}$$

Here and in the sequel we denote by $L^X(\cdot) \equiv L^X(\cdot\,; 0)$ the right-continuous local time accumulated at the origin by a generic continuous semimartingale $X(\cdot)$, by $L^X_-(\cdot) \equiv L^{-X}(\cdot\,; 0)$ its left-continuous version, and by $\widehat{L}^X(\cdot) = (L^X(\cdot) + L^X_-(\cdot))/2$ its symmetric version. In (1)-(2) with the notation $\zeta := 1 + (\zeta_1 - \zeta_2)/2$, $\eta := 1 - (\eta_1 - \eta_2)/2$, $\nu := g - h$, $y := x_1 - x_2$, $z := x_1 + x_2$, $r_1 := x_1 \vee x_2$, $r_2 := x_1 \wedge x_2$, we assume $\zeta + \eta \neq 0$, $0 \leq \alpha := \eta / (\zeta + \eta) \leq 1$.

Theorem 1 (FERNHOLZ ET AL. (2013a)). *The system of stochastic differential equations (1)-(2) is well-posed, that is, has a weak solution which is unique in the sense of the probability distribution.*

The difference and the sum of the two component process $Y(\cdot) := X_1(\cdot) - X_2(\cdot)$, $Z(\cdot) := X_1(\cdot) + X_2(\cdot)$ satisfy

$$Y(\cdot) = y - \lambda \int_0^{\cdot} \mathrm{sgn}\big(Y(t)\big)\, \mathrm{d}t + (1 - \zeta)\, L^Y(\cdot) - (1 - \eta)\, L^Y_-(\cdot) + W(\cdot)$$

$$Z(t) = z + \nu\, t + V(t) + \big(1 - \overline{\zeta}\,\big)\, L^Y(t) + \big(1 - \overline{\eta}\,\big)\, L^Y_-(t) \,, \qquad 0 \leq t < \infty \,,$$

[1] Department of Statistics and Applied Probability, South Hall, University of California, Santa Barbara, CA 93106 (E-mail: *ichiba@pstat.ucsb.edu*).

where $\overline{\zeta} := (\zeta_1 + \zeta_2)/2$, $\overline{\eta} := (\eta_1 + \eta_2)/2$ and $V(\cdot)$, $W(\cdot)$ are standard Brownian motions defined by $W(\cdot) := \rho W_1(\cdot) + \sigma W_2(\cdot)$ and $V(\cdot) := \rho V_1(\cdot) + \sigma V_2(\cdot)$ with

$$
\begin{aligned}
W_1(\cdot) &:= \int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\{Y(t)>0\}}\,\mathrm{d}B_1(t) - \int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\{Y(t)\le 0\}}\,\mathrm{d}B_2(t)\,, \\
W_2(\cdot) &:= \int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\{Y(t)\le 0\}}\,\mathrm{d}B_1(t) - \int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\{Y(t)>0\}}\,\mathrm{d}B_2(t)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
V_1(\cdot) &:= \int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\{Y(t)>0\}}\,\mathrm{d}B_1(t) + \int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\{Y(t)\le 0\}}\,\mathrm{d}B_2(t)\,, \\
V_2(\cdot) &:= \int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\{Y(t)\le 0\}}\,\mathrm{d}B_1(t) + \int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\{Y(t)>0\}}\,\mathrm{d}B_2(t)\,.
\end{aligned}
$$

Here we may construct the other Brownian motions $Q(\cdot)$ and $W^\flat(\cdot)$, $V^\flat(\cdot)$, $U^\flat(\cdot)$ as $Q(\cdot) := \sigma\, V_1(\cdot) + \rho\, V_2(\cdot)$, $W^\flat(\cdot) := \rho\, W_1(\cdot) - \sigma\, W_2(\cdot)$, $V^\flat(\cdot) := \rho\, V_1(\cdot) - \sigma\, V_2(\cdot)$, $U^\flat(\cdot) := \sigma\, W_1(\cdot) - \rho\, W_2(\cdot)$; we note the independence of $Q(\cdot)$ and $W(\cdot)$, the independence of $Q(\cdot)$ and $V^\flat(\cdot)$, and observe the intertwinements among these Brownian motions

$$
V_j(\cdot) = (-1)^{j+1} \int_0^{\cdot} \mathrm{sgn}\big(Y(t)\big)\mathrm{d}W_j(t) \quad (j = 1, 2)\,, \qquad V^\flat(\cdot) = \int_0^{\cdot} \mathrm{sgn}\big(Y(t)\big)\mathrm{d}W(t)
$$

and

$$
V(\cdot) = \int_0^{\cdot} \mathrm{sgn}\big(Y(t)\big)\mathrm{d}W^\flat(t)\,, \qquad Q(\cdot) = \int_0^{\cdot} \mathrm{sgn}\big(Y(t)\big)\mathrm{d}U^\flat(t)\,.
$$

The ranked versions (the leader and laggard, respectively) $R_1(\cdot) := X_1(\cdot) \vee X_2(\cdot)$ and $R_2(\cdot) =: X_1(\cdot) \wedge X_2(\cdot)$ of components satisfy

$$
\begin{aligned}
R_1(t) &= r_1 - h\,t + \rho\, V_1(t) + \big(1 - (\beta/2)\big)\, L^{R_1 - R_2}(t)\,, \\
R_2(t) &= r_2 + g\,t + \sigma\, V_2(t) - (\beta/2)\, L^{R_1 - R_2}(t)\,,
\end{aligned}
$$

for $0 \le t < \infty$, where $\beta := (\eta\overline{\zeta} + \zeta\overline{\eta})\,/\,(\eta + \zeta)$.

Let us denote the filtrations $\mathfrak{F}^X(t) := \boldsymbol{\sigma}(X(s), 0 \le s \le t)$, $0 \le t < \infty$ generated by the generic semimartingale $X(\cdot)$. In the degenerate case $\sigma = 0$ and $\rho = 1$, we have the relations

$$
\mathfrak{F}^{(R_1,R_2)}(t) = \mathfrak{F}^{V}(t) = \mathfrak{F}^{|X_1 - X_2|}(t) \subsetneqq \mathfrak{F}^{X_1 - X_2}(t) = \mathfrak{F}^{W}(t) = \mathfrak{F}^{(X_1,X_2)}(t)
$$

for every $0 < t < \infty$, where the inclusion is strict. In the special case $\beta = 1$ we have in addition $\boldsymbol{\sigma}(V(t)) = \boldsymbol{\sigma}(X_1(t) + X_2(t))$, thus also $\mathfrak{F}^{V}(t) = \mathfrak{F}^{X_1 + X_2}(t)$, for every $0 \le t < \infty$. In the non-degenerate case $\rho\,\sigma > 0$, we have for every $0 < t < \infty$ the filtration relations

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}^{(V_1,V_2)}(t) &= \mathfrak{F}^{(R_1,R_2)}(t) = \mathfrak{F}^{(|Y|,V)}(t) = \mathfrak{F}^{(|Y|,Q)}(t) \\
&\subsetneqq \mathfrak{F}^{(Y,Q)}(t) = \mathfrak{F}^{(Y,V)}(t) = \mathfrak{F}^{(W_1,W_2)}(t) = \mathfrak{F}^{(X_1,X_2)}(t)\,,
\end{aligned}
$$

where the inclusion is strict. With these considerations we obtain the following.

Theorem 2 (FERNHOLZ ET AL. (2013a)). *The system of stochastic differential equations (1)-(2) admits a pathwise unique, strong solution. In particular, the filtration identity* $\mathfrak{F}^{(B_1,B_2)}(t) = \mathfrak{F}^{(X_1,X_2)}(t)$ *holds for* $t \geq 0$.

• Following the analysis of FERNHOLZ ET AL. (2013b) one can show that each of $B_1(\cdot)$ and $B_2(\cdot)$ is complementable by the other one in $\mathfrak{F}^{(W_1,W_2)}(\cdot)$, and so also maximal in the sense of BROSSARD & LEURIDAN (2008). Similarly, the pairs of $W(\cdot)$ and $U^\flat(\cdot)$, $U(\cdot)$ and $W^\flat$ are complement each other in $\mathfrak{F}^{(W_1,W_2)}(\cdot)$. $V_1(\cdot)$ is complementable by $W_2(\cdot)$ and $V_2(\cdot)$ is complemantable by $W_1(\cdot)$, however, $V_1(\cdot)$ is not complemented by $V_2(\cdot)$ in $\mathfrak{F}^{(W_1,W_2)}(\cdot)$.

• In the case $n = 2$ we may compute explicitly the transition probability and time-reversal of the planar diffusions for (1)-(2) from the properties of skew Brownian motion with bang-bang drifts.

When $n \geq 3$ the study of multidimensional stochastic differential equations that involve local time supported on a smooth hyper surface starts with the work of ANULOVA (1978), PORTENKO (1979) and TOMISAKI (1980), followed by OSHIMA (1982), TAKANOBU (1987), SZNITMAN & VARADHAN (1986) and others. The recent work of KARATZAS ET AL. (2012) studies systems of the form

$$\mathrm{d}X_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i(t)=X_{(k)}(t)\}} \Big(\delta_k \mathrm{d}t + \sigma_k \mathrm{d}B_i(t) + \zeta_k \mathrm{d}L^{X_{(k)}-X_{(k+1)}}(t) + \eta_k \mathrm{d}L^{X_{(k-1)}-X_{(k)}}(t) \Big)$$

where $(X_{(1)}(\cdot), \ldots, X_{(n)}(\cdot))$ are the reverse order statistics, i.e., $X_{(1)}(\cdot) \geq \cdots \geq X_{(n)}(\cdot)$, and δ_k, σ_k, ζ_k, η_k are some constants that satisfy $\zeta_k + \eta_{k+1} = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, n$ for $0 \leq t < \infty$. In this talk we shall discuss some results on the diffusions of this type.

References

S.V. ANULOVA. (1978) Diffusion processes with singular characteristics. In: Stochastic Differential Systems, Filtering and Control: Proceedings of an I.F.I.P.-W.G. Conference, Vilnius.

J. BROSSARD, C. LEURIDAN. (2008) Transofrmaitons browniennes et compléments indépendants: résultats et problèmes ouverts. In: Séminaire de Probabilités XLI, Lecture Notes in Math, **1934** 265-278.

E.R. FERNHOLZ, T. ICHIBA, I. KARATZAS. (2013a) Two Brownian particles with rank-based characteristics and skew-elastic collisions. *Stochastic Process. Appl.* **123** 2999-3026.

E.R. FERNHOLZ, T. ICHIBA, I. KARATZAS, V. PROKAJ. (2013b) A planar diffusion with rank-based characteristics, and perturbed Tanaka equations. *Probab. Theory Related Fields* **156** 343-374.

I. KARATZAS, S. PAL, M. SHKOLNIKOV. (2012) Systems of Brownian particles with asymmetric collisions. Available at the site http://arxiv.org/abs/1210.0259.

Y. OSHIMA. (1982) Some singular diffusion processes and their associated stochastic differential equations. *Z. Wahrschinlichkeitstheor. Verwandte Geb.* **59** 249-276.

N.I. PORTENKO. (1979) Diffusion processes with generalized drift coefficients. *Theory Probab. Appl.* **24** 62-78.

A.S. SZNITMAN, S.R.S. VARADHAN. (1986) A multidimensional process involving local time. *Probab. Theory Related Fields* **71** 553-579.

S. TAKANOBU. (1987) On the existence of solutions of stochastic differential equations with singular drifts. *Probab. Theory Related Fields* **74** 295-315.

M. TOMISAKI. (1980) A construction of diffusion processes with singular product measures. *Z. Wahrschein-lichkeitstheor. Verwandte Geb.* **53** 51-70.

On the range of random walk on graphs satisfying a uniform condition

岡村和樹 （東大数理）

Let (X, μ) be an weighted graph. That is, X is an infinite weighted graph and X is endowed with a weight μ_{xy}, which is a symmetric nonnegative function on $X \times X$ such that $\mu_{xy} > 0$ if and only if x and y are connected. We write $x \sim y$ if x and y are connected by an edge. Let $\mu_x = \sum_{y \in X} \mu_{xy}$, $x \in X$. Let $\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu_x$ for $A \subset X$.

We assume that $\sup_{x \in X} \deg(x) < +\infty$ and $0 < \inf_{x,y \in X, x \sim y} \mu_{xy} \le \sup_{x,y \in X, x \sim y} \mu_{xy} < +\infty$. *Whenever we do not refer to weights, we assume that* $\mu_{xy} = 1$ *for any* $x \sim y$.

Let $\{S_n\}_{n \ge 0}$ be a Markov chain on X whose transition probabilities are given by $P(S_{n+1} = y | S_n = x) = \mu_{xy}/\mu_x$, $n \ge 0$, $x, y \in X$. We write $P = P_x$ if $P(S_0 = x) = 1$. We say that (X, μ) is recurrent (resp. transient) if $(\{S_n\}_{n \ge 0}, \{P_x\}_{x \in X})$ is recurrent (transient). Let the random walk range $R_n = |\{S_0, \dots, S_{n-1}\}|$.

Let $T_A = \inf\{n \ge 0 : S_n \in A\}$ and $T_A^+ = \inf\{n \ge 1 : S_n \in A\}$ for $A \subset X$.

Let $F_1 = \inf_{x \in X} P_x(T_x^+ < +\infty)$ and $F_2 = \sup_{x \in X} P_x(T_x^+ < +\infty)$.

Let d be the graph metric on X. Let $B(x, n) = \{y \in X : d(x, y) < n\}$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Let $V(x, n) = \mu(B(x, n))$. Let $\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in X, x \sim y} (f(x) - f(y))^2 \mu_{xy}$ for $f : X \to \mathbb{R}$. Let us define the effective resistance by $R_{\text{eff}}(A, B)^{-1} = \inf\{\mathcal{E}(f, f) : f|_A = 1, f|_B = 0\}$ for $A, B \subset X$ with $A \cap B = \emptyset$.

Let $\rho(x, n) = R_{\text{eff}}(\{x\}, B(x, n)^c)$, $x \in X, n \in \mathbb{N}$. Let $\rho(x) = \lim_{n \to \infty} \rho(x, n)$. If (X, μ) is recurrent (resp. transient), then, $\rho(x) = +\infty$ (resp. $\rho(x) < +\infty$) for any $x \in X$.

Now we define a uniform condition for weighted graphs.

Definition 0.1 (uniform condition)**.** We say that an weighted graph (X, μ) satisfies (U) if $\rho(x, n)$ converges *uniformly* to $\rho(x)$, $n \to \infty$.

Not only vertex transitive graphs (e.g. $\mathbb{Z}^d$, the M-regular tree T_M, Cayley graphs of groups) but also some non-regular graphs (e.g. graphs which are roughly isometric with $\mathbb{Z}^d$, Sierpiński gasket or carpet) satisfy (U) if all weights are equal to 1.

Now we describe the main results.

Theorem 0.2 ([1]). *Let (X, μ) be an weighted graph satisfying (U). Then, for any $x \in X$ and any $\epsilon > 0$, we have that*

$$\lim_{n \to \infty} P_x(R_n \geq n(1 - F_1 + \epsilon)) = 0, \tag{1}$$

and,

$$\lim_{n \to \infty} P_x(R_n \leq n(1 - F_2 - \epsilon)) = 0. \tag{2}$$

These convergences are uniform with respect to x. The convergence in (1) is exponentially fast.

If (X, μ) satisfies an assumption which is stronger than (U), then, certain strong laws hold for R_n, that is,

$$1 - F_2 \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{R_n}{n} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{R_n}{n} \leq 1 - F_1, \ P_x\text{-a.s.}$$

Theorem 0.3 ([1]). *There exists an infinite weighted graph (X, μ) with a reference point o which satisfies $F_1 < F_2$, (U),*

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{E_o[R_n]}{n} = 1 - F_2, \ \textit{and,} \ \limsup_{n \to \infty} \frac{E_o[R_n]}{n} = 1 - F_1. \tag{3}$$

References

[1] K. Okamura, On the range of random walk on graphs satisfying a uniform condition, preprint, available at arXiv 1308.1487.

Growth exponent for loop-erased random walk in three dimensions

白石大典
京都大学大学院理学研究科数学教室

1 Introduction

Loop-erased random walk（以下 LERW）はランダムウォークのパスから loop を（現れる順に）切り取ることによって得られるランダムなシンプルパスのモデルである。Lawler（[4]）によって提起されて以来、LERW は数学のみならず統計物理の方面からも重要なモデルとして関心を集め、活発に研究がなされてきた。LERW は統計物理に起原を持つ様々なモデルとも深い関わりがある。そのようなモデルの代表例として uniform spanning tree（UST）が挙げられる。ここでグラフ $G = (V, E)$ の部分グラフ T が G の spanning tree であるとは T の頂点集合は V と一致し、かつ T は tree である（cycle を持たない）ことをいう。G の spanning tree 全体を考え、そこから一様な確率で取り出すことによって得られるランダムな spanning tree を uniform spanning tree（UST）という。Pemantle（[10]）は、UST 上においてふたつの頂点 $u, v \in V$ を結ぶ unique path の分布は u から v への LERW の分布と一致することを示した。また Wilson（[13]）は LERW を用いた UST を生成するランダムなアルゴリズム（Wilson's algorithm）を考案し UST と LERW の関係をより明確にした。

$\mathbb{Z}^d$ 上の LERW のスケール極限の存在は全ての次元 d に対して証明されている。高次元の $d \geq 4$ の場合、Lawler（[5]、[6]）は LERW のスケール極限がブラウン運動になることを証明した。高次元の場合、元々のランダムウォークのパスはあまり loop を持たないので、loop を切り取る操作で大きく変化することはない。従ってこの場合 LERW のスケール極限は元々のランダムウォークのスケール極限であるブラウン運動に一致するのである。次元が低い場合は上の直感的な議論は通用せず、問題は非常に困難になる。ところが $d = 2$ の場合は、Lawler、Schramm、Werner（[8]）らにより LERW は共形不変なスケール極限を持つこと、すなわち SLE_2 であることを証明した。現在では SLE は多くの重要な 2 次元モデルのスケール極限として現れることが証明されているが、元々は Schramm（[11]）が LERW のスケール極限の記述を試みるためにその開発を行った。最後に $d = 3$ の場合は Kozma（[3]）により LERW のスケール極限の存在が証明された。但しその極限がどのような object であるかはほとんど何もわかっていない状況である。

さて S を $\mathbb{Z}^d$ 上の原点から出発する simple random walk（SRW）とする。$\mathbb{Z}^d$ 内の原点を中心とする半径 n の球を B_n とする。SRW が初めて B_n の外に出る時間を σ_n とせよ。SRW のパス $S[0, \sigma_n]$ から loop を切り取って得られるシンプルパスを $\mathrm{LE}(S[0, \sigma_n])$ で表し、これを $S[0, \sigma_n]$ の loop-erasure と呼ぶ。ここで興味があるのはこのシンプルパスの長さである。そこで $\mathrm{LE}(S[0, \sigma_n])$ のステップ数を M_n で表す。M_n の平均に関しては以下のことがわかっている。$d \geq 5$ の場合は Lawler（[5]）により $E(M_n) \asymp n^2$ であることが証明されている。$d = 4$ のときは $E(M_n) \asymp n^2 (\log n)^{-1/3}$ であることが示されている（[6]）。$d = 2$ の場合は domino tiling の技術を用いて Kenyon（[2]）が $E(M_n) \approx n^{5/4}$ を示した。最近になって Lawler（[9]）により $E(M_n) \asymp n^{5/4}$ が証明された。

$d=3$ の場合は M_n に関してほとんど何もわかっていない状態である。現在証明されていることとしては、ある $\epsilon > 0$ があって $cn^{1+\epsilon} \le E(M_n) \le Cn^{5/3}$ が成立することのみである（[7]）。M_n に関しては次のような予想がある。

予想 1. （$d=3$）ある定数 $\alpha > 0$ が存在して $E(M_n) \approx n^{\alpha}$ となる.

このような定数 α を LERW の growth exponent と呼ぶ。Growth exponent は LERW の長さの漸近挙動を調べるうえで非常に重要な量である。数値計算の結果（[1], [14]）では $\alpha = 1.62 \pm 0.01$ くらいであろうと考えられている。しかしながら α の存在は長い間証明されていない状態であった。こうした状況の中以下の結果を得た。

2 Main results

定理 1. （*[12]*, $d=3$）ある定数 $\alpha > 0$ が存在して $E(M_n) \approx n^{\alpha}$ となる.

つまり予想 1 は解決されたのである。ここで $1 < \alpha \le \frac{5}{3}$ に注意されたい。
それでは M_n 自身の挙動はどのようなものなのであろうか？これに対しては以下ように M_n はその平均に非常に集中している量であるということを示した。

定理 2. （*[12]*, $d=3$）ある定数 $c > 0, C < \infty$ が存在して、全ての n および $\lambda > 0$ に対して

$$P\Big(M_n \ge \lambda E(M_n)\Big) \le Ce^{-c\lambda} \tag{1}$$

となる。さらに全ての $\beta < 1/\alpha$ に対してある定数 $c' > 0, C' < \infty$ があって、全ての n および $\lambda > 0$ に対して

$$P\Big(M_n \le \frac{1}{\lambda}E(M_n)\Big) \le C'e^{-c'\lambda^{\beta}} \tag{2}$$

が成立する。

注 1. 数値計算の結果（*[14]*）では

$$P\Big(M_n \le \frac{1}{\lambda}E(M_n)\Big) = C'e^{-c'\lambda^{\frac{1}{\alpha}+o(1)}}$$

であろうと考えられている。

3 Notation

$G=(V,E)$ は有限グラフとする。G の点列 $\lambda = [\lambda(0), \cdots, \lambda(m)] \subset V$ がパスであるとは、各 $i = 1, \cdots, m$ に対して $\{\lambda(i-1), \lambda(i)\} \in E$ であることをいう。このとき m を λ の長さと呼ぶ。パス λ の loop-erasure とは以下の手順により λ から loop を切り取って得られるシンプルパスのことである。まず、$s_0 = \max\{j \le m | \lambda(j) = \lambda(0)\}$ とし、$i > 0$ に対しては $s_i = \max\{j \le m | \lambda(j) = \lambda(s_{i-1}+1)\}$ と定義する。$n = \min\{i | s_i = m\}$ としたとき、パス λ の loop-erasure $\mathrm{LE}(\lambda)$ を $\mathrm{LE}(\lambda) = [\lambda(s_0), \lambda(s_1), \cdots, \lambda(s_n)]$ で定める。G のふたつの頂点 $u, v \in V$ に対して、u から出発する G 上の SRW を v を初めて通過する時刻まで考える。その loop-erasure を u から v への LERW と呼ぶ。上で既に述べたように、u から v への LERW の分布は、UST 上で u と v を結ぶパスの分布と一致する。

数列 a_n, b_n に対して、$a_n \asymp b_n$ はある定数 $c > 0$ が存在して $cb_n \le a_n \le \frac{1}{c}b_n$ となることを表す。また $a_n \approx b_n$ とは $\lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{\log b_n} = 1$ となることを表す。

参考文献

[1] Guttmann, J. and Bursill, R. J. Critical exponents for the loop erased self-avoiding walk by Monte Carlo methods, Journal of Statistical Physics 59:1/2 (1990), 1-9.

[2] Kenyon, R. The asymptotic determinant of the discrete Laplacian. Acta Math. 185 239-286. (2000)

[3] Kozma, G. The scaling limit of loop-erased random walk in three dimensions. Acta Math. 199: 1 (2007) 29-152.

[4] Lawler, G. F. . A self-avoiding random walk. Duke Math J. 47 655-693. (1980) MR587173

[5] Lawler, G. F. Intersections of random walks. Probability and its Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, (1991). (soft-cover version)

[6] Lawler, G. F. The logarithmic correction for loop-erased walk in four dimensions. In Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993) J. Fourier Anal. Appl. (1995) 347-361. MR1364896

[7] Lawler, G. F. Loop-erased random walk. Perplexing problems in probability: Festschrift in honor of Harry Kesten (M. Bramson and R. T. Durrett, eds.), Progr. Probab., vol. 44, Birkhauser Boston, Boston, MA, (1999), pp. 197-217.

[8] Lawler, G. F., Schramm, O. Werner, W. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees. Ann. Probab. 32 939-995 (2004)

[9] Lawler, G. F. The probability that planar loop-erased random walk uses a given edge. arXiv:1301.5331

[10] Pemantle, R. Choosing a spanning tree for the integer lattice uniformly. Ann. Probab. 19 1559-1574. (1991). MR1127715

[11] Schramm, O. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. Israel J. Math. 118 221-288. (2000)

[12] Shiraishi, D. Growth exponent for loop-erased random walk in three dimensions. arXiv:1310.1682

[13] Wilson, D. B. Generating random spanning trees more quickly than the cover time. In Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (Philadelphia, PA, 1996) 296-303. ACM, New York. MR1427525

[14] Wilson, D. B. The dimension of loop-erased random walk in 3D. Physical Review E 82(6):062102, (2010).

