色相と複素関数

色

色は「赤 (Red)」「緑 (Green)」「青 (Blue)」の三原色から構成される．数学的には 3 つのパラメータ (R, G, B) によって決定される．

(例 1) 赤 ♠ は $(1, 0, 0)$, 緑 ♠ は $(0, 1, 0)$, 青 ♠ は $(0, 0, 1)$ である．

(例 2) 白 は $(1, 1, 1)$, 黒 ♠ は $(0, 0, 0)$ である．

(例 3) 黄色「＝赤＋緑」♠ は $(1, 1, 0)$, シアン「＝緑＋青」♠ は $(0, 1, 1)$, マゼンダ「＝青＋赤」♠ は $(1, 0, 1)$ である．

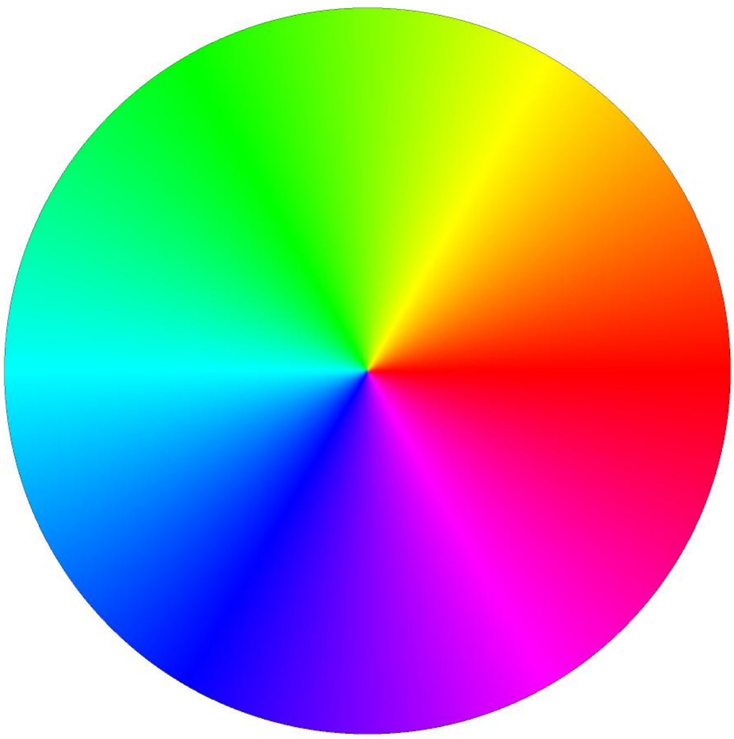
(例 4) $(1, 0, 0)$ から $(0, 0, 0)$ への移り変わり: ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠

(例 5) $(1, 0, 0)$ から $(1, 1, 1)$ への移り変わり: ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠ ♠

色相

何らかのルールに基づいて, 並べられた色のリストを色相という．特に環状に並べたものを色相環という．

色相環の代表的モデルは､「角度 0（ラジアン）に赤 $(1, 0, 0)$, 角度 $2\pi/3$ に緑 $(0, 1, 0)$, 角度 $4\pi/3$ に青 $(0, 0, 1)$ を置き「適当なルール」で補間的に並べたもの」である．



「適当なルール」とは具体的には, $a = \dfrac{3}{\pi}$, $b = \dfrac{\pi}{3}$ について,

$$[0,2\pi) \ni \theta \mapsto \begin{cases} (\ 1,\ a\theta,\ 0\ ), & (0 \le \theta < \pi/3), \\ (\ -a(\theta-2b),\ 1,\ 0\ ), & (\pi/3 \le \theta < 2\pi/3), \\ (\ 0,\ 1,\ a(\theta-2b)\ ), & (2\pi/3 \le \theta < \pi), \\ (\ 0,\ -a(\theta-4b),\ 1\ ), & (\pi \le \theta < 4\pi/3), \\ (\ a(\theta-4b),\ 0,\ 1\ ), & (4\pi/3 \le \theta < 5\pi/3), \\ (\ 1,\ 0,\ -a(\theta-6b)\ ), & (5\pi/3 \le \theta < 2\pi) \end{cases} \in [0,1]^3$$

である. これは自然に周期 2π の連続関数へ拡張できるが, 意外にも（？）滑らかな関数ではない. しかし, $\theta = 0$ から $\theta = 3\pi/2$ にかけては, 虹色「赤, 橙, 黄, 緑, 青, 藍, 紫」の分布が与えられている（$\theta = 3\pi/2$ から $\theta = 2\pi$ にかけては, 赤紫系で補間している）. 以下ではこのモデルを単純に「色相環」と呼ぶことにしよう.

