—— 問題の略解 ——

A4 $\left.\dfrac{d}{dx}f(x,0)\right|_{x=0}=0,\ \left.\dfrac{d}{dy}f(0,y)\right|_{y=0}=0$ より, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ である．ここで,

$$\varepsilon(h,k)=f(0+h,0+k)-f(0,0)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)=|hk|$$

とおくと, $\dfrac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ は $(h,k)\to(0,0)$ のとき発散する．従って, $f(x,y)$ は $(0,0)$ に於いて全微分可能ではない.

B4 $\left.\dfrac{d}{dx}f(x,0)\right|_{x=0}=0,\ \left.\dfrac{d}{dy}f(0,y)\right|_{y=0}=0$ より, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ である．ここで,

$$\varepsilon(h,k)=f(0+h,0+k)-f(0,0)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)=|hk|^2$$

とおくと, $\dfrac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ は $(h,k)\to(0,0)$ のとき 0 に収束する．従って, $f(x,y)$ は $(0,0)$ に於いて全微分可能である.

B10′ $g(x,y)=2x^2+y^2-1$ とおき, $F(x,y;\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^2-\lambda(2x^2+y^2-1)$ とする．

$g(x,y)=F_x(x,y;\lambda)=F_y(x,y;\lambda)=0$ となる (x,y,λ) を求めると, $(x,y,\lambda)=(0,\pm1,0)=(\pm1/\sqrt{2},0,1)$ を得る．即ち, 極値となりうる点は $(x,y)=(0,\pm1),(\pm1/\sqrt{2},0)$ 以外に存在しない.

一方, 楕円周上では連続関数 $f(x,y)=x^2$ は最大値と最大値を持つ．故に, $(x,y)=(\pm1/\sqrt{2},0)$ で極大値 $\dfrac{1}{2}$, $(x,y)=(0,\pm1)$ で極小値 0 を持つ.

A13 (1) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$ (2) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

B11 (3) $\dfrac{a^2}{3}.$

B12 (1) $\dfrac{58}{27}-\log 3.$ (2) $\dfrac{a^6\pi}{24}.$ (3) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{\pi}{9}.$

B13 (1) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx.$ (2) $\displaystyle\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{a^2-x^2}/a} f(x,y)dy.$

A14 (1) $\dfrac{\pi^2}{2}.$ (2) 積分値を I とおくと, $I=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{2-n}(2^{n-1}-1) & (n\neq2),\\ 2\pi\log2 & (n=2).\end{cases}$

A15 (1) $2.$ (2) $-\pi.$

B14 (1) $\dfrac{\pi}{24}.$ (2) $\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi}{4}.$

B15 (1) $\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$ や $-\log\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right).$ (2) $\dfrac{e}{4}-\dfrac{1}{4e}.$

A16 (1) $\dfrac{2\pi}{3}\left((1+a^2)^{3/2}-1\right).$ (2) $\sqrt{3}\pi$ （註：発表された方の解答が正しいです。私の方で計算ミスしてました。すいません。）

A17 (1) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{5}\right).$ (2) $\left(\dfrac{4}{3\pi},\dfrac{4}{3\pi}\right).$

B16 (1) $\pi\left(\sqrt{2}+\mathrm{Sinh}^{-1}1\right).$ （註：プリントに誤りがあります。正確には

$$\int\sqrt{1+r^2}dr=\frac{1}{2}\left(r\sqrt{1+r^2}+\mathrm{Sinh}^{-1}\mathrm{r}\right)+C.$$

です。）

B17 (1) $\left(\dfrac{1}{2}(\pi-2),\dfrac{\pi}{8}\right).$ (2) $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right).$