Rate of convergence in first passage percolation with low moment conditions

久保田　直樹 (日大理工)*

樹木が正方格子状に並んだ果樹園において，ある木で病気が発症したとする．病気の伝染は隣接する 4 本の木にのみ起こり，その確率は独立に p ずつであるとする．このとき，「ある木で発症した病気が，果樹園の樹木にどのように伝染していくか」を問題として扱うのが，パーコレーションである．これに関連して，Hammersley と Welsh [2] によって導入された "ファーストパッセージパーコレーション" がある．ファーストパッセージパーコレーションでは，ある木 a からそれに隣接する木 b には，ランダムな時間 $\omega(\{a,b\})$ で病気が伝染するとし，「ある範囲まで病気が広がる時間と，その感染経路」を問題として扱う．今回，このファーストパッセージパーコレーションに対し，病気の伝染が起こる範囲の形状の振る舞いについて研究を行った．

まず最初に，今回扱うファーストパッセージパーコレーションについて，より詳しく説明を行う．$\mathcal{E}$ を正方格子 $\mathbb{Z}^d$ の辺集合とし，$(\omega(e))_{e\in\mathcal{E}}$ を独立同分布な非負値確率変数列であるとする．(各 $\omega(e)$ を，木から木へ病気が伝染するときのランダムな時間とみなす．) このとき，$\mathbb{Z}^d$ の辺を「$e_1 \to e_2 \to \cdots \to e_l$」と辿る経路 π において，その *passage time* を

$$T(\pi) := \sum_{i=1}^{l} \omega(e_1)$$

で定義する．さらに，$\mathbb{Z}^d$ の頂点 x から y への *first passage time* を以下で定義する:

$$T(x,y) := \inf\{T(\pi); \pi \text{ は } \mathbb{Z}^d \text{ の頂点 } x \text{ から } y \text{ への経路 }\}$$

ここで問題とするのは，原点 0 からの first passage time が t 以下となるような点の集合

$$B(t) := \left\{ x + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d ; T(0,y) \leqslant t \right\}, \qquad t > 0$$

* kubota@grad.math.cst.nihon-u.ac.jp

の漸近挙動である．

以下全体を通して，次の (A1) と (A2) が成立すると仮定する: $F(x)$ を $(\omega(e))_{e\in\mathcal{E}}$ の共通の分布関数とする．このとき，$\mathbb{Z}^d$ 上のボンドパーコレーションの臨界確率 p_c と，ある $\alpha>1$ に対して

(A1) $F(0)<p_c$,
(A2) $\int_0^\infty x^\alpha\, dF(x)<\infty$.

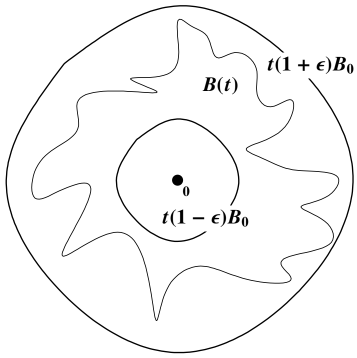


図 1　$B(t)$ の漸近挙動

仮定 (A2) が $\alpha=1$ に対して成り立つならば，$\mathbb{R}^d$ のある部分集合 $B_0\subset\mathbb{R}^d$ (より正確には，nonrandom でコンパクトな凸集合) が存在して，すべての $\epsilon>0$ に対して，確率 1 で次が成立することが知られている: 十分大きな $t>0$ に対して，

$$(1-\epsilon)B_0\subset\frac{B(t)}{t}\subset(1+\epsilon)B_0.$$

(大まかには，右図 1 のような形状をとる．より詳しくは，例えば [3, Section 3, page 154] を参照．) この結果に対し，Kesten [4] と Alexander [1] は，$B(t)/t$ が B_0 へ漸近していく rate をより精密に調べ，最大でも $\epsilon=O(t^{-1/2}\log t)$ 程度となることを示した．そこでは，上の仮定 (A2) よりかなり強い，以下の条件が仮定されている:

ある $\gamma>0$ に対して，$\int_0^\infty e^{\gamma x}\, dF(x)<\infty$ が成立する．

今回，この条件を弱めた場合の漸近挙動について考察し，以下の結果を得た．

Theorem 1. 仮定 (A1) が成立するとする．さらに，ある $\alpha\geqslant d$ に対して，仮定 (A2) が成立するとする．このとき，$\delta>0$ が十分小さければ，ある定数 $C_1,C_2,C_3,C_4>0$ が存在し，十分大きな t に対して次が成立する:

$$P\left(B(t)\not\subset t\left(1+C_1t^{-1/2+3\delta}\right)B_0\right)\leqslant C_2t^d\exp\{-C_3t^\delta\},$$
$$P\left(t\left\{1-C_4t^{-1/(6d+12)}(\log t)^{1/3}\right\}B_0\not\subset B(t)\right)\leqslant t^{\alpha(\beta-1)+d}.$$

ここで,

$$\beta:=\left(3-d\delta-\frac{1}{6d+12}\right)^{-1}.$$

特に，ある $\alpha \geqslant (d+1)(9d+17)/(6d+11)$ に対して仮定 (A2) が満たされるならば，確率 1 で次が成立する: 十分大きな t に対して，

$$t\left\{1 - C_4 t^{-1/(6d+12)}(\log t)^{1/3}\right\} B_0 \subset B(t) \subset t\left\{1 + C_1 t^{-1/2+(d+1)\delta}\right\} B_0.$$

References

[1] K. S. Alexander. Approximation of subadditive functions and convergence rates in limiting-shape results. *The Annals of Probability*, 25(1):30–55, 1997.

[2] J. Hammersley and D. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Bernoulli 1713 Bayes 1763 Laplace 1813*, pp. 61–110. Springer, 1965.

[3] H. Kesten. Aspects of first passage percolation. In *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*, Vol. 1180 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 125–264. Springer, Berlin, 1986.

[4] H. Kesten. On the speed of convergence in first-passage percolation. *The Annals of Applied Probability*, pp. 296–338, 1993.

長距離相互作用をもつ飛躍型無限粒子系

江崎 翔太*
千葉大学理学研究科博士後期課程３年

S を $\mathbb{R}^d$ 上の非負整数値 Radon 測度全体からなる集合とする。S は、漠位相を導入することによって、完備可分距離空間になる。一方、S の元 s は $\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$ と表すことができることから、各 s_i を点の位置とすると、s は $\mathbb{R}^d$ 上の配置とみなすことができる。この意味で、S を配置空間と呼ぶ。$\mathscr{D}_\circ$ で、全ての local で、smooth な S 上の関数からなる集合を表す。$f, g \in \mathscr{D}_\circ$ に対し、$\mathbb{D}[f, g] : \mathsf{S} \to \mathbb{R}$ を次のように定める。

$$\mathbb{D}[f, g](\mathsf{s}) = \frac{1}{2} \sum_i \int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathsf{s}^{s_i, y_i}) - f(\mathsf{s}))(g(\mathsf{s}^{s_i, y_i}) - g(\mathsf{s}))p(|y_i - s_i|)dy_i$$

ここで、$s_i \in \mathbb{R}^d$、$\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$ である。さらに、s に対して、$\mathsf{s}^{x_i, y_i} = \mathsf{s} + \delta_{y_i} - \delta_{x_i}$ を表すものとする。また、p は、$[0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への関数で、$\int_{\mathbb{R}^d} p(|y|)dy = 1$ をみたすものとする。一方、S 上の確率測度を μ とする。これらを用いて、双線形形式 $\mathscr{E}$ を次のように定める。

$$\mathscr{E}(f, g) = \int_{\mathsf{S}} \mathbb{D}[f, g](\mathsf{s})d\mu, \quad \mathscr{D}_\infty = \{f \in \mathscr{D}_\circ \cap L^2(\mathsf{S}, \mu); \mathscr{E}(f, f) < \infty\}. \tag{1}$$

次に、$S_r = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| \le r\}$、$\mathsf{S}_r^i = \{\mathsf{s} \in \mathsf{S}; \mathsf{s}(S_r) = i\}$ とする。以下を仮定する。

$$\text{任意の } k \text{ に対して } \mu \text{ の } S_r \text{ 上の } k \text{ 密度関数 } \sigma_r^k\text{、及び、} k \text{ 点相関関数 } \rho^k(x) \text{ が存在する。} \tag{A.0}$$

$$(\mathscr{E}, \mathscr{D}_\infty) \text{ は、} L^2(\mathsf{S}, \mu) \text{ 上で closable である。} \tag{A.1}$$

$$\text{任意の } k, r \text{ に対して } \sigma_r^k \in L^\infty(S_r^k, dx) \tag{A.2}$$

$$\text{任意の } r \text{ に対して } \sum_{i=1}^\infty i\mu(\mathsf{S}_r^i) < \infty \tag{A.3}$$

そして、飛躍率と粒子の密度に対する仮定をする。ある $\alpha > \beta > 5$ が存在し、

$$\text{十分大の } r \text{ に対し、} \sum_{i=1}^\infty i\mu(\mathsf{S}_r^i) \le C_1 r^\beta \text{ かつ、十分大の } |y| \text{ に対し、} p(|y|) \le \frac{C_2}{|y|^{d+\alpha}} \tag{B.1}$$

とできることを仮定する。さらに、相関関数に関して、

$$\sum_{r=1}^\infty \frac{\int_{S_r^2} \rho^2(x_1, x_2)dx_1dx_2 - \int_{S_r} \rho^1(x)(\rho^1(x) - 1)dx}{\left\{\int_{S_r} \rho^1(x)dx\right\}^2} < \infty \tag{B.2}$$

を仮定する。

*sesaki@graduate.chiba-u.jp

Theorem 1. (A.0)、(A.1)、(A.2)、(A.3)、(B.1)、(B.2) を仮定する。このとき、$((\mathscr{E},\mathscr{D}_\infty),L^2(\mathsf{S},\mu))$ の closure$(\mathscr{E},\mathscr{D})$ は、$L^2(\mathsf{S},\mu)$ 上の quasi-regular なディリクレ形式となる．従って、$((\mathscr{E},\mathscr{D}),L^2(\mathsf{S},\mu))$ から導かれる Hunt 過程 $\{\mathbb{P}_\mathsf{s}\}_{\mathsf{s}\in\mathsf{S}}$ が存在する．

この定理により S 値の Hunt 過程、つまり、ラベルなし干渉飛躍型無限粒子系の構成を行うことができる。

ここで、Gibbs 測度の一般化である準 Gibbs 測度を導入する。μ が (β,Φ,Ψ)-準 Gibbs 測度であるとは、任意の $m,r\in\mathbb{N}$、μ-a.s.ξ に対して、

$$c^{-1}\Lambda_r^m(d\mathsf{s})e^{-\beta\mathcal{H}_r(\mathsf{s})}\le\mu_{r,\xi}^m(d\mathsf{s})\le c\Lambda_r^m(d\mathsf{s})e^{-\beta\mathcal{H}_r(\mathsf{s})}$$

となる $c=c(m,r,\xi)$ が存在することをいう。ただし、$\pi_r(\mathsf{s})=\mathsf{s}(\cdot\cap S_r)$、$\pi_r^c(\mathsf{s})=\mathsf{s}(\cdot\cap S_r^c)$ として、

$$\mu_{r,\xi}^m(\cdot)=\mu(\pi_r\in\cdot|\mathsf{s}(S_r)=m,\pi_r^c(\mathsf{s})=\pi_r^c(\xi))\quad\mu\text{-a.s. }\xi$$

であり、

$$\mathcal{H}_r(\mathsf{s})=\sum_{s_i\in S_r}\Phi(s_i)+\sum_{\substack{s_i,s_j\in S_r\\ i<j}}\Psi(s_i-s_j)$$

であるとする。また、Λ_r^m とは、$\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度を密度にもつ Poisson random point field Λ に対し,

$$\Lambda_r^m(\cdot)=\Lambda(\pi_r(\cdot)|\mathsf{s}(S_r)=m)$$

で与えられるものとする。μ が (β,Φ,Ψ)-準 Gibbs 測度であるならば (A.1)、(A.2) は成立する [2]。準 Gibbs 測度の例としては、Dyson random point field、Ginibre random point field、Airy random point field などが含まれており、特に Dyson random point field と Ginibre random point field は (A.0)、(A.3)、(B.1)、(B.2) も確認することができ、この定理が適用できる。また、一般の canonical Gibbs 測度は準 Gibbs 測度である。

今講演ではこのラベルなし干渉飛躍型無限粒子系の構成において注意が必要な部分と、従来の干渉ブラウン運動の構成を行うこととの相違点、今回の構成に含まれる例について説明したい。また、$\mathbb{Z}^d$ 上のラベルなし排他的干渉飛躍型無限粒子系や hard core interaction を課した場合の干渉飛躍型無限粒子系の構成との相異点についてや、今後の展望について説明したい。

参考文献

[1] H. Osada, Dirichlet form approach to infinitely dimensional Wiener processes with singular interactions, Comm. Math. Phys., **176** (1996), 117-131.

[2] H. Osada, Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials, Annals of Probability, Vol **41** (2013), 1-49.

Dynamical rigidity of stochastic Coulomb systems in infinite-dimensions

2013/12/18/水：京都大学数理解析研究所　　Hirofumi Osada (Kyushu University)

d 次元ユークリッド空間内を d 次元 Coulomb ポテンシャル Ψ_d で相互作用しながら運動する無限個のブラウン運動を考える。逆温度を β とする。この確率力学が平行移動不変なときには、次の無限次元確率微分方程式で記述される [3]。(c_d は正定数, $c_2 = 1$)

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r\to\infty} \sum_{j\neq i,\, |X_t^i - X_t^j|<r} c_d \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^d} dt \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

現在、$d = 2$ かつ $\beta = 2$ の時だけ、この確率力学およびその平衡分布は構成されており、それぞれ「Ginibre 干渉ブラウン運動」、「Ginibre 点過程」と呼ばれる。尚、この点過程は、非エルミート Gaussian ランダム行列の固有値の分布の極限である。

$\mathbb{R}^d$ において d 次元 Coulomb ポテンシャルは、Ruelle クラスのポテンシャルではない。従って、DLR 方程式に基づく、従来の Gibbs 測度の理論の外側にあった。Gibbs 測度は、Poisson 点過程に近いクラスである。一方、Coulomb ポテンシャルはその遠方での相互作用の強烈さのために、付随する無限粒子系は全く異なる様相を見せる。この講演では、その一例として Ginibre 点過程の幾何的及び力学的 rigidity を語る。

$\mathbb{R}^2$ の配置空間を S とおく。μ を Ginibre 点過程とする。$\ell = (\ell_i)_{i\in\mathbb{N}}$ をラベルで、Palm 測度 μ_a に関して、次の絶対連続条件を満たすものとする。これは、極めて緩やかな仮定である。

$$\mu(\,\cdot\,|\ell^i(\mathsf{s}) = a,\, \mathsf{s}(\{a\}) \geq 1) \prec \mu(\,\cdot\,|\mathsf{s}(\{a\}) \geq 1)) \quad \text{for all } i \in \mathbb{N},\, a \in \mathbb{R}^2.$$

従来、tagged 粒子の拡散極限を考察するときには、「environment seen from tagged particle」を考えるという手法がとられてきた。そのため、初期分布は、元々の平衡分布ではなく、原点に tagged 粒子を置くという、Palm 測度の下で考えるのが一般的であった。上の仮定から、最初にラベルをつけた各粒子の分布は、初期位置の Palm 測度に対して絶対連続であるため、元々の問題を変更せず、各点の Palm 測度について極限定理を示せば十分であることが分かる。

$\ell(\mathsf{s}) = \mathbf{s} = (s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を出発する SDE(1) の解 $\mathbf{X} = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ の分布を $P_{\mathbf{s}}$ と表す。

Theorem 1 [8]　μ-a.s. s にたいし、すべての $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon X_{t/\epsilon^2}^i = 0 \quad \text{weakly in } C([0,\infty);\mathbb{R}^2)\ P_{\ell(\mathsf{s})}\text{-a.s..} \tag{2}$$

更に各粒子は、時間平均を持つ。

Theorem 2 [8]　μ-a.s. $\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$ にたいし、すべての $i \in \mathbb{N}$ に対して $\xi^i \in L^2(\mu_{s_i})$。更に、

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \int_0^u X_t^i dt = \xi^i \quad \text{in } P_{s_i}\text{-a.s..} \tag{3}$$

ここで μ_a は、点 a に条件つけた reduced Palm 測度である。

以下、この講演の主定理を述べる。SDE の解は強解として一意的に存在する [10] ので、いまそのブラウン運動 $\mathbf{B} = (B^i)_{i\in\mathbb{N}}$ の分布を $P^{\mathbf{B}}$ は $\mathbf{B} = (B^i)$ とおく。

Theorem 3 [8]　μ-a.s. s と、すべての $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|X_t^i|}{\sqrt{\log t}} \leq 4 \quad P^{\mathbf{B}}\text{-a.s..} \tag{4}$$

Remark (0)「4」は correct な bound ではない。
(1) 通常の Ruelle クラスの干渉ポテンシャルの場合は、2 次元以上では常に拡散的になり、退化しないこと

[1] が知られている。[1] では凸のハードコアの存在を仮定したが、事実としては 2 次元以上では Ruelle クラスの干渉ポテンシャルの場合は、常に拡散的スケーリングで非退化かと思われている。また対応する格子モデルでは、単純排他過程については、Kipnis-Varadhan、また、一般の排他過程については、Spohn によって非退化が示されている。従って、今回得られた結果は、これらの従来の常識とは、対極的な結果となっている。
(2) このような現象が生じる理由は、Coulomb ポテンシャルがもつ、無限大での効果の強烈さに起因する。long range の影響のため、この平衡分布に付随する確率力学の tagged 粒子は、通常のブラウン運動とは違う種類の、漸近挙動をすることが分かる。これが表題の Dynamical Rigidity の意味である。
(3) 証明の鍵は、[7] で証明した、「Palm restore 密度公式」とよぶ、Ginibre 点過程の精密な分解定理を用いることである。この定理は、Ginibre 点過程の確率幾何的 rigidity のひとつを証明したものである。[6] において、reduced Palm 測度同士、或いは元の測度に対する特異性と絶対連続性を示し、空間分解を証明したが、その結果を更に発展させたものである。また、Goldman が提起した open 問題に対する答えを与えている。配置空間が、まるでバームクーヘンの様に層状に分解できる、というのがこれらの結果の主旨だが、その効果もしくは空間構造による力学への影響として粒子は劣拡散的挙動を示し、更に、それ以上に対数的漸近挙動をする。
(4) 無限次元の Dirichlet 形式に対する様々な種類のカップリングを考えることが、証明の鍵の 1 つである。
(5) 有限次元においての Nash の議論、つまり Nash 不等式から熱核の大局的な対角線評価を示したアイデア (これらは拡散的スケーリングで退化するかどうかに対して有効である) は、無限次元では有効ではない (Nash の不等式・ソボレフの不等式は通常成立しない)。しかし、今回、Nash の議論の無限次元的対応物として、干渉ブラウン運動に関しては、(劣) 拡散挙動を論じる際には、幾何的 rigidity、つまり平衡分布の「Palm restore 密度公式」が有効であることが判明した。

References

[1] Osada, H., *Positivity of the self-diffusion matrix of interacting Brownian particles with hard core*, Probab. Theory Relat. Fields, **112**, (1998), 53-90.

[2] Osada, H., *Tagged particle processes and their non-explosion criteria*, J. Math. Soc. Japan, **62**, No. **3** (2010), 867-894.

[3] Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, Probability Theory and Related Fields, Vol **153**, (2012) pp 471-509.

[4] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, Annals of Probability, Vol **41**, (2013) pp 1-49.

[5] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials II: Airy random point field*, Stochastic Processes and their Applications, Vol **123**, (2013) pp 813-838.

[6] Osada, H., Shirai, T., *Absolute continuity and singularity of Palm measures of the Ginibre point process*, (preprint/draft)

[7] Osada, H., *Palm decomposition and restore density formulae of the Ginibre point process*, (in preparation)

[8] Osada, H., *Sub-diffusivity of tagged particles of Ginibre interacting Brownian motions*, (preprint/draft)

[9] Osada, H., Tanemura, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations arising from Airy random point fields*, (preprint/draft)

[10] Osada, H., Tanemura, H., *Strong solutions of infinite-dimensional stochastic differential equations and tail theorems*, (preprint/draft)

α-determinantal point field associated with green kernel

白井朋之 (九大 IMI) *

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ に対して，α-行列式 ($\alpha \in \mathbb{R}$) は

$$\det{}_\alpha A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \alpha^{d(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

と定義される．ここで，$d(\sigma)$ は置換 σ を互換の積で表すために必要な最小の互換の個数である．特に，$\alpha = -1$ の場合は行列式，$\alpha = 1$ の場合はパーマネント，$\alpha = 0$ の場合は行列の対角線の積に等しい．非負定値行列 $A \succeq O$ に対して，

$$\mathrm{per} A \geq \prod_{i=1}^n a_{ii} \geq \det A \geq 0$$

が知られており，特に $A \succeq O$ ならば $\alpha = \pm 1, 0$ の場合，任意の $A \succeq O$ に対して $\det_\alpha A \geq 0$ である．[1] において，集合

$$Pos(\mathbb{R}) = \{\alpha \in \mathbb{R} \ ; \ \det{}_\alpha A \geq 0 \text{ for every real symmetric } A \succeq O \ \}$$

について考察した．(エルミート行列に対しても同様に $Pos(\mathbb{C})$ が定義される．) $\det_\alpha A$ の正値性の問題はある確率場の存在 (存在する場合は α-determintantal point field と呼ぶ) と関係があり，

$$Pos(\mathbb{R}) \supset \{-\frac{1}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{\frac{2}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$$

を示した．本講演では，この問題の関連結果を述べた後，マルコフ過程のグリーン核に付随する α-determinantal point field のループ測度による表現について述べる．

参考文献

[1] Y. Takahashi and T. Shirai, Random point fields associted with certain Fredholm determinants (I): fermion, Poisson and boson point processes, J. Funct. Anal. **205** (2003), 414–463.

[2] T. Shirai, Remarks on the positivity of α-determinants, Kyushu J. Math. **61** (2007), 169–189.

[3] T. Osogami, T. Shirai and H. Waki, Remarks on positivity of α-determinants via SDP relaxation, J. Math-for-Industry **5** (2013A-1), 1–10.

*研究集会「確率論シンポジウム」@RIMS, Kyoto, Dec. 17-20, 2013

Some results on spectral measures of Wigner matrices and applications

Trinh Khanh Duy
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

Let $\{\xi_{ij}\}_{1\le i\le j}$ be real valued independent random variables satisfying the following conditions:

(i) $\{\xi_{ii}\}_i$ are i.i.d. with $\mathbb{E}[\xi_{ii}] = 0$ and $\mathbb{E}[|\xi_{ii}|^k] < \infty, k = 1, 2, \dots$;

(ii) $\{\xi_{ij}\}_{i<j}$ are i.i.d. with $\mathbb{E}[\xi_{ij}] = 0, \mathbb{E}[\xi_{ij}^2] = 1$ and $\mathbb{E}[|\xi_{ii}|^k] < \infty, k = 3, 4, \dots$.

We construct the $N \times N$ symmetric matrix X_N as

$$X_N(j,i) = X_N(i,j) := \frac{\xi_{ij}}{\sqrt{N}}, \quad 1 \le i \le j \le N.$$

X_N is called a Wigner matrix. If the distributions of $\{\xi_{ij}\}$ are Gaussian, we called X_N a Gaussian Wigner matrix. (The case of Gaussian Wigner matrices with $\mathbb{E}[\xi_{ii}^2] = 2$ are related to Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE) matrices.)

Let $\lambda_1^{(N)} \le \lambda_2^{(N)} \le \cdots \le \lambda_N^{(N)}$ be the eigenvalues of X_N. The empirical distribution of X_N is defined as

$$L_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i^{(N)}}.$$

Here δ denotes the Dirac measure. Some properties of empirical distributions are as follows.

Theorem 1. (i) *L_N converges weakly, in probability, to the semicircle distribution sc, as N tends to infinity. (The semicircle distribution sc is a probability measure on $\mathbb{R}$ with the density*

$$sc(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\mathbf{1}_{|x|\le 2}.)$$

This means that for all bounded continuous functions $f \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\langle L_N, f\rangle \xrightarrow{P} \langle sc, f\rangle \text{ as } N \to \infty.$$

Here $\langle \mu, f\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)$ with μ being a probability measure on $\mathbb{R}$ and f being a measurable function on $\mathbb{R}$.

(ii) *For $k = 1, 2, \dots,$*

$$\langle L_N, x^k\rangle \xrightarrow{P} \langle sc, x^k\rangle \text{ as } N \to \infty.$$

The convergence also holds almost surely.

(iii) *For $k = 1, 2, \dots,$*

$$N\left(\langle L_N, x^k\rangle - \mathbb{E}[\langle L_N, x^k\rangle]\right) \xrightarrow{d} Z_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2) \text{ as } N \to \infty,$$

where σ_k^2 depends only on the second and fourth moments of $\{\xi_{ij}\}_{i\le j}$.

Proofs of this theorem can be found in [2, Chapter 2]. Note that the multidimensional central limit theorem also holds, see [1].

In this talk, we consider the spectral measure and obtain analogous results. Let $v_1^{(N)}, v_2^{(N)}, \dots, v_N^{(N)}$ be eigenvectors corresponding to the eigenvalues $\lambda_1^{(N)} \le \lambda_2^{(N)} \le \cdots \le \lambda_N^{(N)}$ of X_N. Since X_N is symmetric, we can choose $\{v_i^{(N)}\}_{i=1}^N$ to be an orthogonal basis of $\mathbb{R}^N$.

For a unit vector $v \in \mathbb{R}^N$, $(\|v\| = 1)$, let

$$\mu_N^{(v)} := \sum_{i=1}^N |\langle v, v_i^{(N)}\rangle|^2 \delta_{\lambda_i^{(N)}}.$$

Then $\mu_N^{(v)}$ is a probability measure on $\mathbb{R}$, called the spectral measure of (X_N, v). Equivalently, we can define $\mu_N^{(v)}$ as a probability measure on $\mathbb{R}$ which satisfies

$$\langle \mu_N^{(v)}, x^k\rangle = \langle X_N^k v, v\rangle, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Here are our results on spectral measures of (X_N, e_1), where $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^N$.

Theorem 2 (D. 2013)**.** *Let μ_N be the spectral measure of (X_N, e_1).*

(i) *μ_N converges weakly, in probability, to the semicircle distribution, i.e.,*

$$\langle \mu_N, f\rangle \xrightarrow{P} \langle sc, f\rangle \text{ as } N \to \infty, \quad {}^\forall f \in C_b(\mathbb{R}).$$

(ii) *For $k = 1, 2, \dots,$*

$$\langle \mu_N, x^k\rangle \xrightarrow{P} \langle \sigma, x^k\rangle \text{ as } N \to \infty.$$

(iii) *Assume that $\{\xi_{ij}\}$ are symmetric random variables. Let*

$$S_{N,k} := \sqrt{N}\left(\langle \mu_N, x^k\rangle - \mathbb{E}[\langle \mu_N, x^k\rangle]\right).$$

(iii)$_{(a)}$ $k = 3, 5, \dots,$

$$S_{N,k} \xrightarrow{d} c_k Y + Z_k \text{ as } N \to \infty,$$

where c_k is a constant, $Y \sim \xi_{11}, Z_k \sim \mathcal{N}(0, a_k^2)$; Y and Z_k are independent.

