$\sin\sin\sin\cdots$

三角関数 sin 同士を合成した $\sin(\sin x)$, $\sin(\sin(\sin x))\cdots$ たちを考える.

定義. $N\in\mathbb{N}$ に対して, 関数 $s_N(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ を

$$\begin{aligned} s_1(x) &= \sin(x), \\ s_{N+1}(x) &= \sin(s_N(x)), \quad N\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

によって与える.

Maclaurin 展開

多重合成関数の Maclaurin 展開は, 極めて複雑になりうるが, s_N のときは比較的簡潔に表現される. まず

$$s_1(\ell x) = \sin(\ell x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ell^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \ell\in\mathbb{R}$$

であることと,

$$\sin^{2n+1} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^n} \binom{2n+1}{n-k} \sin((2k+1)x)$$

が成り立つことを思い出すと,

$$\begin{aligned} s_2(x) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1}}{(2n_1+1)!} \sin^{2n_1+1} x && (1) \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1}}{(2n_1+1)!} \sum_{k_1=0}^{n} \frac{(-1)^{k_1}}{4^{n_1}} \binom{2n_1+1}{n_1-k_1} \sin((2k_1+1)x) \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1}}{(2n_1+1)!} \sum_{k_1=0}^{n_1} \frac{(-1)^{k_1}}{4^{n_1}} \binom{2n_1+1}{n_1-k_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2k_1+1)^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{n_1} \frac{(-1)^{n+n_1+k_1} (2k_1+1)^{2n+1}}{4^{n_1}(2n_1+1)!(2n+1)!} \binom{2n_1+1}{n_1-k_1} \right) x^{2n+1} && (2) \end{aligned}$$

を得る. 最後の等式は,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{n_1} \frac{(2k_1+1)^{2n+1}}{4^{n_1}(2n_1+1)!(2n+1)!} \binom{2n_1+1}{n_1-k_1} |x|^{2n+1} \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(2n_1+1)^{2n+1}|x|^{2n+1}}{(2n_1+1)!(2n+1)!} \sum_{k_1=0}^{n_1} \frac{1}{4^{n_1}} \binom{2n_1+1}{n_1-k_1} \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(2n_1+1)^{2n+1}|x|^{2n+1}}{(2n_1+1)!(2n+1)!} \times \frac{2^{2n_1+1}/2}{4^{n_1}} \\ &\le \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n_1^n |x|^n}{n!} \right) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{e^{n_1|x|}}{n_1!} = e^{e^{|x|}} < \infty \end{aligned}$$

によって保障されている．以上の計算を繰り返すと，一般の N における s_N の Maclaurin 級数を得る．結論を述べるため，多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_M), \beta=(\beta_1,\cdots,\beta_M)\in\mathbb{N}_0^M$ と $n\in\mathbb{N}_0$ に対して，

- $\displaystyle\binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$,
- $\beta\le\alpha \overset{\text{def}}{\iff} \beta_j\le\alpha_j\ (j=1,\cdots,M)$,
- $\langle\alpha,n\rangle=\begin{cases} n & (M=1), \\ (\alpha_2,\cdots,\alpha_M,n) & (M\ge 2)\end{cases}$

を定めておく．また各成分が 1 である多重指数を $\mathbf{1}$ とおく．このとき，s_N は次を満たす:

定理 1. $N\ge 2$ たる自然数 N に対して，

$$s_N(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\sum_{\beta\le\alpha}\frac{(-1)^{n+|\alpha|+|\beta|}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,n\rangle+\mathbf{1}}}{4^{|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2n+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\right)x^{2n+1},\quad x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

上の右辺は多重級数となるが，次の補題より絶対収束していることがわかる:

補題. $N\ge 2$ たる自然数 N に対して，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\sum_{\beta\le\alpha}\frac{(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,n\rangle+\mathbf{1}}}{4^{|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2n+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}|x|^{2n+1}\le \left.e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{|x|}}}}}\right\}n\text{ 個},\quad x\in\mathbb{R}.$$

（補題の証明）以下の不等式から得られる:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\sum_{\beta\le\alpha}\frac{(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,n\rangle+\mathbf{1}}}{4^{|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2n+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}|x|^{2n+1}\\
&\le\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\frac{(2\alpha+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,n\rangle+\mathbf{1}}|x|^{2n+1}}{(2\alpha+\mathbf{1})!(2n+1)!}\sum_{\beta\le\alpha}\frac{1}{4^{|\alpha|}}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\\
&\le\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\frac{(2\alpha+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,n\rangle+\mathbf{1}}|x|^{2n+1}}{(2\alpha+\mathbf{1})!(2n+1)!}\times\frac{2^{2|\alpha|+N-1}/2^{N-1}}{4^{|\alpha|}}\\
&\le\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\frac{\alpha^{\langle\alpha,n\rangle}|x|^{n}}{\alpha!n!}\le \left.e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{|x|}}}}}\right\}n\text{ 個}.
\end{aligned}$$