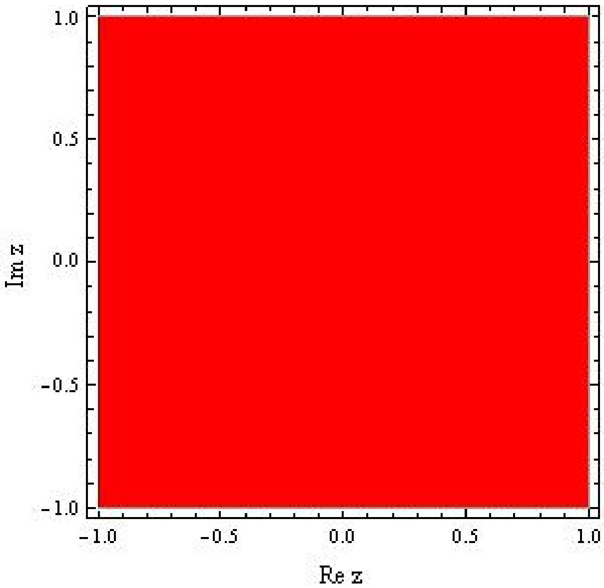
円周 $\mathbb{S}^1$ と色相環は位相同型であると言える. 即ち円周もしくは 1 次元トーラス $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ の点は, 色相環を構成する或る色で一意且つ連続的に表現されている.

複素関数

色相環を $\mathbb{S}^1$ と見做せるということは, 複素数の偏角を色で表わせるということである. 以下ではあまり理屈を書かずに, 幾つかの複素関数（の偏角）を描いてみよう[1].

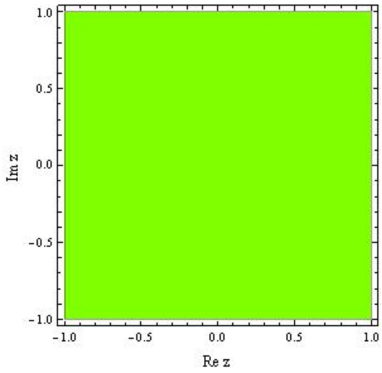
定数関数

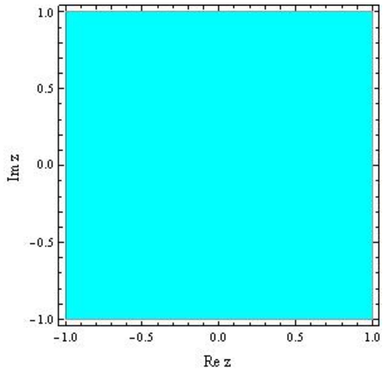
つまらない例だが, 定数関数 $z = 1$ を描いてみる.

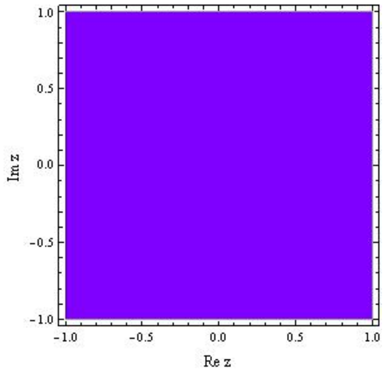


任意の z において $arg(z) = 0$ であるので, 赤一色となる. $z = i, -1, -i$ も描いておく.

[1]絶対値については, 等高線を与えたり, 色に明暗を加えれば良い

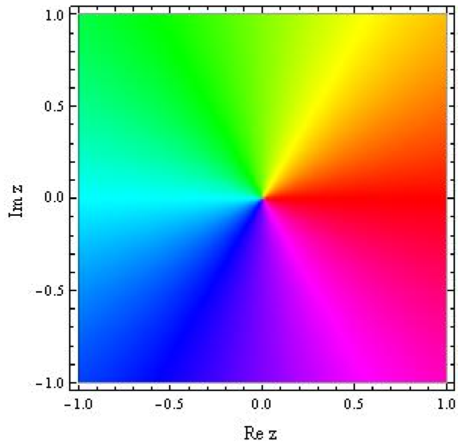






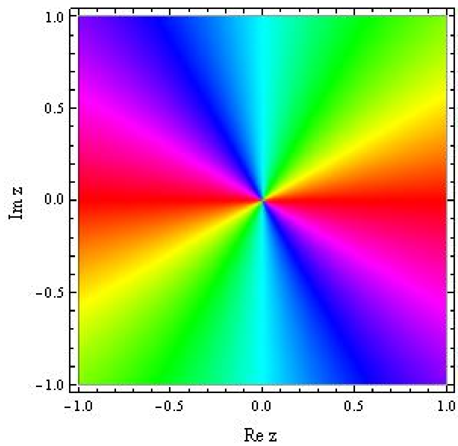
$f = z$

この関数は色相環を単純に拡張したものとなる.