(iii)$_{(b)}$ $k = 2, 4, \dots,$

$$S_{N,k} \xrightarrow{d} Z_k \sim \mathcal{N}(0, a_k^2) \text{ as } N \to \infty.$$

(iii)$_{(c)}$ *Multidimensional version. There are jointly Gaussian random variables $\{Z_k\}$ independent of $Y \sim \xi_{11}$ such that for any $K \in \mathbb{N}$,*

$$\{S_{N,k}\}_{k=1}^K \xrightarrow{d} (Y, Z_2, c_3 + Z_3, Z_4, \dots).$$

The method of moments used here is somewhat similar to the one in [3]. As an application, similar results for spectral measures of Gaussian beta ensembles are derived.

References

[1] G.W. Anderson, O. Zeitouni: *A CLT for a band matrix model,* Probab. Theory Related Fields **134** (2006), no. 2, 283–338.

[2] G.W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni: An introduction to random matrices, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 118. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[3] Y. Sinai, A. Soshnikov: *Central limit theorem for traces of large random symmetric matrices with independent matrix elements,* Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **29** (1998), no. 1, 1–24.

一般化ファインマン・カッツ乗法汎関数に対するゲージ関数の無限遠での漸近挙動

松浦將國

2013 年 12 月 19 日

$X=(\Omega,\mathscr{M},\mathscr{M}_t,\mathbb{P}_x,X_t)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の過渡的な対称 α 安定過程 $(0<\alpha<2)$ とし，$(\mathscr{E},\mathscr{F})$ を X のディリクレ形式とする．このとき，$u\in\mathscr{F}\cap C_\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して差分型加法汎関数 $u(X_t)-u(X_0)$ を福島分解すると，

$$u(X_t)-u(X_0)=M_t^u+N_t^u.$$

ここに，M^u は二乗可積分マルチンゲールでかつ N^u は零エネルギーの連続加法汎関数である．$F(x,y)$ を正値有界対称で対角線上 0 である関数とするとき，次の有界変動でない加法汎関数を考える．

$$A_t^{\mu,F,u}:=A_t^\mu+\sum_{s\le t}F(X_{s-},X_s)+N_t^u$$

A_t^μ は加藤測度 μ に対応する正値連続加法汎関数である．μ, F, u がある条件を満たすときは次のゲージ関数の有界性が保証される．

$$g(x):=\mathbb{E}_x[e^{A_\infty^{\mu,F,u}}]$$

金大弘と桑江一洋は

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}(f,f):=&\mathscr{E}(f,f)+\mathscr{E}(u,f^2)\\&-\int f^2(x)\mu(dx)-c\int f(x)f(y)(e^F-1)(x,y)|x-y|^{-(\alpha+d)}dxdy\end{aligned}$$

という二次形式によりゲージ関数 g の有界性を特徴付けていた ([1, Theorem 6.1]) が，本講演では

$$\lim_{|x|\to\infty}g(x)=1$$

であることを確率論的に証明する．また，μ, F, u のクラスを具体的に与えた場合に

$$g(x) = 1 + O(|x|^{\alpha-d}) \quad (|x| \to \infty)$$

となることにも言及する．

参考文献

[1] D. Kim, K. Kuwae, *Analytic characterizations of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals,* preprint.

Growth of Feynman-Kac semigroup associated with critical Schrödinger form

東北大学理学研究科 D3　和田正樹

2013 年 12 月 19 日

1　諸概念と考えている問題

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の回転対称な α-安定過程 $\{X_t\}$ に対応するディリクレ形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ は次のように定められる。

$$\mathscr{E}(u,u)=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}(u(y)-u(x))^2\frac{c_\alpha}{|x-y|^{d+\alpha}}dxdy, \qquad \mathscr{F}=\overline{\{C_c(\mathbb{R}^d)\}}^{\mathscr{E}_1^{1/2}}, \tag{1}$$

ここで、c_α は適切な定数、$C_c(\mathbb{R}^d)$ はコンパクトな台をもつ関数の集合、$\mathscr{E}_1(u,u)=\mathscr{E}(u,u)+\int_{\mathbb{R}^d}u^2(x)dx$ である。このとき、$\{X_t\}$ の推移確率密度関数（あるいは対応する生成作用素 $\mathscr{L}$ による方程式 $\partial u/\partial t=\mathscr{L}u$ の基本解）を $p(t,x,y)$ とすると

$$C_1(t^{-\frac{d}{\alpha}}\wedge\frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}})\le p(t,x,y)\le C_2(t^{-\frac{d}{\alpha}}\wedge\frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}),$$

という評価式をもつことが、[1] で示されている。この結果を踏まえて、以下では $\{X_t\}$ が過渡的な場合において、加藤クラスに属すグリーン緊密な正値ラドン測度 μ による摂動をシュレディンガー形式

$$\mathscr{E}^\mu(u,u)=\mathscr{E}(u,u)-\int_{\mathbb{R}^d}u^2d\mu \tag{2}$$

で与える。シュレディンガー形式 $(\mathscr{E}^\mu,\mathscr{F})$ に対応する生成作用素を $\mathscr{L}^\mu$ で表す。このとき、$\mathscr{L}^\mu$ を用いた方程式 $\partial u/\partial t=\mathscr{L}^\mu u$ の基本解 $p^\mu(t,x,y)$ が正定数の選び方を除けば $p(t,x,y)$ と同様の評価を持つ (この現象を、解の安定性という) ために μ に課すべき必要十分条件については [6] で以下のように得られている。

定理 1. *(W. [6])*
ディリクレ形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ は過渡的で、加藤クラスに属すグリーン緊密な正値ラドン測度 μ はエネルギー有限、すなわち $G(x,y)=\int_0^\infty p(t,x,y)dt$ に対して

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}G(x,y)\mu(dx)\mu(dy)<\infty$$

を満たすとする。このとき、基本解の安定性が成立するための必要十分条件は

$$\inf\{\mathscr{E}(u,u)\mid u\in\mathscr{F}_e,\int_{\mathbb{R}^d}u^2d\mu=1\}>1 \qquad (\text{但し、}\mathscr{F}_e\text{ は拡大ディリクレ空間}) \tag{3}$$

が成立することである。

注意 2. 定理 1 は、$J(x,y) \asymp |x-y|^{-d-\alpha}$ を満たす α-安定型過程や $J(x,y) \asymp c_1|x-y|^{-d-\alpha}\exp(-c_2|x-y|)$ を満たす相対論的 α-安定型過程でも成立する。

式 (3) は測度 μ のディリクレ形式に対する小ささを表しており、このとき μ は劣臨界的であるというが、これに対立する諸概念として

- μ が臨界的 $\Leftrightarrow \inf\{\mathscr{E}(u,u) \mid u \in \mathscr{F},\ \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\} = 1$
- μ が優臨界的 $\Leftrightarrow \inf\{\mathscr{E}(u,u) \mid u \in \mathscr{F},\ \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\} < 1$

の 2 つがある。以下では特に μ が臨界的な場合の $p^\mu(t,x,y)$ の振る舞いを考えたい。

2　先行結果と現段階までで得られた結果

定理 1 を示す上でカギになる事柄の 1 つは、(3) と同値な条件として

(a) $x \neq y$ のとき、$G^\mu(x,y) = \int_0^\infty p^\mu(t,x,y)dt < \infty$
(b) μ とルヴューズ対応する正値連続な加法的汎関数を A_t^μ とするとき、$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x[\exp(A_\infty^\mu)] < \infty$

の 2 点があるということであった。また、$p^\mu(t,x,y)$ と A_t^μ の間には $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)] = \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(t,x,y)dy$ という関係式が成立している。これらの事柄を踏まえると、ファインマンカッツ半群 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ が時刻を $t\to\infty$ とすることでどのように増大するのかを、条件 (b) との比較を目的に考えることは $p^\mu(t,x,y)$ の挙動を調べるための第一歩に相当するものと思われる。ファインマンカッツ半群における大偏差原理について以下の定理が知られている。

定理 3. *(竹田 [4])*
μ のスペクトル関数を $C(\mu) = -\inf\{\mathscr{E}^\mu(u,u) \mid \int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)dx = 1\}$ と定めるとき、以下の式が成立する。

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log(\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]) = C(\mu)$$

μ が優臨界的であることと $C(\mu) > 0$ であることが同値なので、優臨界的な場合にはファインマンカッツ半群は指数関数的に増大することがわかる。μ が臨界的な場合は $C(\mu) = 0$ であるから、ファインマンカッツ半群の増大度は指数関数よりも緩やかで t の多項式程度であると予想される。この予想は、$d/\alpha > 2$ の場合には正しく、次のことが知られている。

定理 4. *(竹田 [5])*
$\mathbb{R}^d$ 上の対称 α-安定過程は $d/\alpha > 2$ を満たし、測度 μ は臨界的であるとする。このときファインマンカッツ半群 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ は $t\to\infty$ としたとき t に比例する増大度をもち、*5* 次元以上のブラウン運動と似ている。

今回私が得られた結果は $d/\alpha = 2$ の場合の一部分に相当し、次の通りである。

定理 5. *(W. 2013)*
$\{X_t\}$ は $\mathbb{R}^2$ 上の対称 *1* 次安定過程、μ は $V \in C_0(\mathbb{R}^2)$ により $\mu = V(x)dx$ と表され、臨界的とする。このとき、ファインマンカッツ半群 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ は $t\to\infty$ としたとき、$t/\log t$ 程度の増大度をもつ。

尚、この結果は同じ問題を 4 次元ブラウン運動に対して考えている [2] の結果を拡張したものとなっている。

3　定理 5 の証明概略

$d/\alpha > 2$ の場合には、$\mathscr{L}^{\mu}h = 0$ となる関数 h が $L^2(\mathbb{R}^d)$ に属す。このため、[3] によるドリフト変換で定義される $L^2(h^2(x)dx)$ 上のディィリクレ形式に対応するマルコフ過程においてエルゴード定理を適用できることが証明のカギになった。しかし、$d/\alpha \leq 2$ ではこの手法は使えないため、以下のような解析的な証明を行った。

(1) P_t^{μ} をファインマンカッツ半群の作用素とするとき、$\mathbb{E}_x[\exp(A_t^{\mu})] = 1 + \int_0^t P_s^{\mu}V ds$ である。

(2) β 次のレゾルベント $G_{\beta}(x,y)$ は以下の漸近展開をもつ。

$$G_{\beta}(x,y) = G_0(x,y) + \beta \log \beta + \beta(\gamma - \log 2 + \log|x-y|) + \mathscr{O}(\beta^2)$$

(3) $L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 L_{β} を $L_{\beta}f(x) = G_{\beta}(Vf)(x)$ と定め、G_{β}^{μ} を P_t^{μ} に対応するレゾルベントとすると、レゾルベント方程式より $G_{\beta}^{\mu}V = (1-L_{\beta})^{-1}(G_{\beta}V)$ が成立する。

(4) $G_{\beta}V$ は G_0V に $L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ の一様ノルムに関して収束する。

(5) $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 K_{β} を $K_{\beta}f(x) = V^{\frac{1}{2}}G_{\beta}(V^{\frac{1}{2}}f)(x)$ により定めると、L_{β} の固有値と K_{β} の固有値は一致する。それらの内、最大のものを e_{β} とすると以下の式が成立する。

$$e_{\beta} = 1 + c_1\beta\log\beta + c_2\beta + \dots$$

(6) P_{β} を e_{β} の固有空間への射影作用素とすると、$(1-L_{\beta})^{-1} = (1-e_{\beta})^{-1}P_{\beta} + Q_{\beta}(1-P_{\beta})$ が成り立つ。ただし、Q_{β} は $\beta \to 0$ としたときに有限な極限をもち、ノルム連続である。

(7) $\mathscr{L}^{\mu}h = 0$ となる関数 $h > 0$ 及び適切な正定数 C_1 により $\lim_{\beta\to 0} -\beta\log\beta G_{\beta}^{\mu}V(x) = C_1h(x)$ が成立する。

(8) ターベリアンの定理を適用すると前項 (7) より

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t}\int_0^t P_s^{\mu}V ds = C_1h(x)$$

が得られ、(1) と併せて定理 5 が証明される。

参考文献

[1] Chen, Z.-Q., Kumagai, T.: Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets, Stoc. Proc. Appli. 108, 27–62, (2003).

[2] Cranston, M., Koralov, L., Molchanov, S., Vainberg, B.: Continuous model for homopolymers, J. Funct. Anal., 256, 2656–2696, (2009).

[3] Chen, Z.-Q., Zhang, T.-S.: Girsanov and Feynman-Kac type transformations for symmetric Markov processes, Ann. I. H. Poincarè 38, 475-505, (2002).

[4] Takeda, M.: Large deviations for additive functionals of symmetric stable processes, J. Theor. Probab. 21, 336–355, (2008)

[5] Takeda, M.: Feynman-Kac penalisations of symmetric stable processes, Elect. Comm. in Probab. 15, 32–43, (2010).

[6] Wada, M.: Perturbation of Dirichlet forms and stability of fundamental solutions, Tohoku Math Journal, to appear.

Escape rate of symmetric Markov processes

塩沢 裕一（岡山大学大学院自然科学研究科・環境理工学部）

本講演では, 内部消滅を持たない対称マルコフ過程の無限遠方への脱出レートの上限を, 体積増大度と係数増大度で特徴づける. 本予稿では飛躍型対称マルコフ過程の場合に結果を述べるが, 飛躍拡散型対称マルコフ過程の場合も同様の結果が得られる.

(X, d) を局所コンパクト可分距離空間とし, m を X 上の正値ラドン測度で X 全体に台を持つものとする. $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $L^2(X; m)$ 上の正則ディリクレ形式とし, $\mathbf{M} = (\{X_t\}_{t\geq 0}, \{P_x\}_{x\in X})$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から生成される m 対称マルコフ過程とする. X 上の台がコンパクトな連続関数全体を $C_0(X)$ とかき, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の Beurling-Deny 分解に非局所項のみが現れることを仮定する:

$$\mathcal{E}(u, v) = \iint_{X\times X\setminus \mathrm{diag}} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y))\, J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \quad u, v \in \mathcal{F} \cap C_0(X).$$

ただし, diag は $X \times X$ 上の対角線集合であり, $J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ は $X \times X \setminus \mathrm{diag}$ 上の正値対称ラドン測度である. また, $J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = J(x, \mathrm{d}y)m(\mathrm{d}x)$ を満たす積分核 $J(x, \mathrm{d}y)$ の存在を仮定する.

X 上の関数 ρ に対して $B_\rho(r) := \{x \in X \mid \rho(x) < r\}$ $(r > 0)$ とおき, $\mathcal{A}$ を次で定める:

$$\mathcal{A} := \left\{\rho \in C(X) \cap \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \mid \lim_{x\to\Delta} \rho(x) = \infty,\ \text{各 } r > 0 \text{ について } B_\rho(r) \text{ は相対コンパクト}\right\}.$$

仮定 1. X 上の単調非減少な非負値関数列 $\{\rho_R\}_{R\geq 1} \subset \mathcal{A}$ と $X \times X \setminus \mathrm{diag}$ 上の単調増加な非負値関数列 $\{F_R\}_{R\geq 1}$ が存在して, 次の条件が成立する:

(i) 各 $R \geq 1$ に対して次が成立する:

- $M_1(R) := \sup_{x\in B_{\rho_R}(R)} \int_{0<d(x,y)<F_R(x,y)} (\rho_R(x) - \rho_R(y))^2 J(x, \mathrm{d}y) < \infty;$
- $M_2(R) := \sup_{x\in X} \int_{d(x,y)\geq F_R(x,y)} J(x, \mathrm{d}y) < \infty.$

(ii) 各コンパクト集合 $K \subset X$ に対して, すべての十分大きな R について $K \subset B_{\rho_R}(R/4)$.

(iii) $\rho := \rho_1$ とおく. すべての十分大きな R に対して

$$0 < d(x, y) < F_R(x, y) \quad \Longrightarrow \quad |\rho_R(x) - \rho_R(y)| < \frac{1}{32} \cdot \frac{R}{\log m(B_\rho(R)) + \log\log R}.$$

関数 F_R は “飛躍の大きさ” を定め, 関数 ρ_R は “小さい飛躍” に適合した長さを表す.

$N_1(R)$ は $M_1(R) \leq N_1(R)$ を満たす単調非減少関数とし, $N_2(R)$ は $M_2(R) \leq N_2(R)$ を満たす単調非増加関数とする. $\mu \in [0, 2)$ を固定し, 関数 $\psi_\mu(R)$ を次で定める:

$$\psi_\mu(R) := \frac{R^{2-\mu}}{N_1(R) \cdot (\log m(B_\rho(R)) + \log\log R)}.$$

仮定 2. (i) すべての十分大きな R について $\psi_\mu(R)$ は単調増加かつ $\lim_{R\to\infty}\psi_\mu(R)=\infty$.
(ii) 定数 $\nu>1$ と $c>0$ が存在して

$$\psi_\mu(R)N_2(R)\le\frac{c}{(\log R)^\nu}.$$

仮定 2 (ii) は "大きい飛躍" の起こる頻度を制限する.

定理 1. 仮定 1, 2 の下, 定数 $c>0$ が存在して

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\rho(X_t)}{\psi_\mu^{-1}(ct)}\le 1\quad P_x\text{-a.s.},\ \ m\text{-a.e. } x\in X.$$

定理 1 はリーマン多様体上のブラウン運動に関する Grigor'yan (1999) の結果を純飛躍型マルコフ過程へ拡張している. 一方, Grigor'yan (1999) の結果は, リーマン多様体上のブラウン運動および対称拡散過程の枠組みで, Grigor'yan-Hsu (2009), Hsu-Qin (2010), Ouyang (2013) により一般化および精密化されている. これらの結果は, Huang (J. Theoret. Probab. に掲載予定), Huang-S. (2014) によって, 局所有限な重み付きグラフ上のマルコフ連鎖にも拡張されている.

例 1. (X,d) を d 次元ユークリッド空間とし, $|\cdot|$ をユークリッドノルムとする. m を d 次元ルベーグ測度とし, 積分核 $J(x,\mathrm{d}y)$ について次を仮定する.

- $J(x,\mathrm{d}y)$ は m に絶対連続であり, 定数 $\alpha\in(0,2)$ が存在して密度関数 $J(x,y)$ は

$$J(x,y)\le\frac{c(x,y)}{|x-y|^{d+\alpha}},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{diag}$$

を満たす. ただし, $c(x,y)$ は $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上の正値可測関数であり, 定数 $\delta\in[0,1)$ と $q\in[0,\alpha)$ が存在して次を満たすものとする:

$$c(x,y)\asymp\begin{cases}(1+|x|)^2(\log(2+|x|))^\delta+(1+|y|)^2(\log(2+|y|))^\delta, & |x-y|<1,\\ (1+|x|)^q+(1+|y|)^q, & |x-y|\ge 1.\end{cases}$$

$\mathbb{R}^d$ 上の台がコンパクトで滑らかな関数全体を $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とかく. すると, $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の二次形式 $(\mathcal{E},C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ は可閉となり, その閉包 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則ディリクレ形式となる (例えば Fukushima-Oshima-Takeda (2011) の Example 1.2.4 を参照せよ). $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が生成する対称マルコフ過程を $\mathbf{M}=(\{X_t\}_{t\ge0},\{P_x\}_{x\in\mathbb{R}^d})$ とかく.

(a) $\alpha-q>1-\delta$ ならば, 定数 $c>0$ が存在して

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|X_t-X_0|}{e^{ct^{\frac{1}{1-\delta}}}}\le 1\quad P_x\text{-a.s.},\ \ \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^d.$$

(b) $0<\alpha-q\le 1-\delta$ ならば, $0<\varepsilon<\alpha-q+\delta$ を満たす任意の正数 ε に対して定数 $c>0$ が存在して

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|X_t-X_0|}{e^{ct^{\frac{1}{\beta-q-\varepsilon}}}}\le 1\quad P_x\text{-a.s.},\ \ \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^d.$$

$\delta=1$ かつ $q\in[0,\alpha)$ のとき, 対称マルコフ過程 $\mathbf{M}$ は保存的である [S. (Forum Math. に掲載予定)]. しかし, 脱出レートの上限は分からない.

On instability of global path properties of symmetric Markov processes under Mosco convergence

Kohei Suzuki * Toshihiro Uemura†

In this talk, we consider

(1) sufficient conditions for the Mosco convergence of symmetric Lévy processes and symmetric diffusions with coefficients satisfying the locally uniformly elliptic condition.

(2) instability of global path properties under the Mosco convergence such as recurrence, transience and conservativeness.

First we explain the Lévy case of **(1)**. Let $\{\varphi_n\}$ be a sequence of the characteristic functions defined by symmetric convolution semigroups $\{\nu_t^n, t > 0\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$e^{-t\varphi_n(x)} := \widehat{\nu}_t^n(x)\Big(= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,y\rangle}\nu_t^n(dy)\Big), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Let φ be also a characteristic function defined by a symmetric convolution semigroup $\{\nu_t, t > 0\}$. The Dirichlet forms corresponding ν_t^n are defined by

$$\begin{cases} \mathcal{E}^n(u,v) &= \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u}(x)\overline{\widehat{v}}(x)\varphi_n(x)dx, \\ \mathcal{D}[\mathcal{E}^n] &= \Big\{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \big|\widehat{u}(x)\big|^2\varphi_n(x)dx < \infty\Big\}. \end{cases}$$

We assume that for each n, $\mathcal{E}^n(u,u) = \infty$ if $u \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{D}[\mathcal{E}^n]$. We assume the following condition on $\{\varphi_n\}$:

(C1) φ_n converges to a function φ locally in $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Then we show the following theorem:

Theorem 0.1 *Assume that* **(C1)** *holds. Then the Dirichlet forms* $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}[\mathcal{E}^n])$ *converges to the Dirichlet form corresponding to* φ *in the sense of Mosco.*

We now explain the diffusion case. Let $A_n(x) = (a_{ij}^n(x))$ and $A(x) = (a_{ij}(x))$ be $d \times d$ symmetric matrix valued functions on $\mathbb{R}^d$ satisfying the following conditions:

Assumption (A):

*Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Sakyo-Ku, Kyoto, 606-8502, Japan. E-mail: kohei0604@math.kyoto-u.ac.jp

†Department of Mathematics, Faculty of Engineering Science, Kansai University, Suita-Shi, Osaka, 564-8680 Japan. E-mail: t-uemura@kansai-u.ac.jp

(A1) For any compact set $K \subset \mathbb{R}^d$, there exists a constant $\lambda = \lambda(K) > 0$ so that, for any $n \geq 1$ and $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$0 < \frac{1}{\lambda}|\xi|^2 \leq (A_n(x)\xi, \xi) \leq \lambda|\xi|^2, \quad 0 < \frac{1}{\lambda}|\xi|^2 \leq (A(x)\xi, \xi) \quad dx\text{-}a.e. \text{ on } K;$$

(A2) For any compact set K,

$$\int_K \|A_n(x) - A(x)\| dx \to 0 \quad (n \to \infty),$$

where $\|A(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij}^2(x)}$.

Consider quadratic forms on $L^2(\mathbb{R}^d)$ as follows:

$$\mathcal{E}^n(u, u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (A_n(x)\nabla u, \nabla u)dx, \quad \mathcal{E}(u, u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (A(x)\nabla u, \nabla u)dx.$$

for $n \in \mathbb{N}$ and appropriate functions u. Under the assumption **(A)**, it is then known that $(\mathcal{E}^n, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ and $(\mathcal{E}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ are Markovian closable forms on $L^2(\mathbb{R}^d)$. So they become regular symmetric Dirichlet forms $(\mathcal{E}^n, \mathcal{F}^n)$ and $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ on $L^2(\mathbb{R}^d)$. We then obtain:

Theorem 0.2 *Assume that* **(A)** *holds. Then the Dirichlet forms $(\mathcal{E}^n, \mathcal{F}^n)$ converges to the Dirichlet form corresponding to $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ in the sense of Mosco.*

In [M94], Mosco investigated similar sufficient conditions for the Mosco convergence, but it seems to be difficult to check *the compactly injected condition* he imposed there. Of course, considering the subsequent development on the convergence of Dirichlet forms (see *e.g.* [KS03, Kol06]), our conditions are rather restrictive because the basis L^2-space is fixed.

In the rest of the talk, we explain about **(2)**. By using Theorem 1.1 and Theorem 1.2, we give several examples such as

(i) Recurrent Dirichlet forms converge to a transience Dirichlet form, and vice versa.

(ii) Conservative Dirichlet forms converge to a non-conservative Dirichlet form, and vice versa.

References

[FOT11] Fukushima, M., Oshima, Y. and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, 2nd revised and extended edition, de Gruyter, 2011

[Kol06] A.V. Kolesnikov, Mosco convergence of Dirichlet forms in infinite dimensions with changing reference measures, *J. Func. Anal.*, **230** (2006), 382-418

[KS03] Kuwae, K. and T. Shioya, Convergence of Spectral Stuctures, *Commun. Anal. Geom.*, **11** (2003), 599-673

[M94] Mosco, U., Composite media and asymptotic Dirichlet forms, *Journal of Functional Analysis*, **123** (1994), 368-421

[S99] Sato, K., *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, 1999

[U04] Uemura, T., On symmetric stable-like processes: some path properties and generators, *Journal of Theoretical Probability*, **17** (2004), 541-555.

ON A STABILITY FOR GENERALIZED FEYNMAN-KAC SEMIGROUPS OF STABLE-LIKE PROCESSES

金大弘・桑江一洋 (熊本大学自然科学研究科)

Abstract. We give a necessary and sufficient condition on the global stability of the fundamental solution for generalized Feynman-Kac semigroup in the framework of (relativistic) stable-like processes. The Feynman-Kac functional involves continuous additive functionals locally of zero energy under mild conditions for related measures appeared in the perturbations.