（終）

（定理 1 の証明）N に関する数学的帰納法を用いればよい．まず，$N=2$ のときは (2) から既に示されている．もし 2 以上の或る自然数 N に対して，(3) が成り立つものとすると，(2) を求める

ときの方法を用いて

$$
\begin{aligned}
s_{N+1}(x) &= s_N(\sin(x)) \\
&= \sum_{\alpha_N=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\sum_{\beta\le\alpha}\frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|+\alpha_N}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,\alpha_N\rangle+\mathbf{1}}}{4^{|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2\alpha_N+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\right)\sin^{2\alpha_N+1}(x) \qquad (4) \\
&= \sum_{\alpha_N=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\sum_{\beta\le\alpha}\left\{\frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|+\alpha_N}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,\alpha_N\rangle+\mathbf{1}}}{4^{|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2\alpha_N+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\right. \\
&\quad\left.\times\sum_{\beta_N=0}^{\alpha_N}\frac{(-1)^{\beta_N}}{4^{\alpha_N}}\binom{2\alpha_N+1}{\alpha_N-\beta_N}\sin((2\beta_N+1)x)\right\} \qquad (5) \\
&= \sum_{\alpha_N=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\sum_{\beta\le\alpha}\left\{\frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|+\alpha_N}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,\alpha_N\rangle+\mathbf{1}}}{4^{|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2\alpha_N+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\right. \\
&\quad\left.\times\sum_{\beta_N=0}^{\alpha_N}\frac{(-1)^{\beta_N}}{4^{\alpha_N}}\binom{2\alpha_N+1}{\alpha_N-\beta_N}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2\beta_N+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right\} \\
&= \sum_{\alpha_N=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\sum_{\beta\le\alpha}\sum_{\beta_N=0}^{\alpha_N}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+|\alpha|+\alpha_N+|\beta|+\beta_N}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,\alpha_N\rangle+\mathbf{1}}(2\beta_N+1)^{2n+1}}{4^{|\alpha|+\alpha_N}(2\alpha+\mathbf{1})!(2\alpha_N+1)!(2n+1)!}\right. \\
&\quad\left.\times\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\binom{2\alpha_N+1}{\alpha_N-\beta_N}x^{2n+1}\right\}
\end{aligned}
$$

となる. 後は各 $\sum$ の位置を入れ替えることで「N を $N+1$ に置き換えた (3)」が成り立つ. 各 $\sum$ の位置を入れ替えることができるのは, 上の補題が保障している.

（終）

計算してみる

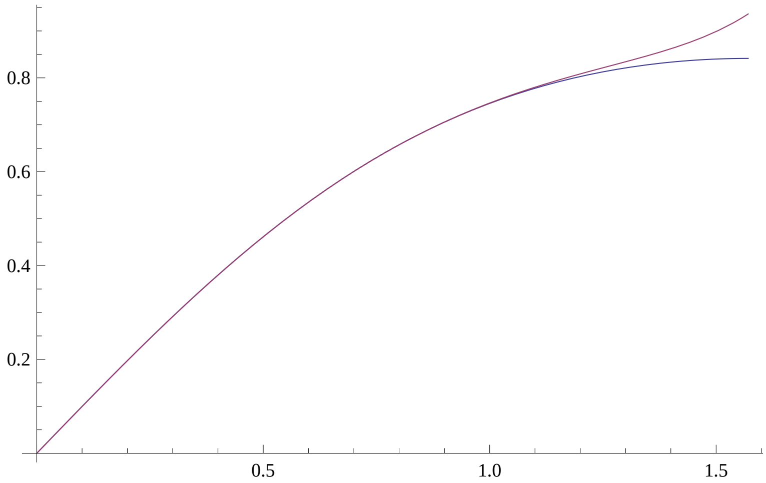
Taylor 級数の部分和

$$
\sum_{n=0}^{M}\left(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}\\|\alpha_j|\le M}}\sum_{\beta\le\alpha}\frac{(-1)^{n+|\alpha|+|\beta|}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,n\rangle+\mathbf{1}}}{4^{|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2n+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\right)x^{2n+1}
$$

を用いて, s_N を描画してみる.