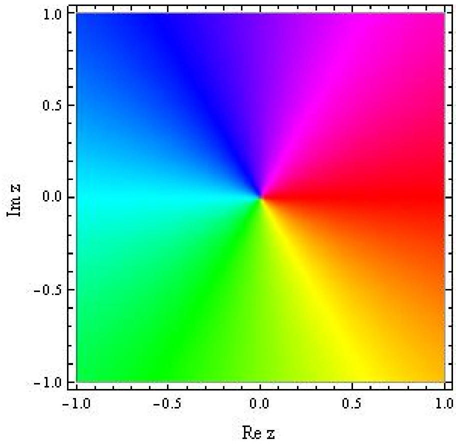
$f = z^2$

この関数は色相環を「2 回転した」ものとなる.



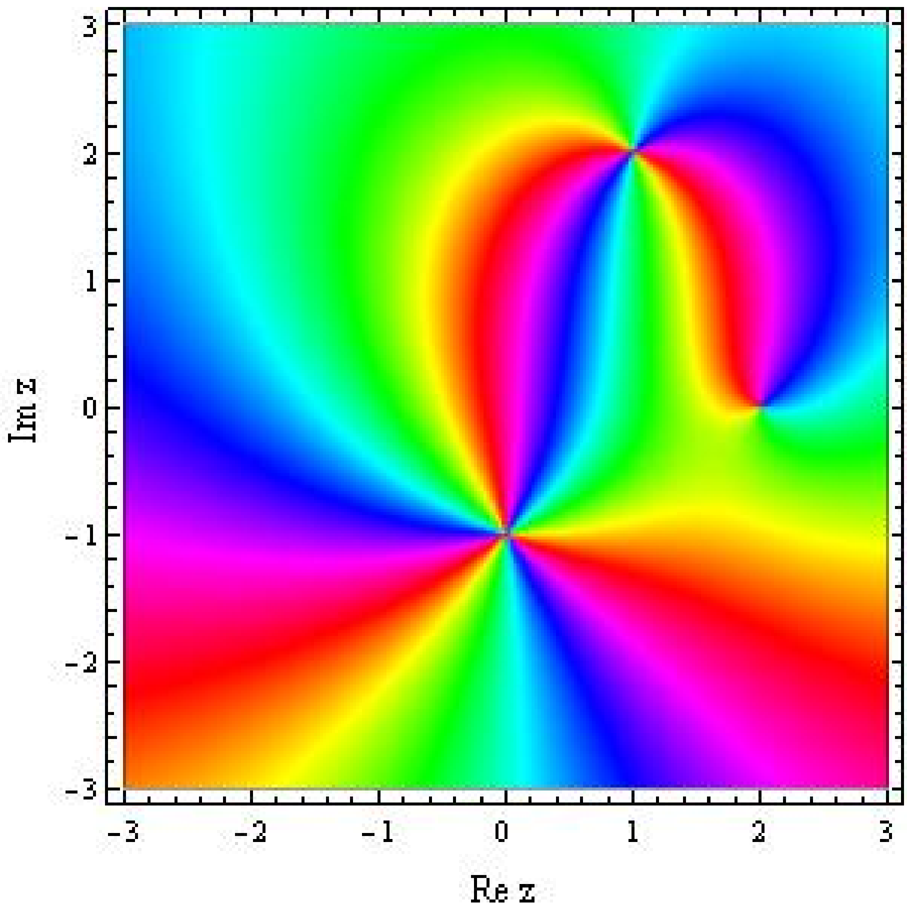
$$f = \frac{1}{z}$$

この関数は色相環を「逆回転した」ものとなる.



整関数

零点及び特異点が Gauß 整数[2] である有理関数は,「絵解き」で求めることができる. 例えば,



[2]実部・虚部とも整数である複素数のこと.