1. Preliminary

Let $\mathbf{X}$ be a symmetric α-stable-like process on $\mathbb{R}^d$ with $\alpha \in]0,2[$ (see [1]), whose Dirichlet form $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ on $L^2(\mathbb{R}^d)$ is given by

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{(f(x)-f(y))^2}{|x-y|^{d+\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \right\}$$

$$\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))c(x,y)}{|x-y|^{d+\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad f,g \in \mathcal{F},$$

where $c(x,y)$ be a symmetric measurable function on $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ satisfying $c_1 \le c(x,y) \le c_2$ for $x,y\in\mathbb{R}^d$ for some $0<c_1<c_2$. It is shown in [1] that $\mathbf{X}$ is conservative and admits a locally Hölder continuous transition density function $p_t(x,y)$ on $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$. The latter in particular implies that $\mathbf{X}$ can be modified to start from every point in $\mathbb{R}^d$ as a Feller process. We assume $d>\alpha$, i.e., $\mathbf{X}$ is transient. Moreover, the heat kernel $p_t(x,y)$ of $\mathbf{X}$ satisfies $p_t(x,y) \approx \left(t^{-d/\alpha} \wedge \frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right)$ for all $(t,x,y)\in]0,\infty[\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ by way of the scaling property of the heat kernel of the symmetric α-stable process (see the proof of in [1, Proposition 4.1]).

For $\beta>0$, denote by $R_\beta(x,y) = \int_0^\infty e^{-\beta t}p_t(x,y)\mathrm{d}t$, $x,y\in\mathbb{R}^d$, the β-order resolvent kernel. For a non-negative Borel measure ν, we write $R_\beta\nu(x) := \int_{\mathbb{R}^d} R_\beta(x,y)\nu(\mathrm{d}y)$, $R\nu(x) := R_0\nu(x)$ and $R_\beta f(x) = R_\beta\nu(x)$ when $\nu(\mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x$ for any $f\in\mathcal{B}_+(\mathbb{R}^d)$ or $f\in\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$. The space of bounded continuous functions on $\mathbb{R}^d$ will be denoted as $C_b(\mathbb{R}^d)$. The process $\mathbf{X}$ has the resolvent strong Feller property (**(RSF)** in abbreviation), that is, $R_\beta(\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)) \subset C_b(\mathbb{R}^d)$ for any $\beta>0$. Let $\mathbb{R}^d\cup\{\partial\}$ be the one point compactification of $\mathbb{R}^d$. An increasing sequence $\{F_k\}$ of closed sets is said to be a *strict $\mathcal{E}$-nest* if $\mathbf{P}_x(\lim_{k\to\infty}\sigma_{F_k^c}=\infty)=1$ a.e. $x\in\mathbb{R}^d$. Here $\sigma_{F_k^c} := \inf\{t>0 \mid X_t\in\mathbb{R}^d\setminus F_k\}$ is the first hitting time of X_t to $F_k^c := \mathbb{R}^d\setminus F_k$. A function f defined on $\mathbb{R}^d\cup\{\partial\}$ is said to be *strictly $\mathcal{E}$-quasi continuous* if there exists a strict $\mathcal{E}$-nest $\{F_k\}$ of closed sets such that $f|_{F_k\cup\{\partial\}}$ is continuous for each $k\in\mathbb{N}$. Denote by $QC(\mathbb{R}^d\cup\{\partial\})$ the family of all strictly $\mathcal{E}$-quasi continuous functions on $\mathbb{R}^d\cup\{\partial\}$.

Let $S_1(\mathbf{X})$ be the family of positive smooth measures in the strict sense ([2]). A measure $\nu\in S_1(\mathbf{X})$ is said to be *of Dynkin class* (resp. *Green-bounded*) *with respect to* $\mathbf{X}$ if $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} R_\beta\nu(x)<\infty$ for some $\beta>0$ (resp. $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} R\nu(x)<\infty$). A measure $\nu\in S_1(\mathbf{X})$ is said to be *of Kato class with respect to* $\mathbf{X}$ if $\lim_{\beta\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}R_\beta\nu(x)=0$. Denote by $S_D^1(\mathbf{X})$ (resp. $S_{D_0}^1(\mathbf{X})$) the family of measures of Dynkin class (resp. of Green-bounded measures) and by $S_K^1(\mathbf{X})$ the family of measures of Kato class. Clearly, $S_K^1(\mathbf{X})\subset S_D^1(\mathbf{X})$ and $S_{D_0}^1(\mathbf{X})\subset S_D^1(\mathbf{X})$.

The Lévy system (N, H) of $\mathbf{X}$ is given by $N(x,\mathrm{d}y) = 2c(x,y)|x-y|^{-(d+\alpha)}\mathrm{d}y$ and $H_t = t$, i.e., for any nonnegative Borel function ϕ on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ vanishing on the diagonal and any $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{E}_x\left[\sum_{s\le t}\phi(X_{s-},X_s)\right] = \mathbf{E}_x\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\frac{2c(X_s,y)\phi(X_s,y)}{|X_s-y|^{d+\alpha}}\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right]$. To simplify notation, we will write $\mu_\phi(\mathrm{d}x) := \left\{\int_{\mathbb{R}^d}\frac{2c(x,y)\phi(x,y)}{|x-y|^{d+\alpha}}\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x$.

Take a bounded finely continuous function $u \in \mathcal{F}_{\rm loc}\cap QC(\mathbb{R}^d\cup\{\partial\})$. In [3, Theorem 6.2(1)], the authors proved under the condition $\mu_{\langle u\rangle} \in S_D^1(\mathbf{X})$ that the additive functional $u(X_t) - u(X_0)$ admits the following decomposition:

$$u(X_t) - u(X_0) = M_t^u + N_t^u \quad t \in [0,+\infty[\quad \mathbf{P}_x\text{-a.s.} \tag{1.1}$$

for all $x \in \mathbb{R}^d$, where M^u is a square integrable martingale additive functional in the strict sense, $\mu_{\langle u\rangle}$ is the Revuz measure associated with the quadratic variational processe (or the sharp bracket PCAF) $\langle M^u\rangle$ of M^u, and N^u is a continuous additive functional (CAF in abbreviation) locally of zero energy in the strict sense.

2. Results

Let F be a bounded symmetric Borel function on $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ vanishing on the diagonal. Set $F_\pm := \max\{\pm F, 0\}$. We say that $F := F_+ - F_-$ is in the *class* $J_1(\mathbf{X})$ (resp. $J_D^1(\mathbf{X})$ and $J_{D_0}^1(\mathbf{X})$) if $\mu_{|F|} \in S_1(\mathbf{X})$ (resp. $S_D^1(\mathbf{X})$ and $S_{D_0}^1(\mathbf{X})$). Any such an F has an expression of the form $F = F_1 - F_2$, where each F_i $(i = 1,2)$ is a symmetric non-negative bounded Borel function on $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ vanishing on the diagonal. Note that if $F_1 + F_2 \in J_1(\mathbf{X})$ (resp. $J_D^1(\mathbf{X})$ and $J_{D_0}^1(\mathbf{X})$), then $F \in J_1(\mathbf{X})$ (resp. $J_D^1(\mathbf{X})$ and $J_{D_0}^1(\mathbf{X})$). In this case, the following A^F can be defined as an additive functional in the strict sense: $A_t^F = A_t^{F_1} - A_t^{F_2}$, $\quad A_t^{F_i} := \sum_{0<s\le t}F_i(X_{s-},X_s)(i=1,2)$. For a bounded $u \in \mathcal{F}_{\rm loc}$ with $\mu_{\langle u\rangle} \in S_1(\mathbf{X})$ and $F_1 + F_2 \in J_1(\mathbf{X})$, we set $F^u(x,y) := F(x,y) + \{-u(y) - (-u(x))\} = F(x,y) + u(x) - u(y)$ and $G^u = e^{F^u} - 1$ with identifying $F^0 = F$ and $G^0 = G := e^F - 1$. Since $(F^u)^2 \in J_1(\mathbf{X})$, one can consider a purely discontinuous locally square integrable local martingale additive functional M^{F^u} defined by $M_t^{F^u} = M_t^F + M_t^{-u}$, where $M_t^F = A_t^F - A_t^{\mu_F}$, $t \in [0,+\infty[$. Moreover, we see that $G^u - F^u \in J_1(\mathbf{X})$ and $(G^u)^2 \in J_1(\mathbf{X})$, respectively. Therefore we can also consider a purely discontinuous locally square integrable local martingale additive functional M^{G^u} defined by $M_t^{G^u} = M_t^{F^u} + A_t^{G^u-F^u} - A_t^{\mu_{G^u-F^u}}$ for $t \in [0,+\infty[$. Let $Y_t := \mathrm{Exp}(M^{G^u})_t$ be the Doléans-Dade exponential of $M_t^{G^u}$, that is, Y_t is the unique solution of $Y_t = 1 + \int_0^t Y_{s-}\mathrm{d}M_s^{G^u}$ for $t \in [0,+\infty[$, $\mathbf{P}_x$-a.s. Then Y_t can be represented as $Y_t = \exp\left(M_t^{F^u} - A_t^{\mu_{G^u-F^u}}\right)$ Note that Y_t is a positive local martingale, therefore it is a supermartingale multiplicative functional for all $t \in [0,+\infty[$. Let $\mathbf{Y} = (\Omega, \widetilde{\mathcal{F}}_\infty, \widetilde{\mathcal{F}}_t, \widetilde{X}_t, \mathbf{P}_x^Y)$ be the transformed process of $\mathbf{X}$ by Y_t. The transition semigroup $\{P_t^Y\}_{t\ge0}$ of $\mathbf{Y}$ is defined by $P_t^Y f(x) = \mathbf{E}_x^Y[f(\widetilde{X}_t)] := \mathbf{E}_x[Y_t f(X_t)]$.

Consider the non-local Feynman-Kac transforms by the additive functionals $A := N^u + A^F$ of the form $e_A(t) := \exp(A_t)$, $\quad t \ge 0$. Let $\mathbf{F}$ be a non-local linear operator defined by $\mathbf{F}f(x) := \int_{\mathbb{R}^d}\frac{2c(x,y)G(x,y)f(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}\mathrm{d}y$, $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$. $e_A(t)$ defines a semigroup $P_t^A f(x) := \mathbf{E}_x[e_A(t)f(X_t)]$ having infinitesimal generator of the formal form $\mathcal{H} := \mathcal{L} + \mathcal{L}u + d\mathbf{F}$, where $\mathcal{L}$ is the infinitesimal generator for the semigroup of $\mathbf{X}$ and $d\mathbf{F}$ denotes the signed-measure valued operator defined by $d\mathbf{F}f := \mathbf{F}f(x)\mathrm{d}x$.

Define the measure $\mu_V := \mu_V^1 - \mu_V^2$ with $\mu_V^1 := \mu_{G^u-F^u+F_1}$ and $\mu_V^2 := \mu_{F_2}$. By $Y_t = \exp\left(M_t^{F^u} - A_t^{\mu_{G^u-F^u}}\right)$, we see that for all $t \in [0,+\infty[$,

$$e_A(t) = e^{u(X_t)-u(X_0)}\exp\left(-M_t^u + A_t^F\right) = e^{u(X_t)-u(X_0)}Y_t\exp\left(A_t^{\mu_V}\right) \tag{2.1}$$

which implies that for $x \in \mathbb{R}^d$ and $f \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}^d)$,

$$P_t^A f(x) := \mathbf{E}_x\left[e_A(t)f(X_t)\right] = e^{-u(x)}\mathbf{E}_x^Y\left[\exp\left(A_t^{\mu_V}\right)(e^u f)(\widetilde{X}_t)\right]. \tag{2.2}$$

It is easy to see that $\mu_V^1, \mu_V^2 \in S_D^1(\mathbf{X})$ whenever $\mu_{\langle u\rangle} \in S_D^1(\mathbf{X})$ and $F_1+F_2 \in J_D^1(\mathbf{X})$ hold. Define the quadratic form $(\mathcal{Q},\mathcal{F})$ under $\mu_{\langle u\rangle} \in S_D^1(\mathbf{X})$ and $F_1+F_2 \in J_D^1(\mathbf{X})$:

$$(2.3)\quad \mathcal{Q}(f,g) := \mathcal{E}(f,g) + \mathcal{E}(u,fg) - \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{2f(x)g(y)c(x,y)G(x,y)}{|x-y|^{d+\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad f,g \in \mathcal{F}.$$

For $\mu_V := \mu_V^1 - \mu_V^2$ with $\mu_{\langle u\rangle} \in S_D^1(\mathbf{X})$ and $F_1+F_2 \in J_D^1(\mathbf{X})$, we set

$$(2.4)\qquad \lambda^{\mathcal{Q}}(\mu_V^1) := \inf\left\{ \mathcal{Q}(f,f) \;\middle|\; f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d} f^2 d\mu_V^1 = 1 \right\}.$$

$\nu \in S_1(\mathbf{X})$ is said to be *of Green-tight Kato class with respect to* $\mathbf{X}$ if $\nu \in S_K^1(\mathbf{X})$ and for any $\varepsilon > 0$ there exists a compact subset $K = K(\varepsilon)$ of $\mathbb{R}^d$ such that $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} R(\mathbf{1}_{K^c}\nu)(x) < \varepsilon$. We denote by $S_{K_\infty}^1(\mathbf{X})$ the family of Green-tight Kato class measures. Our main theorem is the following:

Theorem 2.1. *Let $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \cap QC(\mathbb{R}^d \cup \{\partial\})$ be a bounded finely continuous (nearly) Borel function on $\mathbb{R}^d$. Assume $\mu_{\langle u\rangle} + \mu_{F_1} \in S_{K_\infty}^1(\mathbf{X})$ and $\mu_{F_2} \in S_{D_0}^1(\mathbf{X})$. Then the following are equivalent each other.*

(1) $\lambda^{\mathcal{Q}}(\mu_V^1) > 0$.

(2) *There exists a constant $C = C(\alpha,d,u,F) > 0$ such that $\|P_t^A\|_{1,\infty} \le Ct^{-d/\alpha}$ for all $t > 0$.*

(3) *There exists a constant $C_i = C_i(\alpha,d,u,F) > 0,\ i = 1,2$ such that*

$$C_1\left(t^{-d/\alpha} \wedge \frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right) \le p_t^A(x,y) \le C_2\left(t^{-d/\alpha} \wedge \frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right)$$

for all $(t,x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$.

The assertion of Theorem 2.1 remains valid for the case involving $A_t^{\mu_1-\mu_2}$ with $\mu_1 \in S_{CK_\infty}^1(\mathbf{X})$, $\mu_2 \in S_{D_0}^1(\mathbf{X})$ and it extends [9]. A similar result involving $A_t^{\mu_1-\mu_2}$ as above and N_t^u with $\mu_{\langle u\rangle} \in S_{CK_\infty}^1(\mathbf{X})$ also holds in the framework of symmetric relativistic α-stable-like process extending [10] or diffusion processes under uniform elliptic condition.

References

[1] Z.-Q. Chen and T. Kumagai, *Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets*, Stochastic processes and their Applications **108** (2003), no. 1, 23–62.

[2] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, Second revised and extended edition. de Gruyter Studies in Mathematics, **19**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.

[3] D. Kim, K. Kuwae and Y. Tawara, *Large deviation principle for generalized Feynman-Kac functionals and its applications*, preprint (2012).

[4] D. Kim and K. Kuwae, *Analytic characterizations of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals*, preprint (2012).

[5] D. Kim and K. Kuwae, *On a stability of heat kernel estimates under generalized non-local Feynman-Kac perturbations for stable-like processes*, preprint (2013).

[6] D. Kim and K. Kuwae, *General analytic characterization of gaugeability for Feynman-Kac functionals*, preprint (2013).

[7] K. Kuwae and M. Takahashi, *Kato class functions of Markov processes under ultracontractivity*, Potential theory in Matsue, 193–202, Adv. Stud. Pure Math. **44**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.

[8] P. Stollmann and J. Voigt, *Perturbation of Dirichlet forms by measures*, Potential Anal. **5** (1996), no. 2, 109–138.

[9] M. Takeda, *Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric α-stable processes*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 9, 2729–2738.

[10] M. Wada, *Perturbation of Dirichlet forms and the stablility of fundamental solutions*, to appear in Tohoku Math. J. (2013).

On BMD Schwarz kernels and Villat's kernels in Komatu-Loewner equations

Masatoshi FUKUSHIMA, Osaka University and Hiroshi KANEKO, Tokyo University of Science

The classical Loewner differential equation is formulated with univalent function theoretic relevance to a family of simply connected domains, which was originally a core scheme for affirmative resolution of the Bieberbach conjecture, is attracting new attention since Oded Schramm launched in 2000 the stochastic Loewner evolution (SLE) based on it. The Loewner equation itself has been extended to ones with relevance to various families of domains based on canonical domains of multiple connectivity after the works by Y. Komatu in 1943 and 1950. The scheme is much later extended to the one based on the the circularly slit disk by R.O. Bauer and R.M. Friedrich in [BF1] and further in [BF2] to the ones based on circularly slit annulus and as well on standard slit domain, namely, a domain obtained from the upper half plane by removing a finite number of disjoint line segments parallel to the x-axis. However, except for the annulus case, the Komatu-Loewner differential equation has been rigorously obtained only in the left derivative sense.

For improving the situation where the right derivative was missing in rigorous sense, recently Z.-Q. Chen, M. Fukushima and S.Rhode demonstrate that the K-L equation for the standard slit domain is a genuine ODE by using a probabilistic method, and that the equation admits an expression with the complex Poisson kernel of the Brownian motion with darning (BMD).

The purpose of the present research is to investigate counterparts of K-L equations baed on the annulus and circularly slit annulus. One of the objectives is building a rigorous scheme on the K-L equation with univalent function theoretic relevance to a family of doubly connected domains based on annulus by applying Villat's kernel and a variant of Carathéodory convergence theorem.

Let us take $\mathbb{A}_q = \{z \in \mathbb{C} \mid q < |z| < 1\}$ and define *Villat's function* $\mathcal{K}_q$ for q with $q < 1$ by

$$\mathcal{K}_q(z) \quad = \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1+q^{2n}z}{1-q^{2n}z} = \frac{1+z}{1-z} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2n}}{q^{2n}-z} + \frac{q^{2n}z}{1-q^{2n}z}\right), \quad z \in \mathbb{A}_q, \tag{1}$$

where the expression on the right-hand side follows from $\dfrac{q^{2n}}{q^{2n}-z} + \dfrac{q^{2n}z}{1-q^{2n}z} = \dfrac{1}{1-q^{-2n}z} + \dfrac{q^{2n}z}{1+q^{2n}z} = \dfrac{1}{1-q^{2n}z} + \dfrac{q^{-2n}z}{1+q^{-2n}z}$. *Villat's kernel* is then defined by

$$\mathcal{K}_q(z,\zeta) = \mathcal{K}_q(z/\zeta) = \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \mathcal{L}_q(z/\zeta) \text{ with } \mathcal{L}_q(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2n}}{q^{2n}-z} + \frac{q^{2n}z}{1-q^{2n}z}\right) \tag{2}$$

for $z \in \mathbb{A}_q$ and $\zeta \in \partial\mathbb{A}_q$. Based on the following fact rooted in [V], we can identify Villat's kernel $K_q(z,\zeta)$ with a *BMD Schwarz kernel* a kernel of a probabilistic significance analogous to the one in [CFR]:

Schwarz problem Given $\phi \in C(\partial\mathbb{A}_q, \mathbb{R})$ and $c \in \mathbb{R}$, find a holomorphic function $f(z)$ on $\mathbb{A}_q$ such that

$$\Re f \in C(\overline{\mathbb{A}}_q, \mathbb{R}), \quad \Re f = \phi \text{ on } \partial\mathbb{A}_q \quad \text{and} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho} \Im f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = c \text{ for every } \rho \in (q,1).$$

Answer If f is holomorphic on $\mathbb{A}_q$ and $f \in C(\overline{\mathbb{A}}_q, \mathbb{C})$, then

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \mathbb{A}_q} \phi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta})d\theta = \int_0^{2\pi} \phi(qe^{i\theta})d\theta \right) \tag{3}$$

is satisfied for $\phi = \Re f|_{\partial \mathbb{A}_q}$ and

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \mathbb{A}_q} \phi(\zeta)K_q(z,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=q} \phi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + ic, \quad z \in \mathbb{A}_q \tag{4}$$

where $c = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=q} \Im f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$. Conversely, given $\phi \in C(\partial \mathbb{A}_q, \mathbb{R})$ satisfying (3) and $c \in \mathbb{R}$, there exists a unique solution f of the Schwarz problem and f is provided by (4).

BMD on a multiply connected planar domain is roughly speaking a reflecting Brownian motion obtained from the Brownian motion absorbed on the outer boundary by rendering each hole into a singly point. The related BMD Poisson kernel then admits its harmonic conjugate uniquely up to an additive constant. A BMD Schwarz kernel is by definition an analytic function whose real part is the BMD Poisson kernel. Another objective of this research is to derive a K-L equation in the left derivative sense for the circularly silt annuli in terms of a normalized BMD Schwarz kernel.

For a Jordan arc $\gamma = \{\gamma(t) \mid 0_{Q_\gamma}\}$ satisfying $\gamma(0) \in \partial\mathbb{D},\ \gamma(0, t_{Q_\gamma}] \subset \mathbb{A}_Q = \{z \in \mathbb{C} \mid Q < |z| < 1\}$ with a fixed Q $(0 < Q < 1)$. By the monotonicity of the modulus (cf. [G, V, 1, Theorem 3]), there exists a strictly increasing function $\alpha : [0, t_{Q_\gamma}] \mapsto [Q, Q_\gamma]$ $(\alpha(t_{Q_\gamma}) = Q_\gamma < 1)$ with the following property: if $\alpha(t) = q$, then there is a unique univalent function f_q from $\mathbb{A}_q$ onto the annulus with snick $\mathbb{A}_Q \setminus \gamma[0,t]$ determined by the normalization condition $f_q(q) = Q$.

We first reparametrize the curve γ as $\{\widetilde{\gamma}(q) \mid q \in \mathrm{dom}(\widetilde{\gamma})\}$ on the variable q basis by setting $\widetilde{\gamma}(q) = \gamma(\alpha^{-1}(q))$, where $\mathrm{dom}(\widetilde{\gamma}) = \alpha[0, t_{Q_\gamma}] \subset [Q, Q_\gamma]$. In order mainly to discuss the right derivative at q^* in the K-L equation with relevance to the family of the annuli with snick, we take $0 \le t^* < t \le t_{Q_\gamma}$ and put $q = \alpha(t),\ q^* = \alpha(t^*)$. Since $Q \le q^* < q \le Q_\gamma$, a univalent function

$$\Phi_{q^*q} = f_{q^*}^{-1} \circ f_q \tag{5}$$

from $\mathbb{A}_q$ onto $B_{q^*q} = A_{q^*} \setminus S_{q^*q}$ satisfying $\Phi_{q^*q}(q) = q^*$ is defined, where $S_{q^*q} = f_{q^*}^{-1}\gamma[t^*, t]$. We take the point $\lambda(q)$ of $\partial\mathbb{D}$ given as the pre-image $\lambda(q) = f_q^{-1}(\widetilde{\gamma}(q))$ of the tip of the curve $\gamma[0,t]$ under the univalent function f_q. Then the pre-image $\delta_{q^*q} = \Phi_{q^*q}^{-1}(S_{q^*q})$ is a subarc $\{e^{i\theta} \mid \beta_1(t^*, t) < \theta < \beta_2(t^*, t)\}$ of the outer circle $\partial\mathbb{D}$ of $\mathbb{A}_q$ containing the point $\lambda(q)$. We consider the family of maps

$$g_q = \Phi_{qQ_\gamma}\ (= f_q^{-1} \circ f_{Q_\gamma}) \quad q = \alpha(t), \quad t \in [0, t_{Q_\gamma}] \tag{6}$$

to pose the K-L equation in rigorous sense. Our main objective is to prove the following assertion:

Theorem 1. *The strictly increasing function α gives a continuous bijection from $[0, t_{Q_\gamma}]$ to $[Q, Q_\gamma]$, the function $g_q(z)$ defined on $\mathbb{A}_{Q_\gamma}$ by (6) is continuously differentiable in $q \in [Q, Q_\gamma]$ and satisfies*

$$\frac{\partial \log g_q(z)}{\partial \log q} = \mathcal{K}_q(g_q(z), \lambda(q)) - i\Im\mathcal{K}_q(q, \lambda(q)), \quad z \in \mathbb{A}_{Q_\gamma}, \quad Q \le q \le Q_\gamma.$$

We introduce a family $\mathcal{D}$ of doubly connected domains so that it contains a family of annuli with snick near outer boundary. Later on we will see the continuity of the modulus parameter of domain follows from a kernel convergence of domains in $\mathcal{D}$, which is induced by extension and shrink of snick. Now we consider $\mathbb{A}(s,t) = \{w \in \mathbb{C} \mid s < |w| < t\}$ for $0 < s < t$ and introduce the following two conditions on a doubly connected domain D in $\mathbb{C}$:

(i) $D \subset \mathbb{A}(1,a)$ for some $a > 1$,

(ii) D admits $\partial\mathbb{D}$ as one of the boundary components of D.

Let $\mathcal{D} = \{D \mid D$ is a doubly connected domain satisfying (i) and (ii)$\}$. For a sequence $\{D_n\}$ in $\mathcal{D}$, we define its kernel as follows. Suppose that $D_0 \subset \cap_{n=1}^{\infty} D_n$ for some $D_0 \in \mathcal{D}$. Then the *kernel* of $\{D_n\}$ is defined as the maximal doubly connected domain D in $\mathbb{D}^c$ such that D satisfies (ii) and any compact subset of D is contained in D_n for sufficiently large n. Otherwise, the kernel is defined to be $\partial\mathbb{D}$. A sequence $\{D_n\}$ in $\mathcal{D}$ is said to be *convergent* to D in the sense of *kernel convergence*, if D is the kernel of $\{D_n\}$ and the kernel of any subsequence of $\{D_n\}$ coincides with D. A sequence $\{D_n\}$ in $\mathcal{D}$ is said to be *uniformly bounded* if $D_n \subset \mathbb{A}(1,a),\ n \geq 1$, for some $a > 1$.