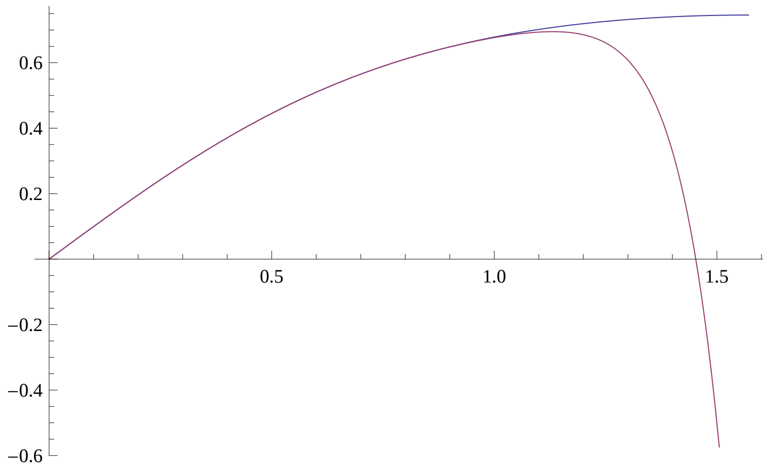
s_2 のとき

$M=4$ とすると, 以下の通りとなる:



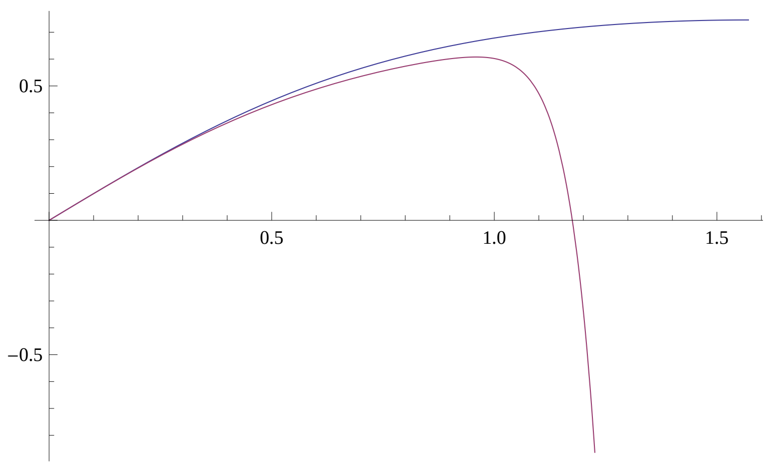
s_3 のとき

$M = 7$ とすると, 以下の通りとなる:



s_4 のとき

$M = 9$ とすると, 以下の通りとなる:



積分

s_N を $[0,\pi/2]$ で積分してみよう. $N\geq 2$ のとき, (4) から

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} s_{N+1}(x)dx\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\sum_{\beta\leq\alpha}\frac{(-1)^{n+|\alpha|+|\beta|}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,n\rangle+\mathbf{1}}}{4^{|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2n+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\right)\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(x)dx\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\sum_{\beta\leq\alpha}\frac{(-1)^{n+|\alpha|+|\beta|}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,n\rangle+\mathbf{1}}}{4^{|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2n+1)!!(2n)!!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\right)\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\sum_{\beta\leq\alpha}\frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,n\rangle+\mathbf{1}}}{4^{|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\right)\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!^2}
\end{aligned}
$$

を得る. s_2 については, (1) から上の大括弧内を 1 とした級数に一致する:

$$\int_0^{\pi/2} s_2(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!^2}\sim 0.893243740975026\cdots$$

Fourier 級数

$N\geq 2$ のとき, 等式 (5) から

$$
\begin{aligned}
&s_{N+1}(x)\\
&=\sum_{\alpha_N=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\alpha_N}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\sum_{\beta\leq\alpha}\left\{\frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|+\alpha_N}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,\alpha_N\rangle+\mathbf{1}}}{4^{|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2\alpha_N+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\right.\\
&\qquad\left.\times\frac{(-1)^n}{4^{\alpha_N}}\binom{2\alpha_N+1}{\alpha_N-n}\sin((2n+1)x)\right\}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=n}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}}\sum_{\beta\leq\alpha}\frac{(-1)^{n+m+|\alpha|+|\beta|}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,m\rangle+\mathbf{1}}}{4^{m+|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2m+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\binom{2m+1}{m-n}\right\}\sin((2n+1)x)\\
&=:\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n+1}\sin((2n+1)x)
\end{aligned}
$$

を得る[1]. まさしくこれは, $[-\pi,\pi]$ における周期関数 s_{N+1} の Fourier 級数展開である. s_2 については, (1) から以下のように書ける:

$$s_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{4^m(2m+1)!}\binom{2m+1}{m-n}\right\}\sin((2n+1)x).$$

[1] 例によって補題から $\sum$ は可換であることが分かる.