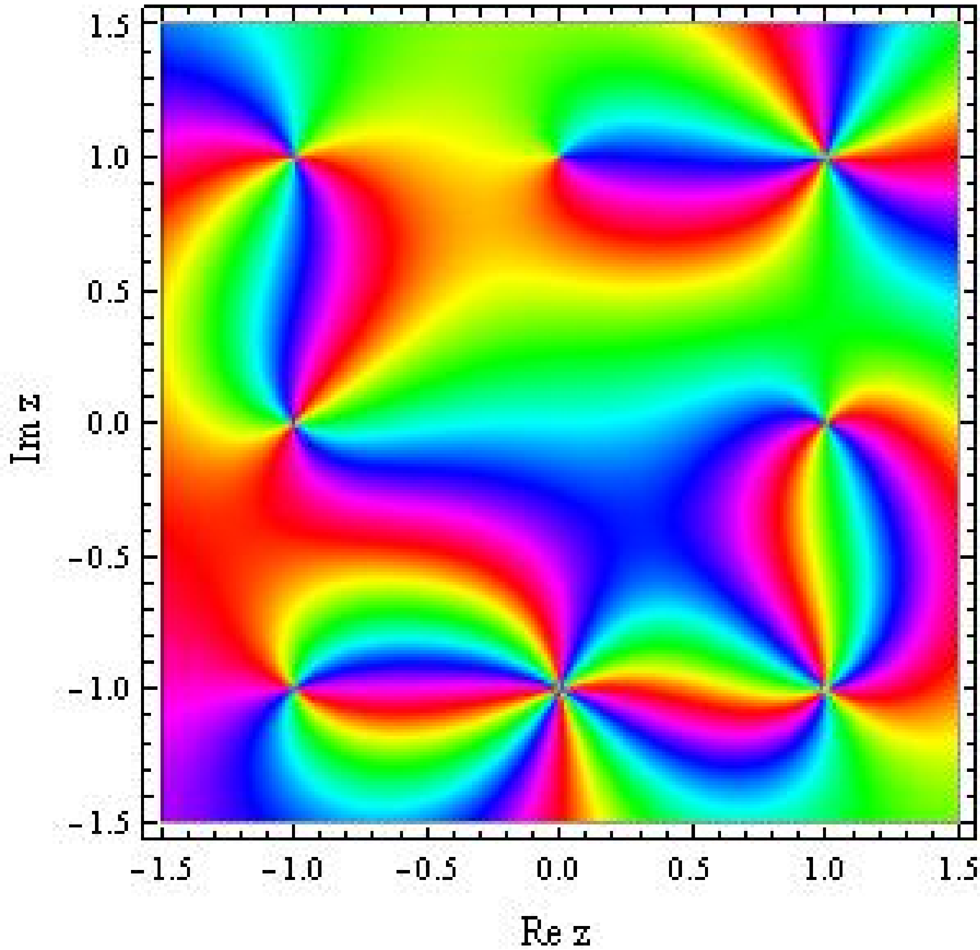
を考えよう．まず零点または特異点は, $z = 2, -i, 1 + 2i$ に存在する．$z = 2$ において, 色相環は 1 回転しているので, $z = 2$ は 1 位の零点である．$z = -i$ において, 色相環は 3 回転しているので, $z = -i$ は 3 位の零点である．$z = 1 + 2i$ において, 色相環は逆向きに 2 回転しているので, $z = 1 + 2i$ は 2 位の特異点である．以上から,