Carathéodory-Komatu Convergence Theorem. Let $\{D_n\}$ be a uniformly bounded sequence of doubly connected domains in $\mathcal{D}$ and let $\{R_n\}$ be a sequence with $R_n > 1,\ n \geq 1$, such that there is a biholomorphic map F_n from $\mathbb{A}(1,R_n)$ onto D_n satisfying $F_n(1) = 1$ for every n. Then the kernel convergence of $\{D_n\}$ to a doubly connected domain D in $\mathcal{D}$ implies that the sequence $\{R_n\}$ converges to R determined by the modulus $\log R$ of D and that the sequence $\{F_n\}$ converges locally uniformly to a biholomorphic map F from $\mathbb{A}(1,R)$ onto D.

References

[BF1] R.O. Bauer and R.M. Friedrich, On radial stochastic Loewner evolution in multiply connected domains, *J. Funct. Anal.* **237**(2006), 565-588

[BF2] R.O. Bauer and R.M. Friedrich, On chordal and bilateral SLE in multiply connected domains, *Math. Z.* **258**(2008), 241-265

[CF1] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, *Symmetric Markov Processes, time Changes, and Boundary Theory*, Princeton University Press, 2012

[CF2] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, On stochastic Komatu-Loewner evolutions and a BMD domain constant, Preprint

[CFR] Z.-Q. Chen, M. Fukushima and S. Rhode, Chordal Komatu-Loewner equation and Brownian motion with darning in multply connected domains, Preprint

[G] G.M. Goluzin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, American Mathematical Society Translations 26, Providence, 1969

[K1] Y. Komatu, Untersuchungen über konforme Abbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* **25**(1943), 1-42.

[K2] Y. Komatu, *Theory of Conformal Mapping*, (in Japanese) Kyouritu Shuppan, vol.1 1944, vol.2 1949

[V] H. Villat, *Lecons sur l'hydrodynamique*, Gautiers-Villas, 1929, Paris

Local risk-minimization for Lévy markets

Takuji Arai*and Ryoichi Suzuki†

Abstract

We consider a financial market whose risky asset price process is given by a solution to an SDE driven by a Lévy process. Locally risk-minimizing, a well-known hedging method for contingent claims in a quadratic way, is discussed by using Malliavin calculus, and some examples are introduced.

1 Preliminaries

Let X be a Lévy process represented as $X_t = \sigma W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} z\widetilde{N}(ds, dz)$, where W is a 1-dimensional standard Brownian motion, $\sigma > 0$, $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$; and ν is a Lévy measure with $\int_{\mathbb{R}_0} z^2\nu(dz) < \infty$. Here N is the Poisson random measure defined by $N(t, A) = \sum_{s \le t} \mathbf{1}_A(\Delta X_s)$ for any $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$ and any $t \in [0, T]$, and $\widetilde{N}(dt, dz) := N(dt, dz) - \nu(dz)dt$.

The risky asset price process is given by a solution to the following SDE:

$$dS_t = S_{t-}\left[\alpha_t dt + \beta_t dW_t + \int_{\mathbb{R}_0} \gamma_{t,z}\widetilde{N}(dt, dz)\right], \quad S_0 > 0,$$

where α, β and γ are predictable processes with some conditions.

Definition 1.1 *1. Θ_S denotes the space of all $\mathbb{R}$-valued predictable processes ξ satisfying $\mathbb{E}[\int_0^T \xi_t^2 d\langle M\rangle_t + (\int_0^T |\xi_t dA_t|)^2] < \infty$, where $dM_t = S_{t-}(\beta_t dW_t + \int_{\mathbb{R}_0} \gamma_{t,z}\widetilde{N}(dt, dz))$ and $dA_t = S_{t-}\alpha_t dt$.*

2. *An **L^2-strategy** is given by $\varphi = (\xi, \eta)$, where $\xi \in \Theta_S$ and η is an adapted process such that $V(\varphi) := \xi S + \eta$ is a right continuous process with $\mathbb{E}[V_t^2(\varphi)] < \infty$ for every $t \in [0, T]$. Note that ξ_t (resp. η_t) represents the amount of units of the risky asset (resp. the risk-free asset) an investor holds at time t.*

3. *For $F \in L^2(\mathbb{P})$, the process $C^F(\varphi)$ defined by $C_t^F(\varphi) := F1_{\{t=T\}} + V_t(\varphi) - \int_0^t \xi_s dS_s$ is called the **cost process** of $\varphi = (\xi, \eta)$ for F.*

4. *An L^2-strategy φ is said **locally risk-minimizing** (LRM, for short) for F if $V_T(\varphi) = 0$ and $C^F(\varphi)$ is a martingale orthogonal to M.*

5. *$F \in L^2(\mathbb{P})$ admits a **Föllmer-Schweizer decomposition** (FS decomposition, for short) if it can be described by $F = F_0 + \int_0^T \xi_t^F dS_t + L_T^F$, where $F_0 \in \mathbb{R}$, $\xi^F \in \Theta_S$ and L^F is a square-integrable martingale orthogonal to M with $L_0^F = 0$.*

6. *A martingale measure $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ is called **minimal martingale measure** (MMM, for short) if any square-integrable $\mathbb{P}$-martingale orthogonal to M remains a martingale under $\mathbb{P}^*$.*

For more details on LRM, see [1] and [2]. We have the following:

1. An LRM $\varphi = (\xi, \eta)$ for F exists if and only if F admits an FS decomposition, and its relationship is given by $\xi_t = \xi_t^F$ and $\eta_t = F_0 + \int_0^t \xi_s^F dS_s + L_t^F - F1_{\{t=T\}} - \xi_t^F S_t$.

*Department of Economics, Keio University
†Department of Mathematics, Keio University

2. An MMM $\mathbb{P}^*$ exists, and its density process Z is given by $\mathcal{E}(-\int \lambda dM)$.

3. Any $F \in L^2(\mathbb{P})$ admits an FS decomposition.

Assuming that $Z_T F \in L^2(\mathbb{P})$, we have

$$F = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[F] + \int_0^T h_t^0 dW_t^{\mathbb{P}^*} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} h_{t,z}^1 \widetilde{N}^{\mathbb{P}^*}(dt, dz)$$

for some predictable processes h_t^0 and $h_{t,z}^1$, where $\lambda_t := \dfrac{\alpha_t}{S_{t-}(\beta_t^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \gamma_{t,z}^2 \nu(dz))}$, $u_t := \lambda_t S_{t-}\beta_t$, $\theta_{t,z} := \lambda_t S_{t-}\gamma_{t,z}$, $dW_t^{\mathbb{P}^*} := dW_t + u_t dt$ and $\widetilde{N}^{\mathbb{P}^*}(dt,dz) := \widetilde{N}(dt,dz) + \theta_{t,z}\nu(dz)dt$. Note that $W^{\mathbb{P}^*}$ and $\widetilde{N}^{\mathbb{P}^*}$ are a Brownian motion and the compensated Poisson random measure of N under $\mathbb{P}^*$, respectively.

Theorem 1.2 *If* $\mathbb{E}\left[\int_0^T \{(h_t^0)^2 + \int_{\mathbb{R}_0} (h_{t,z}^1)^2 \nu(dz)\} dt\right] < \infty$, *then* $\xi_t^F = \frac{\lambda_t}{\alpha_t}\{h_t^0 \beta_t + \int_{\mathbb{R}_0} h_{t,z}^1 \gamma_{t,z}\nu(dz)\}$.

2 Main theorem

Definition 2.1 *1.* $q(E) := \sigma^2 \int_{E(0)} dt + \int_{E'} z^2 \nu(dz)dt$, *and* $Q(E) := \sigma \int_{E(0)} dW_t + \int_{E'} z\widetilde{N}(dt,dz)$, *where* $E \in \mathcal{B}([0,T] \times \mathbb{R})$, $E(0) = \{t \in [0,T]; (t,0) \in E\}$ *and* $E' := E - E(0)$.

2. Denote by $L^2_{T,q,n}$ *the set of product measurable, deterministic functions* h *with*

$$\|h\|^2_{L^2_{T,q,n}} = \int_{([0,T]\times\mathbb{R})^n} |h((t_1,z_1),\cdots,(t_n,z_n))|^2 q^{\otimes n}(dt,dz) < \infty.$$

3. We define $I_n(h) := \int_{([0,T]\times\mathbb{R})^n} h((t_1,z_1),\cdots,(t_n,z_n)) Q^{\otimes n}(dt,dz)$ *for* $h \in L^2_{T,q,n}$. *Note that any* $F \in L^2(\mathbb{P})$ *has the unique representation* $F = \sum_{n=0}^\infty I_n(h_n)$ *with symmetric functions* $h_n \in L^2_{T,q,n}$.

4. $\mathbb{D}^{1,2} := \{F \in L^2(\mathbb{P}) | F = \sum_{n=0}^\infty I_n(h_n), \sum_{n=1}^\infty n n! \|h_n\|^2_{L^2_{T,q,n}} < \infty\}$.

5. For any $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, *we define* DF *as* $D_{t,z}F = \sum_{n=1}^\infty n I_{n-1}(h_n((t,z),\cdot))$, *valid for* q*-a.e.* $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}$.

By using the Clark-Ocone type formula shown by [3], we can see the following:

Theorem 2.2 *When the Clark-Ocone type formula shown by [3] is available,* h^0 *and* h^1 *are described as*

$$h_t^0 = \sigma \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[D_{t,0}F + F\left[\int_0^T D_{t,0}u_s dW_s^{\mathbb{P}^*} - \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \frac{D_{t,0}\theta_{s,x}}{1-\theta_{s,x}} \widetilde{N}^{\mathbb{P}^*}(ds,dx)\right] \Big| \mathcal{F}_{t-}\right], \tag{2.1}$$

and

$$h_{t,z}^1 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[F(H_{t,z}^{\mathbb{P}^*} - 1) + zH_{t,z}^{\mathbb{P}^*} D_{t,z}F | \mathcal{F}_{t-}]. \tag{2.2}$$

Supposing the condition of Theorem 1.2 additionally, ξ^F *is given by substituting (2.1) and (2.2) for* h^0 *and* h^1 *respectively. (Remark that the definition of* $H_{t,z}^{\mathbb{P}^*}$ *is omitted.)*

Corollary 2.3 *When* α, β, *and* γ *are continuous deterministic functions, if* F *and* $Z_T F \in \mathbb{D}^{1,2}$, *then we have*

$$\xi_t^F = \frac{\sigma\beta_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[D_{t,0}F|\mathcal{F}_{t-}] + \int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[zD_{t,z}F|\mathcal{F}_{t-}]\gamma_{t,z}\nu(dz)}{S_{t-}\left(\beta_t^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \gamma_{t,z}^2 \nu(dz)\right)}.$$

3 LRM for options

Theorem 3.1 *For any $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, $K \in \mathbb{R}$ and q-a.e. $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, we have $(F-K)^+ \in \mathbb{D}^{1,2}$ and*

$$D_{t,z}(F-K)^+ = \mathbf{1}_{\{F>K\}} D_{t,0}F \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(z) + \frac{(F+zD_{t,z}F-K)^+ - (F-K)^+}{z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z),$$

where $x^+ = x \vee 0$.

Proposition 3.2 *When α, β and γ are continuous deterministic functions, we have the following:*

1. *$D_{t,z}S_T = \frac{S_T\beta_t}{\sigma}\mathbf{1}_{\{0\}}(z) + \frac{S_T\gamma_{t,z}}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z)$ for q-a.e. $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}$.*
2. *For any $K > 0$ and $t \in [0,T]$, we have*

$$\begin{aligned} \xi_t^{(S_T-K)^+} &= \frac{1}{S_{t-}\left(\beta_t^2 + \int_{\mathbb{R}_0}\gamma_{t,z}^2\nu(dz)\right)}\Bigg\{\beta_t^2 \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\mathbf{1}_{\{S_T>K\}}S_T|\mathcal{F}_{t-}] \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[(S_T(1+\gamma_{t,z})-K)^+ - (S_T-K)^+|\mathcal{F}_{t-}]\gamma_{t,z}\nu(dz)\Bigg\}. \end{aligned}$$

Next, we consider lookback options. We denote $M^Y := \sup_{t\in[0,T]} Y_t$ for any stochastic process Y.

Proposition 3.3 1. *Denoting $L_t := \mu t + X_t$, we have*

$$D_{t,z}M^L = \mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}}\mathbf{1}_{\{0\}}(z) + \frac{\sup_{u\in[0,T]}(L_u + z\mathbf{1}_{\{t\leq u\}}) - M^L}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z)$$

for q-a.e. $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, where $\tau := \inf\{t \in [0,T] | L_t \vee L_{t-} = M^L\}$.

2. *Denoting $S_t := S_0 \exp\{\mu t + X_t\} = S_0 \exp\{L_t\}$ with $S_0 > 0$, we have*

$$\begin{aligned} D_{t,z}(M^S - S_T) &= (M^S\mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}} - S_T)\mathbf{1}_{\{0\}}(z) \\ &\quad + \left(\frac{\sup_{u\in[0,T]}\left(S_u e^{z\mathbf{1}_{\{t\leq u\}}}\right) - M^S}{z} - S_T\frac{e^z-1}{z}\right)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} D_{t,z}(M^S - K)^+ &= M^S\mathbf{1}_{\{M^L > \log(K/S_0)\}}\mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}}\mathbf{1}_{\{0\}}(z) \\ &\quad + \frac{\left(\sup_{u\in[0,T]}\left(S_u e^{z\mathbf{1}_{\{t\leq u\}}}\right) - K\right)^+ - (M^S-K)^+}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z) \end{aligned}$$

for q-a.e. $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, where $K > 0$ and $\tau := \inf\{t \in [0,T] | S_t \vee S_{t-} = M^S\}$.

References

[1] Schweizer, M.: A Guided Tour through Quadratic Hedging Approaches. Handbooks in Mathematical Finance: Option Pricing, Interest Rates and Risk Management. Cambridge University Press, 538–574 (2001).

[2] Schweizer, M.: Local Risk-Minimization for Multidimensional Assets and Payment Streams. Banach Center Publications, **83**, 213–229 (2008).

[3] Suzuki, R.: A Clark-Ocone type formula under change of measure for Lévy processes, Communications on Stochastic Analysis, to appear (2013).

A Discrete-Time Clark-Ocone Formula for Poisson Functionals

Takafumi Amaba (Ritsumeikan Univ.)

Let $N = (N_t)_{0 \le t \le T}$ be a one-dimensional Poisson process with parameter $\lambda > 0$, and $(\mathcal{H}_t)_{0 \le t \le T}$ the filtration generated by N. For a fixed partition $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = \frac{kT}{n} < \cdots < t_n = T$ of $[0, T]$, a discretized filtration $(\mathcal{H}_k^n)_{k=0}^n$ is defined by $\mathcal{H}_0 =$ the trivial σ-field and $\mathcal{H}_k^n = \sigma(\Delta N_l : l = 1, 2, \cdots, k)$ for $k = 1, 2, \cdots, n$, where $\Delta N_l = N_{t_l} - N_{t_{l-1}}$.

We derived a discrete-time version of the Clark-Ocone formula along the filtration $(\mathcal{H}_k^n)_{k=0}^n$, which can roughly be written of the form

$$X \sim \mathbf{E}[X] + \sum_{l=1}^{n} \mathbf{E}[\text{“}\vartheta_l X\text{”} | \mathcal{H}_{l-1}^n] \Delta \widetilde{N}_l, \tag{0.1}$$

where $\vartheta_l = \vartheta_{\Delta N_l}$ is a difference operator in the “variable” ΔN_l and $\widetilde{N}_t = N_t - \lambda t$ is the compensated Poisson process of N_t.

The case where the driving process is the one-dimensional Brownian motion has been already discussed in Akahori-A.-Okuma [1]. We obtained similar results in Poisson case as follows.

Theorem 1. *For $X \in L^2(\mathcal{H}_n^n)$, we have the following L^2-convergent series expansion:*

$$X - \mathbf{E}[X] = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} \frac{(\lambda \Delta t)^m}{m!} \mathbf{E}[\vartheta_l^m X | \mathcal{H}_{l-1}^n] \big(\vartheta_{\Delta N_l}^{*m} 1 \big), \tag{0.2}$$

where λ is the parameter of the Poisson process N_t, which is defined by $\mathbf{E}[N_t] = \lambda t$ for $0 \le t \le T$, and $\vartheta_{\Delta N_l}^*$ is the formal $L^2(\nu)$-adjoint operator of $\vartheta_{\Delta N_l}$. Here, ν stands for the law of $(\Delta N_1, \cdots, \Delta N_n)$.

Remark 1.

- There is a formula which gives the relation between random variables $\vartheta_{\Delta N_l}^{*m} 1$ and *Charlier polynomial* $C_m(k, \xi)$ given by

$$C_m(\Delta N_l, \lambda \Delta t) = (\lambda \Delta t)^m \big(\vartheta_{\Delta N_l}^{*m} 1 \big),$$

where the Charlier polynomial $C_m(k,\xi)$ is defined by

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{m!} C_m(k,\xi) = \exp\Big\{ k\log(1+s) - s\xi \Big\} \quad \text{for } -1 < s < 1.$$

Denote by $\mathbb{D}_{2,s}^{(n)}$, $s \in (-\infty,\infty)$, the completion of $\{F \in L^2(\mathcal{H}_n^n) : \|F\|_{\mathbb{D}_{2,s}(\mathbb{R})} < \infty\}$ under the Sobolev-type norm $\|\cdot\|_{\mathbb{D}_{2,s}(\mathbb{R})}$ which is defined in the theory of Malliavin calculus for Poisson functionals.

In this framework, our interests are the limiting behaviors of the following error. For a sequence $(X^n)_{n=1}^{\infty}$ of $X^n \in L^2(\mathcal{H}_n^n)$, set

$$\mathrm{Err}_n(m) := X^n - \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=1}^{n} \frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!} \mathbf{E}[\partial_l^k X^n | \mathcal{H}_{l-1}^n] \big(\vartheta_{\Delta N_l}^{*k} 1\big)$$

for each $m = 0, 1, \cdots$ and $n = 1, 2, \cdots$. For $F \in \mathbb{D}_{2,m}(\mathbb{R})$, we define $D_\cdot^m F$ by

$$(D_t^m F)(\omega) := \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} 1_{\{t_{l-1} \le t < t_l\}} \vartheta_l^m \mathbf{E}[F|\mathcal{H}_n^n](\omega),$$

where $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ (if it exists). Here, the limit is in the sense of the $L^2[0,T] \otimes L^2(\Omega)$-norm. In the following, we consider the case $F \in \mathbb{D}_{2,m}(\mathbb{R})$ for which $D_\cdot^m F$ is an element in $L^2[0,T] \otimes L^2(\Omega)$, and obtained some new results.

Theorem 2. *Let $m \in \mathbb{N}$. Suppose that $X^n \in \mathbb{D}_{2,m+2}^{(n)}$ for each $n = 1, 2, \cdots$ and for some Wiener functional $X \in \mathbb{D}_{2,m+1}(\mathbb{R})$, we have $\lim_{n\to\infty} \|X^n - X\|_{L^2} = 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|D_t^{p+1} X^n - D_t^{p+1} X\|_{L^2}^2 dt = 0$$

for each $p = 0, 1, \cdots, m$ and $\sup_{n=1,2,\cdots} \int_0^T \|D_t^{p+2} X^n\|_{L^2}^2 dt < \infty$. Then we have

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Err}_n(0) \\ (\lambda\Delta t)^{-1/2}\mathrm{Err}_n(1) \\ \vdots \\ (\lambda\Delta t)^{-n/2}\mathrm{Err}_n(m) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^T \mathbf{E}\big[D_t X \big| \mathcal{H}_t\big] d\widetilde{N}_t \\ \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^T \mathbf{E}\big[D_t^2 X \big| \mathcal{H}_t\big] dB_t^1 \\ \vdots \\ \displaystyle\frac{1}{\sqrt{(m+1)!}} \int_0^T \mathbf{E}\big[D_t^{m+1} X \big| \mathcal{H}_t\big] dB_t^m \end{pmatrix}$$

in probability (on some extended probability space) as $n \to \infty$, where $(B^1, \cdots, B^m)$ is an m-dimensional Brownian motion.

Theorem 3. *If* $\sup_{n=1,2,\cdots} \int_0^T \|D_t^2 X^n\|_{L^2}^2 dt < \infty$, *then we have* $\|\mathrm{Err}_n(1)\|_{L^2} = O(n^{-1/2})$.

Therefore, stronger Sobolev-type regularities for $(X^n)_{n=1}^\infty$ than as in Theorem 3 always implies the rate $O(n^{-1/2})$ of convergence. On the other hand, under lower regularities, results have been shown, for example, in Zhang [6], Gobet-Temam [4], Temam [5], Geiss-Geiss [3] etc. Although in each case, the methods of approximation can be different, however, broadly speaking, it appears that Sobolev-type regularity reflects to the rates of convergence.

In our context, for $X^n \equiv f(N_T)$ with a Borel measurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, we have

Theorem 4. *If* $f(N_T) \in \mathbb{D}_{2,s}(\mathbb{R})$ *for some* $0 \leq s \leq 1$, *then* $\|\mathrm{Err}_n(1)\|_{L^2} = O(n^{-s/2})$.

References

[1] J. Akahori, T. Amaba and K. Okuma. *A discrete-time Clark-Ocone formula and its application to an error analysis.*, submitted.

[2] T. Amaba. *A discrete-time Clark-Ocone formula for Poisson functionals.*, submitted.

[3] C. Geiss and S. Geiss. *On approximation of a class of stochastic integrals and interpolation.*, Stoch. Stoch. Rep. 76 (2004), no. 4, 339-362.

[4] E. Gobet and E. Temam. *Discrete time hedging errors for options with irregular payoffs.*, Finance Stoch. 5 (2001), no. 3, 357-367.

[5] E. Temam. *Analysis of error with Malliavin calculus: application to hedging.*, Conference on Applications of Malliavin Calculus in Finance (Rocquencourt, 2001). Math. Finance 13 (2003), no. 1, 201214.

[6] R. Zhang. *Couverture approchée des option Européennes.* PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1999.

多次元多重オイラー積と Lévy 測度の関係

清水信孝 (立命館大学理工学研究科)

1　概要

多次元離散型分布に対応する多変数関数は，具体的に書けるものとして多くは存在しない．本講演では，[2] において導入された多変数有限オイラー積によって導かれる分布，更にはそれらの無限分解可能性についてこれまでに得られた結果を報告する．

2　準備

無限分解可能分布に関連する研究の中で，次のような分布のクラスが存在する．

定義 2.1 (擬無限分解可能分布 ([1] 参照))**.** $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度が擬無限分解可能であるとは，その特性関数をレヴィ・ヒンチン表現の形で書いた際，そのレヴィ測度 ν に相当する測度が $\mathbb{R}^d$ 上の符号付き測度で，$\nu(\{0\}) = 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}^d}(|x|^2 \wedge 1)|\nu|(dx) < \infty$ をみたすときをいう．

注 2.2. 擬無限分解可能とは古くから 1 次元の分布の非無限分解可能性を示す為に用いられてきた手法の 1 つであるが，そのクラスそのものの性質についてはあまり知られていない．高次元の擬無限分解可能性については，それらに対応する関数とその周辺を後に紹介するオイラー積を用いて [1] の中で議論している．

2.1　ゼータ関数と分布

以下，$\mathbb{P}$ を素数全体の集合とする．まず，リーマン・ゼータ関数とオイラー積について紹介する．

定義 2.3 (リーマン・ゼータ関数，オイラー積)**.** $s = \sigma + \mathrm{i}t$, $\sigma > 1$, $t \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

$$= \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1} \tag{2}$$

と書ける関数について (1) 式をリーマン・ゼータ関数，(2) 式をオイラー積という．

注 2.4. (1) と (2) の等式は素数が無限個存在することを示す際に導かれたものである．また，ζ は $\sigma > 1$ で絶対収束かつ，零点を持たない．

$\mathbb{R}$ 上の分布として，以下のリーマン・ゼータ分布が知られている．

定義 2.5 (リーマン・ゼータ分布). $n \in \mathbb{N}$ と $\sigma > 1$ に対し，確率変数 X_σ がリーマン・ゼータ確率変数及び分布を以下のように定義する.

$$\Pr(X_\sigma = -\log n) = \frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)}$$

リーマン・ゼータ分布の特性関数は $f_\sigma(t) = \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)/\zeta(\sigma),\ t \in \mathbb{R},$ と書ける. また，その性質として以下が知られている.

命題 2.6 ([3]). リーマン・ゼータ分布は複合ポアソン (無限分解可能) であり，そのレヴィ測度 N_σ は有限かつ

$$N_\sigma(dx) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p^{-r\sigma}}{r} \delta_{\log p}(dx).$$

上式からわかるように，リーマン・ゼータ分布の無限分解可能性はオイラー積表示より求まる. そこで [2] においてリーマン・ゼータ分布を $\mathbb{R}^d$ 上の離散分布に拡張する為，以下の多次元オイラー積を導入している.

定義 2.7 (多次元オイラー積 ([2])). $d, k \in \mathbb{N}$，$\vec{s} \in \mathbb{C}^d$ とする. 素数 p，$-1 \le \alpha_h(p) \le 1$，$\vec{a}_h \in \mathbb{R}^d$ と $1 \le h \le k$ に対し，多次元オイラー積を以下のように定義する.

$$Z_E(\vec{s}) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \prod_{h=1}^{k} (1 - \alpha_h(p) p^{-\langle \vec{a}_h, \vec{s} \rangle})^{-1}.$$

3 結果

ここで，以下の記号を用意する.

- ID: $\mathbb{R}^2$ 値の無限分解可能な特性関数の族.
- ID^0: $\mathbb{R}^2$ 値の擬無限分解可能であるが，通常の無限分解可能でない特性関数の族.
- ND: $\mathbb{R}^2$ 値の特性関数とならない関数の族.