従って, $N \geq 2$ について積分公式

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} s_{N+1}(x)\sin(2n+1)dx = \pi b_{2n+1} \\
&= \pi \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}} \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{(-1)^{n+m+|\alpha|+|\beta|}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,m\rangle+\mathbf{1}}}{4^{m+|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2m+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\binom{2m+1}{m-n}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 更に, Parseval の等式から

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} s_{N+1}(x)^2 dx = \pi \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}^2 \\
&= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}} \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{(-1)^{n+m+|\alpha|+|\beta|}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,m\rangle+\mathbf{1}}}{4^{m+|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2m+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\binom{2m+1}{m-n} \right\}^2
\end{aligned}$$

を得る. s_2 についてはそれぞれ

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_2(x)\sin(2n+1)dx = \pi \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{4^m(2m+1)!}\binom{2m+1}{m-n},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_2(x)^2 dx = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{4^m(2m+1)!}\binom{2m+1}{m-n} \right\}^2$$

となる.

計算してみる

Fourier 級数の部分和[2]

$$\sum_{n=0}^{M} \left\{ \sum_{m=n}^{M} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1} \\ |\alpha_j|\leq M}} \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{(-1)^{n+m+|\alpha|+|\beta|}(2\beta+\mathbf{1})^{2\langle\alpha,m\rangle+\mathbf{1}}}{4^{m+|\alpha|}(2\alpha+\mathbf{1})!(2m+1)!}\binom{2\alpha+\mathbf{1}}{\alpha-\beta}\binom{2m+1}{m-n} \right\} \sin((2n+1)x)$$

を用いて, s_{N+1} を近似してみる.

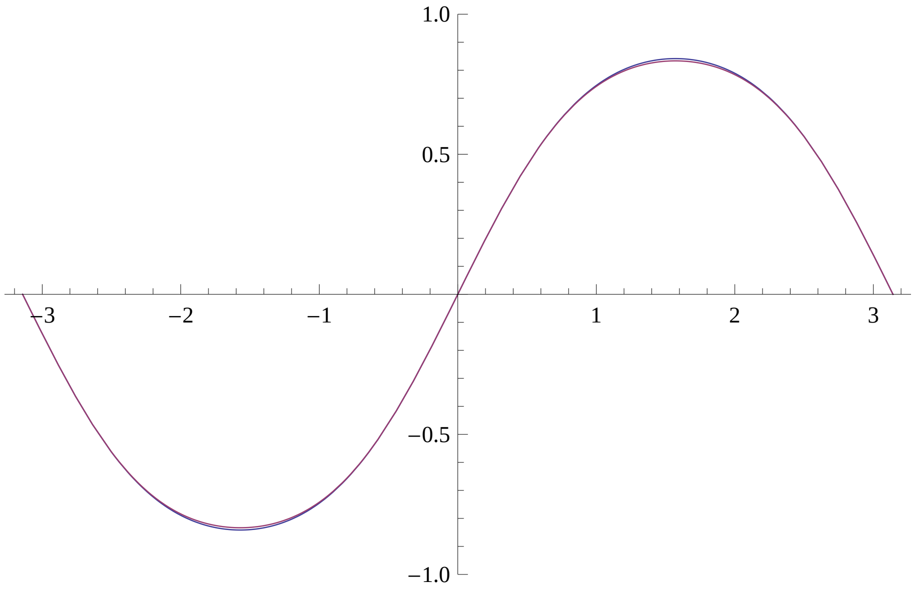
s_2 のとき

$M = 1$ とすると, 最大絶対誤差が 0.00813765 程度の部分和

$$\frac{7\sin(x)}{8} + \frac{\sin(3x)}{24}$$

を得る. 次のグラフは, s_2 の曲線（青）と近似関数の曲線（紫）である.

[2]通常の部分和 $\sum_{n=0}^{M} b_{2n+1}\sin((2n+1)x)$ より粗い.