定義 3.1. $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$ とする. $\sigma_1, \sigma_2 > 0,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ なる，$s_1 = \sigma_1 + \mathrm{i}t_1,\ s_2 = \sigma_2 + \mathrm{i}t_2,\ \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2),\ \vec{t} = (t_1, t_2)$ に対し，多次元オイラー積 $g^{\sharp}_{p_1p_2}$，$g^{*}_{p_1p_2}$ を

$$g^{\sharp}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{1}{(1 - p_1^{-s_1})(1 - p_1^{-s_2})} \times \frac{1}{(1 - p_2^{-s_1})(1 - p_2^{-s_2})},$$
$$g^{*}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{1}{(1 + p_1^{-s_1-s_2})(1 + p_2^{-s_1-s_2})}.$$

とし，これらを正規化した関数を以下とおく.

$$G^{\sharp}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{g^{\sharp}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t})}{g^{\sharp}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, 0)},\ G^{*}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{g^{*}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t})}{g^{*}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, 0)}.$$

定理 3.2.

$$(1)\ G^{\sharp}_{p_1p_2} \in ID, \quad (2)\ G^{*}_{p_1p_2} \in ND, \quad (3)\ G^{\sharp}_{p_1p_2}G^{*}_{p_1p_2} \in ID^0.$$

定義 3.3. $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$ とする．$\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ なる，$s_1 = \sigma_1 + \mathrm{i}t_1$, $s_2 = \sigma_2 + \mathrm{i}t_2$, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\vec{t} = (t_1, t_2)$ に対し，多次元オイラー積 $f_{p_1p_2}$, $g_{p_1p_2}$, $h_{p_1p_2}$ を

$$f_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{1}{(1 - p_1^{-s_1-s_2})(1 - p_2^{-s_1-s_2})},$$

$$g_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \prod_{j=1}^{2} \frac{1}{(1 - p_j^{-s_1})(1 - p_j^{-s_2})(1 + p_j^{-s_1-s_2})},$$

$$h_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \prod_{j=1}^{2} \frac{1}{(1 + p_j^{-s_1})(1 + p_j^{-s_2})(1 - p_j^{-s_1-s_2})}.$$

とし，これらを正規化した関数を以下とおく．

$$F_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{f_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t})}{f_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, 0)}, \quad G_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{g_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t})}{g_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, 0)}, \quad H_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{h_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t})}{h_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, 0)}.$$

定理 3.4.

$$(11)\ F_{p_1p_2} \in ID, \qquad (12)\ G_{p_1p_2} \in ID^0, \qquad (13)\ H_{p_1p_2} \in ND,$$

$$(21)\ F_{p_1p_2}G_{p_1p_2} \in ID, \qquad (22)\ G_{p_1p_2}H_{p_1p_2} \in ID, \qquad (23)\ H_{p_1p_2}F_{p_1p_2} \in ND,$$

$$(31)\ F_{p_1p_2}G_{q_1q_2} \in ID^0, \qquad (32)\ G_{p_1p_2}H_{q_1q_2} \in ND, \qquad (33)\ H_{p_1p_2}F_{q_1q_2} \in ND.$$

本講演では上記以外の多次元オイラー積型関数の場合に得られた結果，またそれらの対応するレヴィ測度が具体的にどのように書けるか等についても報告する予定である．

参考文献

[1] T. Aoyama and T. Nakamura, Behaviors of multivariable finite Euler products in probabilistic view, to appear in Math. Nachr. published online first, 2013.

[2] T. Aoyama and T. Nakamura, Multidimensional polynomial Euler products and infinitely divisible distributions on $\mathbb{R}^d$, submitted, 2013 http://arxiv.org/abs/1204.4041.

[3] A. Ya. Khinchine, Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables (in Russian), Moscow and Leningrad, 1938.

無限積表現可能な多次元新谷ゼータ分布

吉川 和宏
立命館大学 理工学研究科

1. 概要

多次元離散分布の特性関数について, 有益な情報が得られた結果は多くはない. 本講演では多次元新谷ゼータ分布に着目し, 多重無限級数と高次元積分論の関係を知る為に, それらが無限積表現可能な場合について得られたいくつかの結果を紹介する.

2. 準備

定義 2.1 (リーマン・ゼータ関数, [2] 等参照)**.** $s = \sigma + \mathrm{i}t \in \mathbb{C}$ $(\sigma > 1, t \in \mathbb{R})$ に対し, リーマン・ゼータ関数は以下のディリクレ級数 (1) またはオイラー積 (2) で定義される.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

$$= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}. \tag{2}$$

ここで $\mathbb{P}$ は素数全体である.

この無限級数及び無限積は $\sigma > 1$ において絶対収束する. その絶対収束領域 $\sigma > 1$ において, リーマン・ゼータ関数を用いた以下の $\mathbb{R}$ 上の分布が古くから知られている.

定義 2.2 (リーマン・ゼータ分布)**.** $n \in \mathbb{N}$, $\sigma > 1$ に対して, 確率変数 X_σ が以下の分布に従うときリーマン・ゼータ確率変数, その分布をリーマン・ゼータ分布という.

$$\Pr\left(X_\sigma = \{-\log n\}\right) = \frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)}.$$

この分布の特性関数は $f_\sigma(t) = \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)/\zeta(\sigma)\,(t \in \mathbb{R})$ で与えられる. リーマン・ゼータ分布はその原型において最も古い文献として Jessen と Wintner [3], 正規化された形としては Khinchine [4] に記されている. 近年もなお, Hu と Lin [5] 等によって研究されている.

以後, ゼータ関数は Hurwitz や Barnes 型等, 様々な拡張がなされ, (詳しくは [2] を参照.) それらを拡張した多次元新谷ゼータ関数と分布が青山と中村 [1] によって導入されている.

定義 2.3 (多次元新谷ゼータ関数, [1])**.** d,m, $r \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$, $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ とする. このとき $\lambda_{lj}, u_j > 0$, $\vec{c}_l \in \mathbb{R}^d$, $(1 \leq j \leq r$, $1 \leq l \leq m)$, 及び, $|\theta(n_1, \ldots, n_r)| = O((n_1 + \cdots + n_r)^\varepsilon)$, $(\forall \varepsilon > 0)$ を満たす複素数値関数 $\theta(n_1, \ldots, n_r)$ に対し, 多重無限級数

$$Z_S(\vec{s}) := \sum_{n_1, \ldots, n_r = 0}^{\infty} \frac{\theta(n_1, \ldots, n_r)}{\prod_{l=1}^{m} (\sum_{k=1}^{r} (\lambda_{lk}(n_k + u_k))^{\langle \vec{c}_l, \vec{s} \rangle}}$$

を多次元新谷ゼータ関数という.

ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積とし, また $\theta(n_1, \ldots, n_r)$ を多次元新谷ゼータ関数における指標と呼ぶこととする. $Z_S(\vec{s})$ は, $\min_{1 \leq l \leq m} \langle \vec{c}_l, \vec{s} \rangle > r/m$ を絶対収束領域 ($\mathrm{D_S}$ とおく.) として持ち, その領域において $\theta(n_1, \cdots, n_r)$ を定符号とするとき $\mathbb{R}^d$ 上の分布が次のように定義されている.

定義 2.4 (多次元新谷ゼータ分布, [1]). $\vec{\sigma} \in \mathrm{D_S}$ に対し, 確率変数 $X_{\vec{\sigma}}$ が以下の分布に従うとき, 多次元新谷ゼータ確率変数, その分布を多次元新谷ゼータ分布という.

$$\begin{aligned}&\Pr\Big(X_{\vec{\sigma}} = \Big\{ -\sum_{l=1}^{m} c_{l1} \log\Big(\sum_{k=1}^{r} \lambda_{lk}(n_k+u_k)\Big), \ldots, -\sum_{l=1}^{m} c_{ld} \log\Big(\sum_{k=1}^{r} \lambda_{lk}(n_k+u_k)\Big)\Big\}\Big) \\ &= \frac{\theta(n_1,\ldots,n_r)}{Z_S(\vec{\sigma})} \prod_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_{lk}(n_k+u_k)\right)^{-\langle \vec{c_l}, \vec{\sigma}\rangle}.\end{aligned}$$

この分布の特性関数は $f_{\vec{\sigma}}(\vec{t}) = Z_S(\vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t})/Z_S(\vec{\sigma})\ (\vec{t} \in \mathbb{R}^d)$ で与えられる.

3. 分布と指標の関係

多次元新谷ゼータ分布は, その指標 θ によって様々な離散分布に移り変わり, その特性関数は多重ディリクレ級数として書くことができる.

主結果. $d,\ m,\ N \in \mathbb{N}$, 各 $1 \le l, j \le m, k \in \mathbb{N}$ に対し, $u_l = 1$, $\lambda_{l,l} = 1$, $\lambda_{l,j} = 0\,(l \ne j)$ とし, $\vec{c_l} \in \mathbb{R}^d$ 及び $\vec{\sigma} \in D_S$, $-1 \le \alpha(l,k) \le 1$ を任意に選ぶ. そして $\phi(l,k,r) = \alpha(l,k)^r/r$ とおき, 指標 $\theta_N(n_1,\ldots,n_m)$ を

$$\theta_N(n_1,\ldots,n_m) = \sum{}' N! \prod_{l=1}^{m}\prod_{k=2}^{\infty}\prod_{r=1}^{\infty} \frac{(\phi(l,k,r))^{n(l,k,r)}}{n(l,k,r)!},$$

として定める. ただし $\sum{}'$ は次の関係式を満たす非負整数の組 $n(l,k,r)$ で和をとる:

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} n(l,k,r) = N, \quad \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} r\,\nu(k,p)\,n(l,k,r) = \nu(n_l+1,p), \quad (1 \le l \le m,\ p \in \mathbb{P}).$$

ここで $\nu(n,p)$ は自然数 n の素因数分解における素数 p の指数である. このとき

$$\begin{aligned}Z_N(\vec{s}) &:= \sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty} \frac{\theta_N(n_1,\ldots,n_m)}{\prod_{l=1}^{m}(\lambda_{l1}(n_1+u_1)+\cdots+\lambda_{lm}(n_m+u_m))^{\langle \vec{c_l},\vec{s}\rangle}} \\ &= \Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} \phi(l,k,r) k^{-r\langle \vec{c_l},\vec{s}\rangle}\Big)^N.\end{aligned}$$

また

$$q(l_0,k_0,r_0) := \frac{\phi(l_0,k_0,r_0) k_0^{-r_0\langle \vec{c}_{l_0},\vec{\sigma}\rangle}}{\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} \phi(l,k,r) k^{-r\langle \vec{c_l},\vec{\sigma}\rangle}}$$

とおくとき, 各 $\vec{t} \in \mathbb{R}^d$ について $f_{N,\vec{\sigma}}(\vec{t})$ を

$$f_{N,\vec{\sigma}}(\vec{t}) := \frac{Z_N(\vec{\sigma}+i\vec{t})}{Z_N(\vec{\sigma})} = \Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} q(l,k,r) e^{-ir\langle \vec{c_l},\vec{t}\rangle \log k}\Big)^N$$

とする.

次に非負整数値確率変数 T に対して, 新たな指標 $\theta(n_1,\ldots,n_m)$ を

$$\theta(n_1,\ldots,n_m) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{Pr(T=N)\,\theta_N(n_1,\cdots,n_m)}{Z_N(\vec{\sigma})}.$$

このとき対応する新谷ゼータ関数 $Z(\vec{s})$ は,

$$Z(\vec{\sigma}+i\vec{t}) = \sum_{N=0}^{\infty} Pr(T=N)\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} q(l,k,r)e^{-ir\langle \vec{c_l},\vec{t}\rangle \log k}\Big)^N$$

と書け, 特に T が平均 λ のポアソン分布にしたがうならば,

$$f_{\vec{\sigma}}(\vec{t}) := \frac{Z(\vec{\sigma}+i\vec{t})}{Z(\vec{\sigma})} = \prod_{l=1}^{m}\prod_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{1-\alpha(l,k)k^{-\langle \vec{c_l},\vec{\sigma}\rangle}}{1-\alpha(l,k)k^{-\langle \vec{c_l},\vec{\sigma}+i\vec{t}\rangle}}\Big)$$

となる. ここですべての l,k,r に対して, $\phi(l,k,r)$ が定符号であるならば, あるならば, 指標 θ_N 及び θ は定符号となる. したがって, $f_{N,\vec{\sigma}}$ 及び $f_{\vec{\sigma}}$ は新谷ゼータ分布の特性関数である. つまり $f_{N,\vec{\sigma}}$ は, 以下の分布に従う確率変数 $X_{N,\vec{\sigma}}$ の特性関数になっている:

$$Pr\left(X_{N,\vec{\sigma}} = \Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} x(1,l,k,r)n(l,k,r),\dots,\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} x(d,l,k,r)n(l,k,r)\Big)\right)$$

$$= N!\,\prod_{l=1}^{m}\prod_{k=2}^{\infty}\prod_{r=1}^{\infty}\frac{(q(l,k,r))^{n(l,k,r)}}{n(l,k,r)\,!} \qquad (\text{ただし } \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} n(l,k,r) = N).$$

ここで $\vec{c_l} = (c_{1l},\cdots,c_{dl})$ に対して $x(j,l,k,r) := -rc_{jl}\log k$ としている.

また指標が定符号の仮定の下で $f_{\vec{\sigma}}$ は複合ポアソン分布の特性関数であり, そのレヴィ測度 $N_{\vec{\sigma}}$ は以下の $\mathbb{R}^d$ 上有限測度で与えられる:

$$N_{\vec{\sigma}}(dx) = \lambda\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} q(l,k,r)\delta_{-r\log k\,\vec{c_l}}(dx).$$

注. 主結果では $\phi(l,k,r)$ を定符号としているが, 逆にその符号が一致しない場合, 関数 $f_{N,\vec{\sigma}}$ 及び $f_{\vec{\sigma}}$ は特性関数にすらならないことがある. 本講演ではそれらの関数が特性関数になるための条件等も含めて解説する予定である.

参考文献

[1] T. Aoyama and T. Nakamura, Multidimensional Shintani zeta functions and zeta distributions on $\mathbb{R}^d$, to appear in Tokyo J. Math. (2013) http://arxiv.org/abs/1204.4042.

[2] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1976.

[3] B. Jessen and A. Wintner, Distribution Functions and the Riemann Zeta Function, Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935), no. 1, 48–88.

[4] A. Ya. Khinchine, Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables (in Russian), Moscow and Leningrad, 1938.

[5] G. D. Lin and C.- Y. Hu, The Riemann zeta distribution, Bernoulli 7 (2001) 817–828.

Definition and self-adjointness of the stochastic Airy operator

南　就将（慶應義塾大学　医学部）

§1. Ramírez-Rider-Virág [RRV] は β-ensemble と呼ばれるサイズ n のランダム行列の, 上から k 個までの固有値の組があるスケールの下で $n \to \infty$ とするとき, 次の "Schrödinger 作用素" の下から k 個までの "固有値 " の組に法則収束することを示した：

$$H = -\frac{d^2}{dt^2} + t + \frac{2}{\sqrt{\beta}} B'_\omega(t) \ , \quad t \geq 0 \ .$$

ただし H を $t=0$ における Dirichlet 境界条件の下で考える．また $\{B_\omega(t)\}$ は標準 Brown 運動, $B'_{\omega(t)}$ はその見本関数の形式的な微分である．[RRV] では H をある関数空間から Schwartz 超関数の空間へのランダムな写像と定義しているが, 実は H を Hilbert 空間 $L^2(\mathbf{R}_+)$ 内の自己共役作用素として自然に実現することができる．すなわち次が成り立つ：

定理 1.　各々の ω に対して H は Hilbert 空間 $L^2(\mathbf{R}_+)$ の閉対称作用素として実現され, それは確率 1 で自己共役であり, 離散スペクトルのみを持つ.

§2. $Q(t)$, $0 \leq t < \infty$, を $Q(0)=0$ なる実連続関数とする．

定義 1. ([M1], [M2]) u が関数空間 $\mathcal{C}(Q)$ に属するとは, u が絶対連続であって, ある $\beta \in \mathbf{C}$ とある $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}_+)$ に対して

$$u'(t) = \beta + Q(t)u(t) - \int_0^t \{Q(y)u'(y) + v(y)\}dy$$

が成り立つことである．$u \in \mathcal{C}(Q)$ に対して $H(Q)u = v$ と定義する．

さらに関数空間

$$\mathcal{D}(Q) = \{u \in \mathcal{C}(Q) \cap L^2(\mathbf{R}_+);\ Hu \in L^2(\mathbf{R}_+),\ u(0)=0\} \ ,$$

$$\mathcal{D}^S(Q) = \{u \in \mathcal{D}(Q);\ \lim_{t\to\infty}[u,v](t) = 0,\ \forall v \in \mathcal{D}(Q)\}$$

を定義する．ただし $[u,v](t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$ である．

$$H_0(Q) = H|_{\mathcal{D}(Q)} \ , \quad H_0^S(Q) = H|_{\mathcal{D}^S(Q)}$$

とおくと Stone[S] にならって $H_0(Q)^* = H_0^S(Q)$, $H_0^S(Q)^* = H_0(Q)$ を示すことができる．特に $H_0^S(Q)$ は閉対称作用素である．$H_0^S(Q)$ において $Q(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{\beta}}B_\omega(t)$ ととれば stochastic Airy operator は $L^2(\mathbf{R}_+)$ における閉対称作用素として実現される．これを $H_0^S(\omega)$ で表す．

§3. $H_0^S(\omega)$ の確率 1 での自己共役性を示すために,

$$L^* := \left\{f;\ f\text{is absolutely continuous on } \mathbf{R}_+,\ f(0)=0, \int_0^\infty \{|f'(t)|^2 + (1+t)|f(t)|^2\}dt < \infty\right\}$$

を定義域とする 2 次形式

$$\mathcal{E}_\omega(u,v) = \int_0^\infty \{u'(t)\overline{v'(t)} + (t + \kappa a'_\omega(t)u(t)\overline{v(t)}\}dt - \int_0^\infty \kappa(B_\omega(t) - a_\omega(t))(u(t)\overline{v(t)})'dt$$

を考える（cf [FM]）．ただし $\kappa = 2/\sqrt{\beta}$, $a_\omega(t) = \int_t^{t+1} B_\omega(s)ds$ とおいた．[RRV] において

$$|B_\omega(t) - a_\omega(t)| = \mathcal{O}(\sqrt{\log(1+t)}) \ , \quad |a_\omega(t)| = \mathcal{O}(\sqrt{\log(1+t)}) \ , \quad t \to \infty$$

が示されているが, これより $\mathcal{E}_\omega$ は確かに L^* において定義されていて, さらに次が成立する．

命題. 確率 1 で $\mathcal{E}_\omega$ は下に半有界な閉形式であり, かつ次の意味で完全連続である： $\mathcal{E}_\omega + \gamma_\omega$ が狭義に正となるように γ_ω を選ぶと,

$$\sup_n \{\mathcal{E}_\omega(u_n, u_n) + \gamma_\omega(u_n, u_n)\} < \infty$$

を満たす任意の列 $\{u_n\} \subset L^*$ は L^2-収束する部分列を含む.

したがって一般論により L^* のある部分空間 D_ω を定義域とする自己共役作用素 A_ω が存在して

$$\mathcal{E}_\omega(u, v) = (u, A_\omega v) \ , \quad u, v \in D_\omega$$

を満たし, さらに A_ω は下半有界で離散スペクトルのみを持つ．

この A_ω が §2 で定義した $H_0^S(\omega)$ と一致することを示すためにまず $A_\omega \subset H_0(\omega)$ が成り立つことに注意する．これより A_ω の固有関数は $H_0(\omega)u = \lambda u$ の解であり, 特に λ が A_ω の最低固有値であるとき, 対応する固有関数は $(0, \infty)$ においてゼロ点を持たないことが振動定理により示される．したがって Hartman [H] の定理により $H_0(\omega)$ は $+\infty$ において極限点型となり, $H_0(\omega)$ は自己共役である．すなわち $H_0(\omega) = H_0(\omega)^* = H_0^S(\omega) \subset A_\omega \subset H_0(\omega)$ が得られる．

References

[FM] M. Fukushima, S. Nakao: On spectra of the Schrödinger operator with a white Gaussian noise potential. Z. Wahr. verw. Geb., vol.37 (1977), 267-274

[M1] N. Minami: Schrödinger operator with potential which is the derivative of a temporally homogeneous Lévy process. *Probability Theory and Mathematical Physics*, Lect. Notes Math. 1299 (1988), 289-304

[M2] N. Minami: Random Schrödinger operator with a constant electric field. Ann. Inst. Henri Poincaré, vol.56 (1992) 307-344

[RRV] J.A. Ramírez, B. Rider, B. Virág: Beta ensembles, stochastic Airy spectrum, and a diffusion. J. AMS vol. 24 (2011) 919-944

[H] Ph. Hartman: Differential equations with non-oscillatory eigenfunctions. Duke Math. J., vol.15 (1948) 697-709

[S] M.H. Stone: Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. XV (1932)

Martingale approach to first passage problems of Lévy processes over one-side moving boundaries

Shunsuke Kaji(Kyushusangyo University)

1 Introduction

For a one-dimensional Lévy process L_t with $L_0 = 0$ and a function $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ with $f(0) > 0$, the so called one-side moving boundary, set a first passage time

$$\tau_f = \inf\{t > 0 | L_t > f(t)\}.$$

The classical problem for this time is to know the probability $P(\tau_f > t)$ as $t \to \infty$.

In the case when L_t is a standard Brownian motion, there are many works on the probability $P(\tau_f > t)$. In particular, in Gärtner[2] and Uchiyama[8] the last probability is motivated by a study of the Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov nonlinear parabolic equation. When $f(t)$ is bounded, we can easily find that

$$P(\tau_f > t) \asymp \frac{1}{\sqrt{t}},$$

where the notation $x(t) \asymp y(t)$ means that there are positive constants C_1 and C_2 such that $C_1 y(t) \leq x(t) \leq C_2 y(t)$ for all sufficiently large t. For unbounded $f(t)$, Uchiyama[8] obtained the intersting result that the last tail estimate is valid if and only if

$$\int_1^\infty |f(t)| t^{-\frac{3}{2}} dt < \infty,$$

provided $f(t)$ is convex. By anther way Novikov[5] obtained that under the assumption $f(t)$ is nonincrasing convex or nondecreasing the last integral condition is valid if and only if the expectation $E[L_{\tau_f}]$ satisfies

$$0 < E[L_{\tau_f}] < \infty,$$

and then

$$\lim_{t \to \infty} \sqrt{t} P(\tau_f > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E[L_{\tau_f}].$$

In this proof he uses the tail estimates of quadratic variations of continuous local martingales, for which there are anther works and applications(see Elworthy, Li, and Yor[1] and Takaoka[7]). On the other hand, in the general case when positive jumps of L_t are bounded and $-L_t$ has an exponential moment, Novikov[6] also proved the same result as the above by Novikov[5] under the additional assumption of the concave property of the function $f(t)$ in case of nondecreasing function.

In this note we consider the general case when positive jumps of L_t are bounded. Our question is what is a necessary and sufficient condition for that the asymptotic behavior of $P(\tau_f > t)$ as $t \to \infty$ is the order $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Recently, the tail estimate of quadratic variations of càdlàg local martingales are established by Lipster and Novikov[4] and Kaji[3]. So, by using the martingale approach we will provide the answer for the last question and extend the previous works Novikov[5],[6] in the main theorem and its corollary.

2 Notation and Main result

On a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ we set a one-dimensinal Lévy process $\{L_t\}_{t\in[0,\infty)}$ starting from $L_0 = 0$ and a filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ by the completetion of the σ-algebra generated by $\{L_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Throughout this note, all martingales are considered with respect to the filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, P)$ and we assume that for some $K > 0$

$$\nu((K,\infty)) = 0 \textit{ and } \int_{(-\infty,-1)} |z|^3 \nu(dz) < \infty, \tag{1}$$

which imply $\int_{(-\infty,K]} z^2 \nu(dz) < \infty$. So, $\{L_t\}_{t\in[0,\infty)}$ can be represented by

$$L_t = \sigma W_t + mt + \int_{(0,t]\times(-\infty,K]} z\{N(dsdz) - ds\nu(dz)\},\ t \in [0,\infty),$$

where $\sigma \geq 0$, $\{W_t\}_{t\in[0,\infty)}$ is a standard Brownian motion with $W_0 = 0$, and $N(dsdz)$ is a Poisson random measure on $(0,\infty)\times\mathbf{R}$ with compensator $ds\nu(dz)$. Then, $\{L_t\}_{t\in[0,\infty)}$ obeys

$$E[e^{\lambda L_t}] = e^{\phi(\lambda)t} < \infty, \quad \forall\lambda > 0,$$

where $\phi(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + \int_{(-\infty,K]}(e^{\lambda z} - 1 - \lambda z)\nu(dz)$.

For a function $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ with $f(0) > 0$ we set a first passage time

$$\tau_f = \begin{cases} \inf\{t > 0 | L_t > f(t)\} & if \quad \{\} \neq \emptyset, \\ \infty & if \quad \{\} = \emptyset. \end{cases}$$

Theorem 2.1 *Under the assumption that $f(t)$ is continuous nondecreasing,*

$$\int_1^\infty f(t)t^{-\frac{3}{2}}dt < \infty \tag{2}$$

holds if and only if

$$P(\tau_f < \infty) = 1 \textit{ and } 0 < E[L_{\tau_f}] < \infty. \tag{3}$$

Then,

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}P(\tau_f > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho^2}}E[L_{\tau_f}], \tag{4}$$

where $\rho^2 = \sigma^2 + \int_{(-\infty,K]} z^2\nu(dz)$.

Corollary 2.1 *If $f(t)$ is continuous nondecreasing, then (2) holds if and only if*

$$P(\tau_f > t) \asymp \frac{1}{\sqrt{t}}. \tag{5}$$

Remark 2.1 *In the case when L_t is a standard Brownian motion Novikov[5] proved that under the assumption $f(t)$ is continuous nondecreasing the condition (2) is equivalent to (3) and then (4) holds. In the general case the equivalence of (2) and (3) is proved in Novikov[6] under the additional assumptions of the concave property of $f(t)$ and $\int_{(-\infty,-1]} e^{\lambda_0 z}\nu(dz) < \infty$ for some $\lambda_0 < 0$*

References

[1] Elworthy, K.D., Li, X.M., and Yor, M. : On the tails of the supremum and the quadratic variation of strictly local martingales. Séminaire de Probabilités XXXI, LNM 1655, Springer(1997), pp.113-125.

[2] Gärtner, J : Location of wave fronts for the multidimensional KPP equation and Brownian first exit densities. Math. Nachr., 105(1982), pp317-351.

[3] Kaji, S. : The tail estimation of the quadratic variation of a quasi left continuous local martingale. Osaka J. Math. Vol.44, No.4(2007), pp.893-907.

[4] Liptser, R.S. and Novikov, A.A. : On tail distributions of supremum and quadratic variation of local martingales. Stochastic Calculus to Mathematical Finance, The Shiryaev Festschrift, Springer(2006), pp.421-432.

[5] Novikov, A.A. : Martingales, tauberian theorem, and strategies of gambling. Theory of Prob., Appl. Vol.41, No.4(1996), pp.716-729.

[6] Novikov, A.A. : The martingale approach in problems on the time of the first crossing of nonlinear boundaries. Trudy Mat. Inst. Steklov., 158(1981), pp.130-152.

[7] Takaoka, K. : Some remarks on the uniform integrability of continuous martingales. Séminaire de Probabilités XXXIII, LNM 1709, Springer(1999), pp.327-333.

[8] Uchiyama, K. Brownian first exit from and sojourn over one-sided moving boundary and application. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 54(1)(1980), pp.75-116

確率解析的 UV くりこみ理論

廣島文生

本研究は M. Gubinelli, J. Lőrinczi との共同研究である．

Edward Nelson [Nel64a] は 1964 年に現在 Nelson 模型と呼ばれている場の量子論の toy model を数学的に厳密に解析した．その厳密な解析は現在でも行われている．e.g., [BFS98, Ger00, GLL01, Spo98, HS05]．Nelson 模型は UV(紫外) 切断を導入して定義される自己共役作用素 H_ε でフォック空間上に作用する．Nelson は発散する c-数 E_ε を導入し, また Gross 変換というユニタリー作用素 G で H_ε をユニタリー変換し, $\varepsilon \downarrow 0$(UV 切断を外す極限) のとき, $G(H_\varepsilon - E_\varepsilon)G^{-1}$ が半群の意味で $G(H_\varepsilon - E_\varepsilon)G^{-1} \to H_\infty$ に収束することを証明した．ここで，$E_\varepsilon \to -\infty$ になることを注意しておく．この結果の素晴らしいところは, UV を外した非自明な自己共役作用素 H_∞ がフォック空間上に存在することを示したことにある．

一方, 物理を忘れて, 数学的にこの結果を再考した場合，H_ε が半群の意味で $\varepsilon \downarrow 0$ の極限で収束することを直接どのように示すのか気になる．実際, E_ε や Gross 変換を自然に導入するにはどうすればいいのか？Nelson 自身も [Nel64b] で, 上の結果を Gross 変換などを使わず $(f, e^{-tH_\varepsilon} g)$ を経路積分表示して極限の存在証明に挑戦したが上手くいかなかったようである．しかし, 今回, 我々は経路積分によって UV くりこみを証明することに成功した[1]．それを紹介する．

Nelson 模型のハミルトニアンは

$$H_\varepsilon = H_\mathrm{p} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_\mathrm{f} + \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_\mathrm{I}(x) dx \tag{0.1}$$

で与えられる, ヒルベルト空間 $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathscr{F}$ 上の自己共役作用素である．ここで $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ は粒子の状態空間, $\mathscr{F}$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上のフォック空間でボゾンの状態空間を表す．N-粒子シュレディンガー作用素は $H_\mathrm{p} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \Delta_j + V$ で与えられる．$V : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ はポテンシャルでかけ算作用素とみなす．$a^*(f)$ と $a(f)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, は $\mathscr{F}$ 上の生成・消滅作用素を表す．形式的に $a^\sharp(f) = \int a^\sharp(k)\widehat{f}(k)dk$ と書く．$\omega(k) = |k|$ は dispersion relation を表す．場の自由ハミルトニアンを H_f とかき, これは ω の第 2 量子化作用素で定義される．形式的には $H_\mathrm{f} = \int \omega(k) a^*(k) a(k) dk$ と表される．相互作用は

$$H_\mathrm{I}(x) = g \sum_{j=1}^N \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \left(\widehat{\varphi}(k) \mathrm{e}^{ik\cdot x_j} a(k) + \widehat{\varphi}(-k) \mathrm{e}^{-ik\cdot x_j} a^*(k) \right) dk \tag{0.2}$$

と定義される．$\mathscr{H} \cong L^2(\mathbb{R}^{3N}; \mathscr{F})$ の同一視をする．つまり $F \in \mathscr{H}$ は $\mathbb{R}^{3N} \ni x \mapsto F(x) \in \mathscr{F}$ で $\int_{\mathbb{R}^{3N}} \|F(x)\|_{\mathscr{F}}^2 dx < \infty$ となるもの全体である．この同一視で相互作用は $(H_\mathrm{I} F)(x) = H_\mathrm{I}(\varepsilon, x) F(x)$ となる．g は結合定数である．仮定

$$\widehat{\varphi}/\omega^{1/2}, \widehat{\varphi}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad \overline{\widehat{\varphi}(k)} = \widehat{\varphi}(-k) \tag{0.3}$$

[1] M. Gubinelli, F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Ultraviolet Renormalization of the Nelson Hamiltonian through Functional Integration, preprint 2013.

のもとで相互作用 H_{I} は well defined で対称かつ $\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}$ に関して無限小になる．赤外切断 (IR) が $\widehat{\varphi}/\omega^{3/2}\in L^2(\mathbb{R}^3)$, によって導入されれば，スペクトルの下限に対する固有状態 $\Psi\in\mathscr{H}$ が存在する ([Spo98, BFS98, Ger00, HHS05, Sas05, GHPS11])．つまり基底状態が存在する．条件 $\widehat{\varphi}/\omega^{3/2}\in L^2(\mathbb{R}^3)$ は基底状態存在の必要条件にもなっている [GHPS12a].

UV くりこみとは H の荷電分布の 1 点極限を考えることである．つまり $\varphi(x)\to(2\pi)^{3/2}\delta(x)$ または $\widehat{\varphi}(k)\to 1$. この極限の存在は [Nel64a] で作用素論的な手法で示されているが，我々はこれを汎関数積分を使って証明する．

さてこの極限をとるために我々は紫外切断関数として $\widehat{\varphi}_\varepsilon(k)=\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2/2}$ をとる．この関数によってハミルトニアン H_ε を定義し $\varepsilon>0$ を UV パラメターとみなす．そして $H_\varepsilon-E_\varepsilon$ の $\varepsilon\downarrow 0$ 極限を考える．ここで E_ε はエネルギーくりこみ項である．以下を示す．

(1) 汎関数積分をつかって E_ε をペア相互作用の対角成分として導きだす．

(2) $H_{\mathrm{ren}}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(H_\varepsilon-E_\varepsilon)$ を熱半群の意味で示す．

(3) H_{ren} のペア相互作用を導く．

(4) H_{ren} の弱結合極限 (weak coupling limit) を求める．

References

[BFS98] V. Bach, J. Fröhlich and I.M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles, *Adv. Math.* **137** (1998), 299–395.

[BHLMS02] V. Betz, F. Hiroshima, J. Lorinczi, R. A. Minlos and H. Spohn, Ground state properties of the Nelson Hamiltonian-A Gibbs measure-based approach, *Rev. Math. Phys.* **14** (2002), 173-198.

[Ger00] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. Henri Poincaré* **1** (2000), 443–459.

[GHPS11] C.Gérard, F. Hiroshima, A.Panatti and A.Suzuki, Infrared problem for the Nelson model with variable coefficients, *Commun. Math. Phys.* **308** (2011), 543-566.

[GHPS12a] C.Gérard, F. Hiroshima, A.Panatti and A.Suzuki, Absence of ground state of the Nelson model with variable coefficients, *J. Funct. Anal.* **262** (2012), 273–299.

[GHPS12b] C.Gérard, F. Hiroshima, A.Panatti and A.Suzuki, Removal of the UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients, *Lett Math Phys*, **101** (2012), 305–322.

[GLL01] M. Griesemer, E. H. Lieb and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. Math.* **145** (2001), 557–595.

[HHS05] M. Hirokawa, F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state for point particles interacting through a massless scalar bose field, *Adv. Math.* **191** (2005), 339–392.

[HS05] F. Hiroshima and H. Spohn, Mass renormalization in nonrelativistic QED, *J. Math. Phys.* **46** 042302 (2005) (27 pages)

[LHB11] J. Lőrinczi, F. Hiroshima and V. Betz, *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space*, de Gruyter Studies in Mathematics **34**, 2011.

[Nel64a] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1190–1197.

[Nel64b] E. Nelson, Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, in: *Proc. Conference on Analysis in Function Space*, W. T. Martin and I. Segal (eds.), p. 87, MIT Press, 1964.

[Sas05] I. Sasaki, Ground state of the massless Nelson model in a non-Fock representation, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 102107.

[Spo98] H. Spohn, Ground state of quantum particle coupled to a scalar boson field, *Lett. Math. Phys.* **44** (1998), 9–16.

周遊路を結合してできる過程の汎関数極限定理

矢野孝次 (京都大学大学院理学研究科)

伊藤 [1] の周遊理論によると，原点正則再帰的なマルコフ過程 X の分布は周遊測度 $\boldsymbol{n}$ によって特徴づけられる．詳しく言うと，局所時間 L およびその逆 η を用いて周遊路値のポアソン点過程 p を構成し，その特性測度として $\boldsymbol{n}$ が得られる．逆に，$\boldsymbol{n}$ を特性測度とするポアソン点過程 p をとると，(X, L, η) の標本路を構成できる．

本講演の目的は，周遊測度列の適切な収束概念を導入し，その収束から (X, L, η) の同時分布の極限定理を導くこと，さらにその応用例を与えることである．講演の内容は論文 [3] に基づく．

1．汎関数極限定理の一般論

$\mathbb{R}^d$ 値 càdlàg path の全体を $D = D_{\mathbb{R}^d}$ とし，$\|w\| = \sup |w(t)|$ と表す．座標過程を $X = (X(t))_{t \geq 0}$ と書き，$T_x = \inf\{t > 0 : X(t) = x\}$ と書く．ずっと原点に留まる path を記号 o で表す．一般に，D 上の σ-有限測度 $\boldsymbol{n}$ が以下の 4 条件を満たすとき**周遊測度**と呼ぶ (拡張された定義):

(N0) $\boldsymbol{n}$-a.e. で $0 < T_0 < \infty$ かつ $X(t) = 0$ for $t \geq T_0$;
(N1) $\int_D (T_0 \wedge 1) \mathrm{d}\boldsymbol{n} < \infty$;
(N2) $\boldsymbol{n}(D) = \infty$;
(N3) $\boldsymbol{n}(\|X\| \geq r) < \infty$ for all $r > 0$.

このとき，$\boldsymbol{n}$ を特性測度とするポアソン点過程 p をとると，p から狭義増加 Lévy 過程 $\eta(l) = \sum_{s \leq l} T_0(p(s))$ が定まる．これより局所時間過程 $L(t)$ および周遊路を繋いだ càdlàg 過程 $X(t)$ が得られる．(なお，上の条件だけだと，一般に $X(t)$ はマルコフ過程とは限らない．) ここで，Skorokhod の表現定理 (法則収束列は概収束列の実現がとれる) をまねて，周遊測度列の収束概念を与える．

定義 1. 周遊測度の列 $\{\boldsymbol{n}_n\}$ について，$\boldsymbol{n}_n \to \boldsymbol{n}_\infty$ とは，ある Polish 空間 E とその上の σ-有限測度 ν，および可測写像列 $\Phi_n : E \to D$ が存在して以下を満たすことを言う:

(G1) $\boldsymbol{n}_n = (\nu \circ \Phi_n^{-1})|_{D \setminus \{o\}}$ for $n = 1, 2, \ldots$ and ∞;
(G2) $\Phi_n \to \Phi_\infty$ in D, ν-a.e.;
(G3) $T_0(\Phi_n) \to T_0(\Phi_\infty)$, ν-a.e.;
(G4) ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\int_E \left\{1 \wedge \sup_{n \geq N} T_0(\Phi_n)\right\} \mathrm{d}\nu < \infty$.

定理 2. $\boldsymbol{n}_n \to \boldsymbol{n}_\infty$ と仮定し，さらに $\boldsymbol{n}_\infty$-a.e. で $X(T_0-) = 0$ と仮定する．このとき，$\boldsymbol{n}_n$ に対応する過程を (X_n, L_n, η_n) と書くと，

$$(X_n, L_n, \eta_n) \xrightarrow{\text{law}} (X_\infty, L_\infty, \eta_\infty) \quad \text{on } D_{\mathbb{R}^d} \times D_{\mathbb{R}} \times D_{\mathbb{R}}. \tag{1}$$

2. 自己相似過程の跳入拡張に対する均質化の極限定理

[2] においては，拡散過程の跳入拡張に対し均質化の極限定理を示した．それは，内部運動の均質化 (speed measure の正則変動) の要因と跳入の均質化 (jumping-in measure の正則変動) の要因との混成であった．ここでは後者だけに着目し，はじめから自己相似性を持つ連続流入過程を考え，その跳入拡張に対する均質化の極限定理を与える．

$\{X(t), \mathbb{P}_x\}$ は原点正則再帰的マルコフ過程で，$\boldsymbol{n}$-a.e. で $X(0) = X(T_0-) = 0$ を仮定する．さらに，任意の点 x で $\boldsymbol{n}(T_x < T_0) > 0$ を仮定する．定数 $c > 1$，$\alpha > 0$，$0 < \kappa < 1$ が存在して以下を満たすとする:

(S1) $\{\Psi_\alpha X, \mathbb{P}_x\} \overset{\text{law}}{=} \{X, \mathbb{P}_{c^{-\alpha}x}\}$. 但し，$(\Psi_\alpha w)(t) = c^{-\alpha} w(ct)$;
(S2) $\{\Psi_{\kappa\alpha} L, \mathbb{P}_0\} \overset{\text{law}}{=} \{L, \mathbb{P}_0\}$.

ξ を非負 $\mathcal{F}_{0+}$-可測汎関数で $\xi \circ \Psi_\alpha^{-1} = \xi$ なるものとし，j を $\mathbb{R}^d$ 上の測度として，

$$\boldsymbol{n}_{\xi,j}(\mathrm{d}w) = \xi(w)\boldsymbol{n}(\mathrm{d}w) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} j(\mathrm{d}x)\mathbb{P}_x^0(\mathrm{d}w) \tag{2}$$

と定める．但し，$\mathbb{P}_x^o$ は原点停止過程の分布とする．$\boldsymbol{n}_{\xi,j}$ が周遊測度であるとき，対応する過程を $\{X_{\xi,j}, L_{\xi,j}, \eta_{\xi,j}\}$ と書く．

定理 3 (jumping-in vanishing case). 以下を仮定する:

(S3-a) $\boldsymbol{n}(D \setminus [D_{1,x} \cup D_{2,x}]) = 0$ for all $x > 0$.
但し，$D_{1,x} = \{T_{x_n} \to 0\}$, $D_{2,x} = \{\liminf T_{x_n} \geq T_0\}$. 但し，$x_n = c^{-\alpha n}x$.

(C-a) $\xi^*(w) = \xi(w) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{j(\mathrm{d}x)}{\sigma(x)} 1_{D_{1,x}}(w)$ とおくとき，$\boldsymbol{n}_{\xi^*,0}$ も周遊測度．

このとき，$\boldsymbol{n}_{\xi,j}^{(n)} := c^{\kappa\alpha n}\boldsymbol{n}_{\xi,j} \circ (\Psi_\alpha^n)^{-1}$ は周遊測度の意味で $\boldsymbol{n}_{\xi^*,0}$ に収束する．さらに，

$$\left\{\Psi_\alpha^n X_{\xi,j}, \Psi_{\kappa\alpha}^n L_{\xi,j}, \Phi_{\kappa\alpha}^n \eta_{\xi,j}\right\} \xrightarrow{\text{law}} \left\{X_{\xi^*,0}, L_{\xi^*,0}, \eta_{\xi^*,0}\right\} \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3}$$

但し，$(\Phi_\alpha w)(t) = c^{-1} w(c^\alpha t)$.

これに加えて，“jumping-in dominant”の場合の定理も与える．

例として，正値自己相似 Markov 過程 (pssMp)，Sierpiński gasket 上のブラウン運動，Walsh のブラウン運動への応用を述べる．

参考文献

[1] K. Itô. Poisson point processes attached to Markov processes. In *Proceedings of the 6th Berkeley Sympo., Vol. III: Probability theory*, 225–239, 1972.

[2] K. Yano. Convergence of excursion point processes and its applications to functional limit theorems of Markov processes on a half-line. *Bernoulli*, 14(4):963–987, 2008.

[3] K. Yano. Functional limit theorems for processes pieced together from excursions. Preprint, arXiv:1309.2652.

The entropic curvature dimension condition and Bochner's inequality

Kazumasa Kuwada*

(Graduate school of Humanities and Sciences, Ochanomizu university)

This talk is based on a joint work with M. Erbar and K.-Th. Sturm (Universität Bonn) [6].

There are several different ways to characterize "(Ricci curvature) $\geq K$ & $\dim X \leq N$" on a Riemannian manifold X, where $K \in \mathbb{R}$ and $N \in (0, \infty)$. Among them, the curvature-dimension condition introduced by Sturm [8], Lott and Villani [7] works well even in the framework of abstract metric measure spaces. It is described in terms of optimal transportation and it possesses many nice geometric stability properties. On the other hand, Bochner's inequality introduced by Bakry and Émery is formulated for an abstract diffusion generator. As Bochner's formula has played significant roles in Riemannian geometry, Bochner's inequality provides enormous important functional inequalities in geometric analysis. The purpose of this talk is to unify these two concepts by introducing new conditions equivalent to either (and hence both) of them on metric measure spaces. When $N = \infty$, this program was essentially finished by Ambrosio, Gigli, Savaré and their collaborators [1, 2, 3, 4] and our main focus is in the case $N < \infty$.

Let (X, d, m) be a Polish geodesic metric measure space, where the measure m is locally finite, σ-finite and $\operatorname{supp} m = X$. Let us introduce comparison functions: for $\kappa \in \mathbb{R}$ and $\kappa\theta^2 \leq \pi^2$,

$$\mathfrak{s}_\kappa(\theta) := \frac{\sin(\sqrt{\kappa}\theta)}{\sqrt{\kappa}}, \quad \sigma_\kappa^{(t)}(\theta) := \frac{\mathfrak{s}_\kappa(t\theta)}{\mathfrak{s}_\kappa(\theta)}.$$

We call a function V on a metric space (Y, d_Y) *(K, N)-convex* if for each $x, y \in Y$ there is a constant speed geodesic $\gamma : [0, 1] \to Y$ from x to y such that the following holds:

$$V_N(\gamma_t) \geq \sigma_{K/N}^{(1-t)}(d_Y(x, y))V_N(\gamma_0) + \sigma_{K/N}^{(t)}(d_Y(x, y))V_N(\gamma_1), \quad \text{where } V_N := \exp\left(-\frac{1}{N}V\right).$$

We call V *strongly (K, N)-convex* if the last inequality holds for each (and at least one) geodesic γ. This is an integral formulation of the following inequality in the distributional sense:

$$\partial_t^2 V_N(\gamma_t) \leq -\frac{K}{N} d(x, y)^2 V_N(\gamma_t).$$

If V is C^2-function on a Riemannian manifold, then V is (K, N)-convex if and only if

$$\operatorname{Hess} V - \frac{1}{N}\nabla V \otimes \nabla V \geq K.$$

Let $\mathscr{P}_2(X)$ be the L^2-Wasserstein space, consisting of probability measures on X with finite second moments, equipped with the *L^2-Wasserstein distance* W_2 given by

$$W_2(\mu, \nu) := \inf \left\{ \|d\|_{L^2(\pi)} \mid \pi\text{: a coupling of } \mu \text{ and } \nu \right\}.$$

Note that $(\mathscr{P}_2(X), W_2)$ is also a Polish geodesic metric space. We denote the *relative entropy* by Ent: For $\mu \in \mathscr{P}(X)$,

$$\operatorname{Ent}(\mu) := \begin{cases} \displaystyle\int_X \rho \log \rho \, dm & \text{if } \mu = \rho m \text{ with } (\rho \log \rho)_+ \in L^1(X, m), \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

*URL: `http://www.math.ocha.ac.jp/kuwada` e-mail: `kuwada.kazumasa@ocha.ac.jp`

We say that (X, d, m) satisfies the (strong) *entropic curvature-dimension condition* $\mathsf{CD}^e(K, N)$ if Ent is (strongly) (K, N)-convex on $\mathscr{P}_2(X)$ respectively.

Let Ch be *Cheeger's L^2-energy functional* given by a relaxation of the energy functional associated with local Lipschitz constants. It can be written as an energy integral in terms of the *weak upper gradient* $|\nabla f|_w$, i.e.

$$\mathsf{Ch}(f) := \frac{1}{2} \int_X |\nabla f|_w^2 \, dm$$

(see [3]). We say (X, d, m) *infinitesimally Hilbertian* if Ch coincides with a closed symmetric bilinear form $\mathcal{E}$: $2\mathsf{Ch}(f) = \mathcal{E}(f, f)$. In this case $\mathcal{E}(f, g)$ has a density denoted by $\langle \nabla f, \nabla g \rangle$ and in particular $|\nabla f|_w^2 = \langle \nabla f, \nabla f \rangle$ m-a.e. (see [4]). Let Δ be the associated generator of $\mathcal{E}$ and T_t a Markov semigroup generated by Δ.

Example

Let (X, d, m) be an N-dimensional complete Riemannian manifold, $\partial X = \emptyset$, equipped with the Riemannian measure m. Suppose $\mathrm{Ric} \geq K$. Let V be a (K', N')-convex function on (X, d). Then $(X, d, \mathrm{e}^{-V} m)$ satisfies $\mathsf{CD}^e(K + K', N + N')$. In this framework, Ch coincides with the usual Dirichlet energy and hence $(X, d, \mathrm{e}^{-V} m)$ is infinitesimally Hilbertian.

Theorem A

The following are equivalent:

(i) (X, d, m) is infinitesimally Hilbertian and satisfies the *reduced curvature-dimension condition* $\mathsf{CD}^*(K, N)$ introduced by Bacher and Sturm [5]. That is, for $\mu_0 = \rho_0 m, \mu_1 = \rho_1 m \in \mathscr{P}(X)$ with bounded supports, there exists an optimal coupling q of them and a geodesic $\mu_t = \rho_t m \in \mathscr{P}_2(X)$ with bounded supports such that for all $t \in [0, 1]$ and $N' \geq N$:

$$\int_X \rho_t^{-1/N'} d\mu_t \geq \int_{X \times X} \big[\sigma_{K/N'}^{(1-t)}(d(x_0, x_1))\rho_0(x_0)^{-1/N'} + \sigma_{K/N'}^{(t)}(d(x_0, x_1))\rho_1(x_1)^{-1/N'}\big] q(dx_0, dx_1).$$

(ii) (X, d, m) is infinitesimally Hilbertian and satisfies $\mathsf{CD}^e(K, N)$.

(iii) Assumption (a) holds, and for each $\mu \in D(\mathrm{Ent})$ there is a locally absolutely continuous curve $\mu_t \in \mathscr{P}_2(X)$ with $\mu_0 = \mu$ satisfying the following: For each $\sigma \in \mathscr{P}_2(X)$,

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{s}_{K/N}^2 \left(\frac{W_2(\mu_t, \sigma)}{2} \right) + K \mathfrak{s}_{K/N}^2 \left(\frac{W_2(\mu_t, \sigma)}{2} \right) \leq \frac{N}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{1}{N} (\mathrm{Ent}(\sigma) - \mathrm{Ent}(\mu_t)) \right) \right)$$

(the (K, N)-*evolution variational inequality* ($\mathsf{EVI}_{K,N}$)).

In the condition (iii), the solution μ_t to $\mathsf{EVI}_{K,N}$ can be regarded as a gradient curve of Ent (in a stronger sense). This was heuristically known that μ_t coincides with the heat distribution. We can verify it in this framework (see [3]) and this fact connects $\mathsf{CD}^e(K, N)$ with analysis of the heat semigroup T_t. This connection was hidden in $\mathsf{CD}^*(K, N)$ since there appears no Ent.

Assumption

(a) There exists $c > 0$ such that $\int_X \exp\left(-cd(x, x_0)^2\right) dm < \infty$ for some $x_0 \in X$.

(b) Every $f \in D(\mathsf{Ch})$ with $|\nabla f|_w \leq 1$ m-a.e. has a 1-Lipschitz representative.

Note that $\mathsf{CD}^e(K,N)$ implies (a). In addition, the condition (ii) implies (b).

Theorem B

If one of (i)–(iii) holds, then ((X,d,m) is infinitesimally Hilbertian and) the following holds:

(iv) [*Space-time W_2-control*] For $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_2(X)$ and $t, s \geq 0$,

$$\mathfrak{s}_{K/N}^2\left(\frac{W_2(T_t\mu_0, T_s\mu_1)}{2}\right) \leq \mathrm{e}^{-K(s+t)}\mathfrak{s}_{K/N}^2\left(\frac{W_2(\mu_0,\mu_1)}{2}\right) + \frac{N}{2}\frac{1-\mathrm{e}^{-K(s+t)}}{K(s+t)}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)^2.$$

(v) [*Bakry-Ledoux gradient estimate*] For $f \in D(\mathsf{Ch})$ and $t > 0$,

$$|\nabla T_t f|_w^2 + \frac{2tC(t)}{N}|\Delta T_t f|^2 \leq \mathrm{e}^{-2Kt}T_t(|\nabla f|_w^2) \quad m\text{-a.e.},$$

where $C(t) > 0$ is a function satisfying $C(t) = 1 + O(t)$ as $t \to 0$.