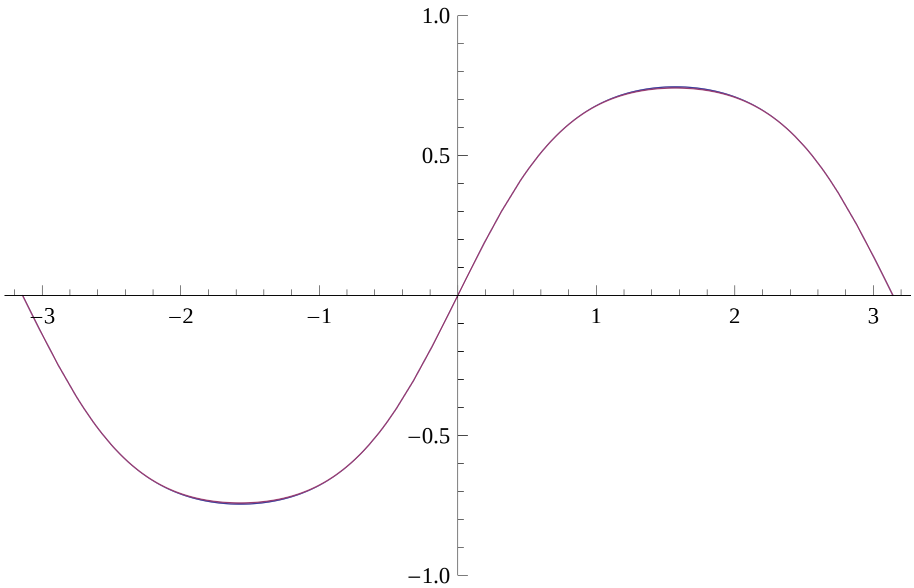


s_3 のとき

$M = 3$ とすると, 最大絶対誤差が 0.0043543 程度の部分和

$$\frac{115\sin(x)}{144} + \frac{29\sin(3x)}{480} + \frac{\sin(5x)}{288} + \frac{\sin(7x)}{2520}$$

を得る. 次のグラフは, s_3 の曲線（青）と近似関数の曲線（紫）である.

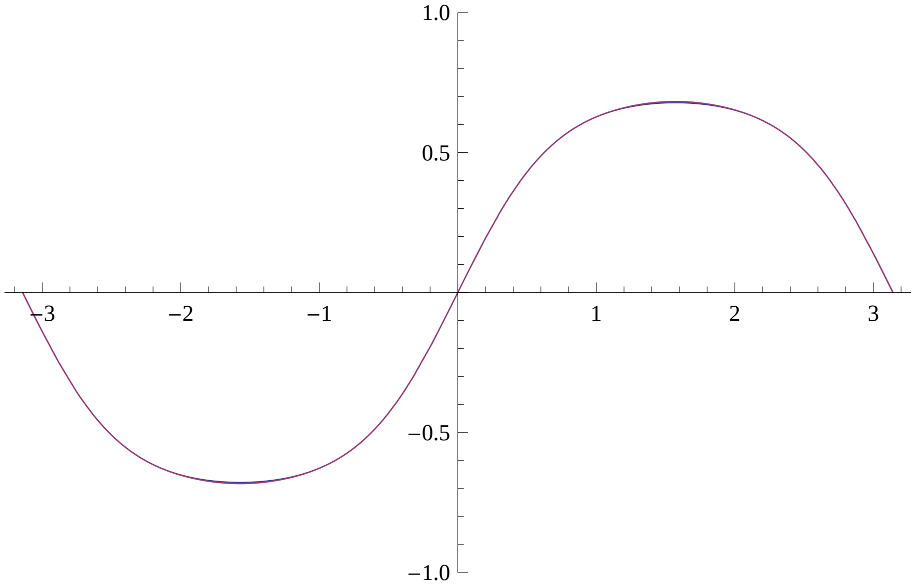


s_4 のとき

$M = 3$ とすると, 最大絶対誤差が 0.00423419 程度の部分和

$$\frac{11055471913\sin(x)}{14863564800} + \frac{18329501\sin(3x)}{264241152} + \frac{304891441\sin(5x)}{35672555520} + \frac{9401563\sin(7x)}{17836277760} + \frac{21558451\sin(9x)}{108999475200} - \frac{26113873\sin(11x)}{1961990553600} + \frac{17812013\sin(13x)}{5101175439360}$$

を得る. 次のグラフは, s_4 の曲線（青）と近似関数の曲線（紫）である.


1.0
0.5
−0.5
−1.0
−3
−2
−1
1
2
3