(vi) [(a weak form of) *Bochner's inequality*] For $f \in D(\Delta)$ with $\Delta f \in D(\mathsf{Ch})$ and all $g \in D(\Delta) \cap L^\infty(X,m)$ with $g \geq 0$ and $\Delta g \in L^\infty(X,m)$,

$$\frac{1}{2}\int_X \Delta g|\nabla f|_w^2\,dm - \int_X g\langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle\,dm \geq K\int_X g|\nabla f|_w^2\,dm + \frac{1}{N}\int_X g(\Delta f)^2\,dm.$$

Conversely, if Assumptions (a) and (b) holds and (X,d,m) is infinitesimally Hilbertian, then one of (iv)–(vi) implies (i)–(iii) and hence (i)–(vi) are all equivalent.

Applications and related results will be mentioned in the talk.

References

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, A. Mondino, and T. Rajala. Riemannian Ricci curvature lower bounds in metric measure spaces with σ-finite measure. To appear in Trans. Amer. Math. Soc., 2012.

[2] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. Bakry-Émery curvature-dimension condition and Riemannian Ricci curvature bounds. Preprint. Available at: arXiv: 1209.5786.

[3] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below. To appear in Invent. Math. Available at: arXiv:1106.2090.

[4] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below. Preprint. Available at: arXiv:1109.0222.

[5] K. Bacher and K.-T. Sturm. Localization and tensorization properties of the curvature-dimension condition for metric measure spaces. *J. Funct. Anal.*, 259(1):28–56, July 2010.

[6] M. Erbar, K. Kuwada, and K.-T. Sturm. On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces. Preprint. Available at: arXiv:1303.4382.

[7] J. Lott and C. Villani. Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport. *Ann. Math.*, 169(3):903–991, 2009.

[8] K.-Th. Sturm. On the geometry of metric measure spaces. I and II. *Acta. Math.*, 196(1):65–177, 2006.

Large deviation principle for certain spatially lifted Gaussian rough path

Yuzuru Inahama (Nagoya University)

要約　近年 M. Hairer が急速に研究を進めている Hairer 流のラフ確率偏微分方程式 (rough SPDE) 理論の枠組において、Schilder 型の大偏差原理を証明する。ラフパス理論の確率論的部分においては、この種の大偏差原理は中心的な話題であるが、rough SPDE 理論では (いかなる流派においても) 前例がないと思う。Hairer 理論においては、２変数ガウス過程を空間変数に関してラフパス持ち上げしたものを空間的ラフパスと呼び、これが主役を演じるのだが、論文によって、考える２変数ガウス過程が違っている。本講演では最も典型的な例である確率熱方程式の解の持ち上げに対して、Schilder 型の大偏差原理を証明する。証明は通常のラフパス理論においてもっとも一般性の高い手法である Friz-Victoir の議論を「２変数化」することにより与える。

In rough path theory of T. Lyons, the notion of paths is generalized to a great extent and so is that of ordinary differential equations. They are called rough paths and rough differential equations (RDEs), respectively. The solution map of an RDE is called an Itô map, which is defined for every rough path and, moreover, is continuous with respect to the topology of rough path space (Lyons' continuity theorem). As a result, stochastic differential equations (SDEs) in the usual sense are made deterministic or "dis-randomized".

Even though Itô maps are deterministic, the probabilistic aspect of the theory is still very important undoubtedly. In a biased view of the author, a large deviation principle of Schilder type is a central issue in stochastic analysis on rough path spaces. This kind of large deviations was first shown by Ledoux, Qian, and Zhang (2002) for the law of Brownian rough path. Combined with Lyons' continuity theorem, this result immediately recovers well-known Freidlin-Wentzell type large deviations for solutions of SDEs. Since then many papers have been published on this subject.

Naturally, one would like to apply rough path theory to stochastic PDEs. There have been some successful attempts. In this paper, we focus on M. Hairer's theory [1, 3, 4], which is based on M. Gubinelli's "algebraic" rough integration theory. In Hairer's theory, rough path theory is used for the space variable $x \in S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ for each fixed time variable $t > 0$. This is surprising because almost everyone regarded solutions of stochastic PDEs as processes indexed by the time-variable t that take values in function spaces of the space-variable x and then modify and apply infinite dimensional rough path theory. Not only his point of view is novel, but his theory also turned out to be very powerful when he rigorously solved KPZ equation in the periodic case for the first time [2].

Under these circumstances, it seems natural and necessary to develop stochastic analysis in this framework. In this paper we will prove a large deviation principle of Schilder type for the spatial lift of the (scaled) solution ψ of the stochastic heat equation on S^1. This process ψ plays a crucial role in [3, 4]. To our knowledge, a large deviation principle is new in rough stochastic PDE theories of any kind.

Now we introduce our setting. Let us recall the stochastic heat equation on S^1. As usual $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ is regarded as $[0,1]$ with the two end points identified and $\triangle = \triangle_{S^1}$ stands for the periodic Laplacian. Let $\xi^i = \xi(t,x)^i$ $(1 \le i \le d)$ are independent copies of the space-time white noise associated with $L^2([0,T] \times S^1)$ with the (formal) covariance $\mathbb{E}[\xi(t,x)^i \xi(s,y)^j] = \delta_{ij} \cdot \delta_{t-s} \cdot \delta_{x-y}$. Let $\psi = \psi(t,x)$ be a unique solution of the following $\mathbf{R}^d$-valued stochastic PDE.

$$\partial_t \psi = \triangle_x \psi + \xi \qquad \text{with} \qquad \psi(0,x) \equiv 0.$$

Then, $\psi = (\psi(t,x))_{0 \le t \le T, 0 \le x \le 1}$ is a two-parameter continuous Gaussian process. It was shown in [3] that, (i) for each t, $x \mapsto \psi(t,x)$ admits a natural lift to a geometric rough path $(x,y) \mapsto \Psi(t;x,y)$ a.s. and (ii) there exists a modification of Ψ such that $t \mapsto \Psi(t;\bullet,\star)$ is continuous in the geometric rough path space a.s. In Hairer's theory, a solution of a rough stochastic PDE is obtained as a continuous image of Ψ. Therefore, it is important to analyze (the law of) Ψ.

Let $1/3 < \alpha < 1/2$. We denote by $G\Omega^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$ the α-Hölder geometric rough path space over $\mathbf{R}^d$. The first level path of $X \in G\Omega^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$ is a usual path in $\mathbf{R}^d$ which starts at 0. Let $G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d) \cong \mathbf{R}^d \times G\Omega^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$ be the α-Hölder geometric rough path space in an extended sense so that information of the initial values of the first level paths are added. For each t, the random variable $\Psi(t; \bullet, \star)$ takes values in this Polish space $G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$. Let $\mathcal{P}_\infty G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d) = C([0,T], G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d))$ be the continuous path space over $G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$. Its topology is given by the uniform convergence in t as usual. The random variable Ψ takes values in this Polish space and hence its law is a probability measure on this space.

Introduce a small parameter $0 < \varepsilon \le 1$. Let $\varepsilon\Psi$ is the dilatation of Ψ by ε, which is equal to the natural lift of $\varepsilon\psi$, anyway. Denote by ν_ε the law of $\varepsilon\Psi$ on $\mathcal{P}_\infty G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$. Our main result is the following:

Main result: *For any $\alpha \in (1/3, 1/2)$, the family $(\nu_\varepsilon)_{0<\varepsilon\le 1}$ of probability measures on $\mathcal{P}_\infty G\hat{\Omega}^H_\alpha(\mathbf{R}^d)$ satisfies a large deviation principle as $\varepsilon \searrow 0$ with a good rate function I.*

Here, we give a few quick remarks. The rate function I takes the usual form. So, we omit its explicit form. Just like in the usual rough path theory, the continuity of the Itô map and the contraction principle for LDP immediately imply Freidlin-Wentzell type LDP for solutions of rough SPDEs as in [3].

We show the main result by developping an extended version of Friz-Victoir's method for Schilder-type LDP for Gaussian rough path (2007).

References

[1] Hairer, M.; Rough stochastic PDEs. Comm. Pure Appl. Math. 64 (2011), no. 11, 1547–1585.

[2] Hairer, M.; Solving the KPZ equation. To appear in Ann. of Math. arXiv:1109.6811

[3] Hairer, M.; Weber, H.; Rough Burgers-like equations with multiplicative noise. To appear in Probab. Theory Related Fields. arXiv:1012.1236

[4] Hairer, M.; Maas, J.; Weber, H.; Approximating rough stochastic PDEs. Preprint. arXiv:1202.3094

[5] Inahama, Y.; Large deviation principle for certain spatially lifted Gaussian rough path. preprint, arXiv:1212.1249

Asymptotic behavior of densities for stochastic functional differential equations *

竹内　敦司（大阪市立大学・理）†

December 20, 2013

r と T をともに正の定数とし，$0<\varepsilon\leq 1$ とする．原点を出発する d 次元ブラウン運動を $\{W(t)=(W^1(t),\ldots,W^d(t))\,;\,t\in[0,T]\}$ と表すこととする．ランダムでない関数 $\eta\in C([-r,0]\,;\mathbb{R}^d)$ が与えられたとき，次の確率関数微分方程式を考える．

$$\begin{cases} X^\varepsilon(t)=\eta(t) & (t\in[-r,0]), \\ \mathrm{d}X^\varepsilon(t)=A_0(t,X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t+\displaystyle\sum_{i=1}^d A_i(t,X_t^\varepsilon)\,\varepsilon\,\mathrm{d}W^i(t) & (t\in(0,T]). \end{cases} \tag{1}$$

但し，$A_i:[0,T]\times C([-r,0]\,;\mathbb{R}^d)\longrightarrow\mathbb{R}^d$ $(i=0,1,\ldots,d)$ は各成分について滑らかであり，その 1 階以上の偏微分がすべて有界であるとする．ここで，$C([-r,0]\,;\mathbb{R}^d)$ の成分に関する微分はフレッシェの意味で考えることとし，$X_t^\varepsilon=\{X^\varepsilon(t+u)\,;\,u\in[-r,0]\}$ とする．明らかに，$\mathbb{R}^d$ 値確率過程 $\{X^\varepsilon(t)\,;\,t\in[-r,T]\}$ は過去の履歴に依存しているので非マルコフ過程となる．さらに，係数 A_i $(i=0,1,\ldots,d)$ に対する条件より，方程式 (1) は一意的な解をもつことが分かる (cf. [1, 4])．本講演では，方程式 (1) の解の分布族 $\{\mathbb{P}\circ X^\varepsilon(t)^{-1};0<\varepsilon\leq 1\}$ に対する大偏差原理を考え，それをマリアヴァン解析と合わせて密度関数の漸近挙動を調べてゆくことを目的とする．

以後，方程式 (1) の拡散項の係数 A_i $(i=1,\ldots,d)$ は次の条件を満たすものとする：

条件 1

$$\inf_{\zeta\in\mathbb{S}^{d-1}}\inf_{t\in[0,T]}\inf_{g\in C([-r,0]\,;\mathbb{R}^d)}\sum_{i=1}^d\big(\zeta\cdot A_i(t,f)\big)^2>0. \tag{2}$$

命題 1 ([3]) $t\in[0,T]$ および $0<\varepsilon\leq 1$ とし，条件 1 を仮定する．このとき，$X^\varepsilon(t)$ の分布は $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度に関して絶対連続であり，その密度関数 $p^\varepsilon(t,y)$ は $y\in\mathbb{R}^d$ に関して滑らかである．

一方，分布の族 $\{\mathbb{P}\circ(X^\varepsilon(t))^{-1}\,;\,0<\varepsilon\leq 1\}$ について，次の定理が成り立つ．

定理 1 ([2]) $t\in[0,T]$ とし，条件 1 を仮定する．このとき，分布族 $\{\mathbb{P}\circ(X^\varepsilon(t))^{-1}\,;\,0<\varepsilon\leq 1\}$ は大偏差原理を満たし，その速度関数 $\bar{I}$ は

$$\bar{I}(y)=\inf\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\big|A(t,g_t)^{-1}\{\dot{g}(t)-A_0(t,g_t)\}\big|^2dt\,;\,g\in C_\eta([-r,T]\,;\mathbb{R}^d),\,y=g(t)\right\}$$

となる．ただし，$A=(A_1,\ldots,A_d)$ とする．

*本研究は科研費 (課題番号:23740083) の助成を受けたものである．

†E-mail: takeuchi@sci.osaka-cu.ac.jp

定理 1 とマリアヴァン解析を合わせることにより，次の定理が得られる．

定理 2 ([2]) 条件 1 の下で，

$$\limsup_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon^2 \ln p^\varepsilon(t,y) \le -\bar{I}(y), \tag{3}$$

$$\liminf_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon^2 \ln p^\varepsilon(t,y) \ge -\bar{I}(y) \tag{4}$$

が成り立つ．

最後に，$X(t) := X^\varepsilon(t)\big|_{\varepsilon=1}$ に対する密度関数 $p(t,y)$ の短時間漸近挙動について調べる．$x \in \mathbb{R}^d$ をランダムでない点とし，$\tilde{A}_i$ $(i=1,\ldots,d)$ を $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値関数で，各成分に関する 1 階以上の偏微分はすべて有界であるとする．このとき，次の確率関数微分方程式を考える：

$$\begin{cases} X^\varepsilon(t) = x & (t \in [-r,0]), \\ \mathrm{d}X^\varepsilon(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^d \tilde{A}_i(X^\varepsilon(t-r), X^\varepsilon(t))\, \varepsilon\, \mathrm{d}W^i(t) & (t \in (0,T]). \end{cases} \tag{5}$$

方程式 (5) の係数 $\tilde{A}_i$ $(i=1,\ldots,d)$ について，次の条件を仮定する．

条件 2

$$\inf_{\zeta \in \mathbb{S}^{d-1}} \inf_{g \in C([-r,0]\,;\,\mathbb{R}^d)} \sum_{i=1}^d \left(\zeta \cdot \tilde{A}_i(t,f)\right)^2 > 0. \tag{6}$$

$X(t) = X^\varepsilon(t)\big|_{\varepsilon=0}$ とする．条件 2 の下で，$X(t)$ の分布は $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度に関して滑らかな密度関数 $p(t,y)$ をもつ．定理 2 から次の系が得られる：

系 1 条件 2 の下で，

$$\limsup_{t\searrow 0} t \ln p(t,y) \le -r\bar{I}(y), \tag{7}$$

$$\liminf_{t\searrow 0} t \ln p(t,y) \ge -r\bar{I}(y) \tag{8}$$

が成り立つ．

References

[1] K. Itô and M. Nisio, On stationary solutions of a stochastic differential equation, *J. Math. Kyoto Univ.* **4** (1964), 1 - 75.

[2] A. Kitagawa and A. Takeuchi: Asymptotic behavior of densities for stochastic functional differential equations, *Int. J. Stoch. Anal.* **2013** (2013).

[3] S. Kusuoka and D. W. Stroock: Applications of the Malliavin calculus. I, in *Stochastic Analysis (Katata/Kyoto, 1982)*, pp.271 - 306, (1984).

[4] S. E. A. Mohammed: *Stochastic Functional Differential Equations*, Pitman, (1984).

Wong-Zakai approximations for reflecting SDE

会田 茂樹
東北大学

今年の夏の研究会 "確率解析とその周辺" で必ずしも滑らかでない境界を持つ領域 D で定義された反射壁確率微分方程式の Wong-Zakai 近似解が確率 1 で真の解に一様収束の位相で収束するという講演者と佐々木孝介氏の共著論文 [3] の結果について講演した。今回は、(1) 凸領域の場合、そこで課されていた条件 (B) が無くても収束すること、(2) 一般の領域で条件 (C) が無くてもやはり収束すること (ただし収束のオーダーは不明) について、話したい。反射壁の無い通常の SDE の Wong-Zakai 近似の収束は、現在では rough path 解析で明快に説明されている。従って、現時点で, Wong-Zakai 近似を論ずるからには、rough path 解析の視点から研究がなされるべきであろう。実際、反射壁 SDE の Wong-Zakai 近似を研究し始めた当初から driving path (rough path) に関する連続性定理を確立することを念頭においていた。残念ながらまだ連続性定理が成立するかどうかわからないが、連続な p-variation path $(1 \le p < 2)$ を driving path とする反射壁 ODE, および p-rough path $(2 \le p < 3)$ でドライヴされた "reflecting rough differential equation" (これは講演者が勝手にそう読んでいるので、一般的な用語では無い) は自然に定義でき、その解の存在と評価を得ることができたので、そのことについても講演したい。まず、$\mathbb{R}^d$ 内の領域 D について $x \in \partial D$ における内向き単位法線ベクトルの集合の定義を思い出そう。

$$\mathcal{N}_x = \cup_{r>0}\mathcal{N}_{x,r} \tag{1}$$

$$\mathcal{N}_{x,r} = \left\{\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^d \mid |\boldsymbol{n}| = 1, B(x - r\boldsymbol{n}, r) \cap D = \emptyset\right\}, \tag{2}$$

ここで、$B(z,r) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y-z| < r\}$, $z \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$. 反射壁 SDE の強い解の存在、一意性の研究では、D に対して、次のような条件を考える事が多い (田中洋、税所康正、Lions-Sznitman らの研究による)。

Definition 1. (A) $r_0 > 0$ が存在して、任意の $x \in \partial D$ に対して

$$\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x,r_0} \neq \emptyset. \tag{3}$$

(B) 定数 $\delta > 0$, $\beta \ge 1$ が存在し、任意の $x \in \partial D$ に対して 単位ベクトル l_x が存在し

$$\text{任意の } \boldsymbol{n} \in \cup_{y \in B(x,\delta)\cap\partial D}\mathcal{N}_y \text{ に対して} \qquad (l_x, \boldsymbol{n}) \ge \frac{1}{\beta}. \tag{4}$$

(C) $\mathbb{R}^d$ 上の C_b^2 関数 f および $\gamma > 0$ が存在し、任意の $x \in \partial D$, $y \in \bar{D}$, $\boldsymbol{n} \in \mathcal{N}_x$ に対して

$$(y - x, \boldsymbol{n}) + \frac{1}{\gamma}\left((Df)(x), \boldsymbol{n}\right)|y - x|^2 \ge 0. \tag{5}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ を filtration 付き確率空間とする。$B(t)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動とする。$\sigma \in C_b^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d)$, $b \in C_b^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$ とし、$\bar{D} \subset \mathbb{R}^d$ 上の反射壁 Stratonovich SDE

$$Y(t) = y_0 + \int_0^t \sigma(Y(s)) \circ dB(s) + \int_0^t b(Y(s))ds + \Phi(t), \quad y_0 \in \bar{D}\ ; \quad 0 \le t \le T \tag{6}$$

について D が (1) 凸 である, (2) 条件 (A), (B) が成立する、の 2 つの場合に、強い解の一意的存在が示されている (田中 Hiroshima Math J 1979, 税所 PTRF 1987)。$\Phi(t)$ は連続な $\mathcal{F}_t$-有界変動過程で

$$\Phi(t) = \int_0^t 1_{\partial D}(Y(s)) \boldsymbol{n}(s) d\|\Phi\|_{[0,s]} \tag{7}$$

を満たすものである。ただし, $\|\Phi\|_{[0,s]}$ は $\Phi(t)$ の $[0,s]$ における全変動を表し, $\boldsymbol{n}(s)$ は $Y(s) \in \partial D$ のとき $\boldsymbol{n}(s) \in \mathcal{N}_{Y(s)}$ となる Borel 可測写像である。これについて Wong-Zakai 近似解 Y^N を考える。

$$B^N(t) = B(t_{k-1}^N) + \frac{B(t_k^N) - B(t_{k-1}^N)}{\Delta_N}(t - t_{k-1}^N) \quad t_{k-1}^N \le t \le t_k^N$$

とする。ただし, $t_k^N = 2^{-N}kT$ $(1 \le k \le 2^N)$, $\Delta_N = 2^{-N}T$, $\Delta_k B^N = B(t_k^N) - B(t_{k-1}^N)$. Y^N は次の反射壁 ODE の解である:

$$dY^N(t) = \sigma(Y^N(t))dB^N(t) + b(Y^N(t))dt + d\Phi^N(t), \quad Y^N(0) = y_0. \tag{8}$$

Theorem 2 ([3])**.** 条件 (A), (B), (C) を仮定する。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$C_{\varepsilon,T} > 0$ が存在して、すべての N について

$$E\left[\max_{0 \le t \le T} |Y^N(t) - Y(t)|^2\right] \le C_{\varepsilon,T} \Delta_N^{(1-\varepsilon)/6}. \tag{9}$$

Remark 3. D が有界、境界が滑らかなときは、Doss-Priouret (Z. Wahrsc. Verw. Gebiete 61, 1982) が $Y^N(t)$ が $Y(t)$ に一様収束の位相で確率収束することを示している。Evans-Stroock (SPA, 121, 2011) は (A), (B), (C) および D に admissibility condition (この条件は Lions-Sznitman (Comm.Pure Appl.Math. 1984) により導入された) を仮定して, P^{Y^N} が P^Y に弱収束することを示している。また, [3] より少し後でまた [3] とは違った方法で Tusheng Zhang が Evans-Stroock と同じ仮定のもとで、Theorem 2 と本質的に同じ結果を得ている (arXiv:1304.6629)。

凸領域では、条件 (A) は、任意の r_0 で成立し、(C) も明らかに $f = 0$ で成立する。また、2 次元では一般の凸領域、一般次元で有界凸領域では、条件 (B) も成立する (田中 (1978))。しかし、一般の凸領域で (B) が成立するのかは、講演者には不明である。これについては、反例があるのか、単に誰も考えていないだけなのかよくわからない。以下の結果はこの場合と、条件 (C) を落とした場合の結果である。

Theorem 4 ([2])**.** (1) D を凸領域とする。(9) が成立する。
(2) D は (A), (B) を満たすとする。このとき、$\max_{0 \le t \le T} |Y^N(t) - Y(t)|$ は 0 に確率収束する。

次に、$\bar{D}$ 上の reflecting rough differential equation(=RRDE) に関する結果を述べる。$X = (1, X_{s,t}^1, X_{s,t}^2)$ $(0 \le s \le t \le T)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の p-rough path $(2 \le p < 3)$ とする。Φ_t は $\mathbb{R}^d$ 値の連続有界変動関数とし、次の rough differential equation を考える:

$$dY_t = \sigma(Y_t)dX_t + d\Phi_t, \quad Y_0 = y_0 \in \bar{D}. \tag{10}$$

正確には この方程式の driving rough path は $\int_s^t X^1_{s,u}\otimes d\Phi_u$ などの iterated integral が定まるので、自然に (X,Φ) に付随して決まる p-rough path である．この解 $Y=(1,Y^1_{s,t},Y^2_{s,t})$ に対して $Y_t=y_0+Y^1_{0,t}$ とおくと $Y_t\in\bar{D}$ $(0\le t\le T)$ であり、

$$\Phi_t=\int_0^t 1_{\partial D}(Y_s)\boldsymbol{n}(s)d\|\Phi\|_{[0,s]},\quad \boldsymbol{n}(s)\in\mathcal{N}_{Y_s}\text{ if }Y_s\in\partial D\quad;\quad 0\le t\le T \tag{11}$$

を満たす時, (Y,Φ) は X を driving rough path とする RRDE の解と言うことにする。結果を述べるために、一つ仮定を述べる。$\mathbb{R}^d$ 上の連続な path w_t $(w_0\in\bar{D})$ が与えられた時, Skorohod 方程式 $\xi_t=w_t+\phi_t$ の解を考え (すなわち、$\xi_t\in\bar{D}$ $(0\le t\le T)$, ϕ_t が反射を引き起こす有界変動項), 次の仮定を考える:

(H1) 正定数 C_D が存在して、任意の w について、ϕ の 任意の区間 $[s,t]\subset[0,T]$ での全変動が次の評価を持つ:

$$\|\phi\|_{[s,t]}\le C_D\max_{s\le u\le v\le t}|w_v-w_u|.$$

(H1) は例えば、凸かつ条件 (B) の仮定が $\delta=+\infty$ で成立するときに成り立つ。A.M. Davie が反射壁の無い rough differential equation に対する Euler 近似による解の構成を行なっている (Appl.Math.Res.Express. AMRX 2007) がその手法を用い次の定理を証明できる。

Theorem 5 ([1])**.** (A), (B), (H1) を仮定する。ω を $X_{s,t}$ の *control function* とする*:*

$$|X^i_{s,t}|\le\omega(s,t)^{i/p}\qquad 0\le s\le t\le T,\quad i=1,2.$$

このとき、(10) の解で、次の評価をみたすものが存在する。

$$|Y^i_{s,t}|\le C(1+\omega(0,T))^3\omega(s,t)^{i/p} \tag{12}$$

$$\|\Phi\|_{[s,t]}\le C(1+\omega(0,T))\omega(s,t)^{1/p}. \tag{13}$$

ただし、C は C_D,σ,p にのみ依存する定数。

$1\le p<2$ の時、連続な p-variation path x_t で drive された方程式を考えることもできる。このときは、D は条件 (A), (B) を満たすだけで解の存在と評価を得ることができる。$1\le p<2$ で D が半空間の場合は、Ferrante-Rovira (J.Evol. Equ. 13, 2013) の研究がある。ただし、彼らの論文でも、講演者の結果でも一意性は open problem となっている。更には、p-variation path の時も、p-rough path の場合も p-rough path の空間の間の写像 $X\mapsto Y$ が Borel 可測に取れるかも、不明である。また、$2\le p<3$ のときは、Euler 近似の Skorohod 方程式が implicit な方程式になる。これを解くため、余分に条件 (H1) を仮定したことを注意しておく。講演では、$X_{s,t}$ が Brownian rough path $B_{s,t}$ の場合の Theorem 5 の解と通常の reflecting SDE としての解との関係についても説明する。

References

[1] S. Aida, Reflecting rough differential equations, arXiv:1311.6104.

[2] S. Aida, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces II, in preparation.

[3] S. Aida and K. Sasaki, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces, SPA (2013) Vol. 123, 3800–3827.