$$f = \frac{(z-2)(z+i)^3}{(z-1-2i)^2}$$

が得られた．

練習問題

以下の絵を描く有理関数（零点及び特異点は全て Gauß 整数）を特定せよ．

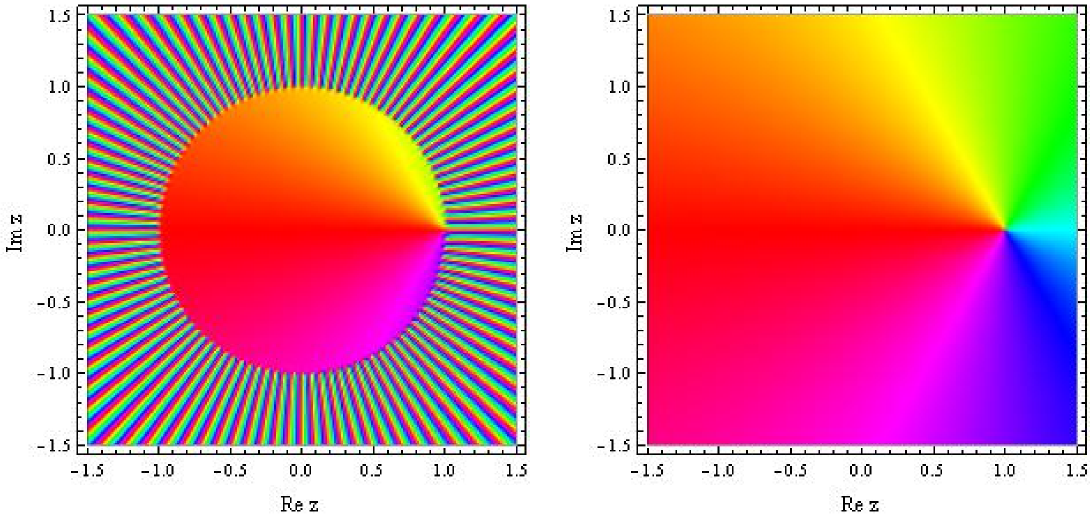


Taylor 展開

Taylor 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

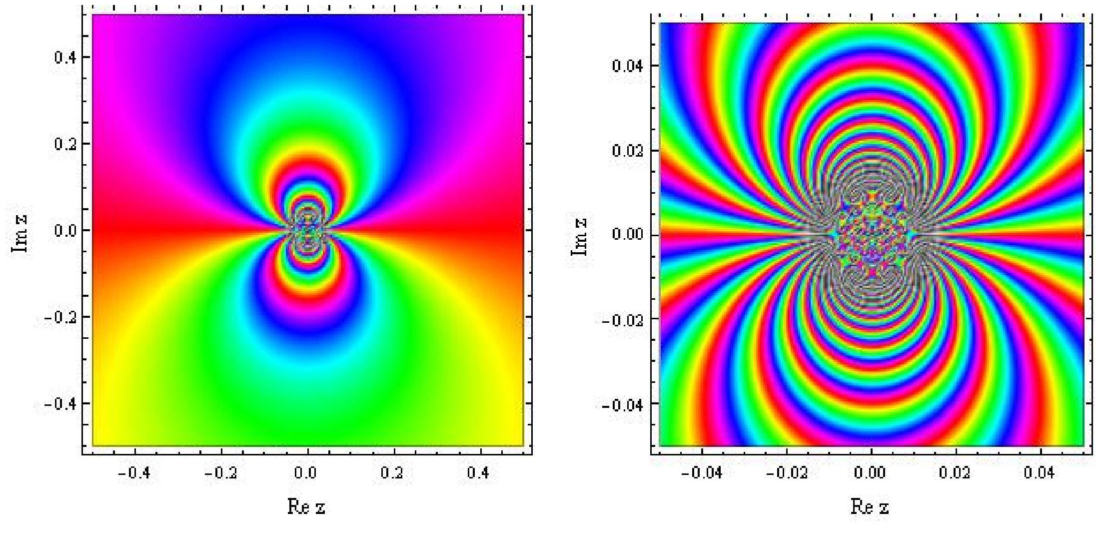
の収束半径は 1 であり, 半径内では $\dfrac{1}{1-z}$ に広義一様絶対収束する．



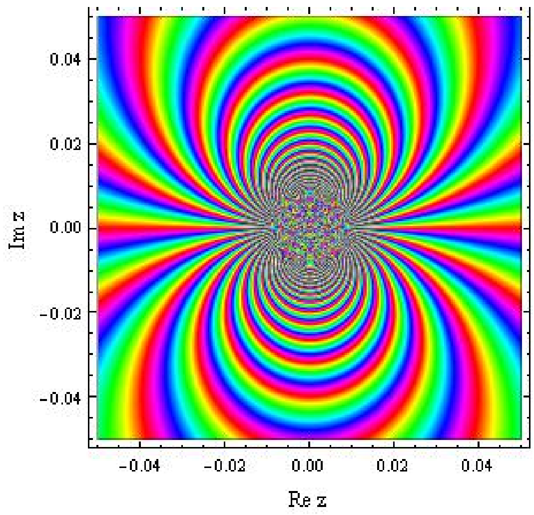
左は級数の第 101 部分和であり, 右は $f = \dfrac{1}{1-z}$ である. 収束半径内ではほぼ同じ配色となっているが, 外では全く異なっている.

$$f = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

この関数は $z = 0$ で真性特異点を持つ. その部分に注目しよう.



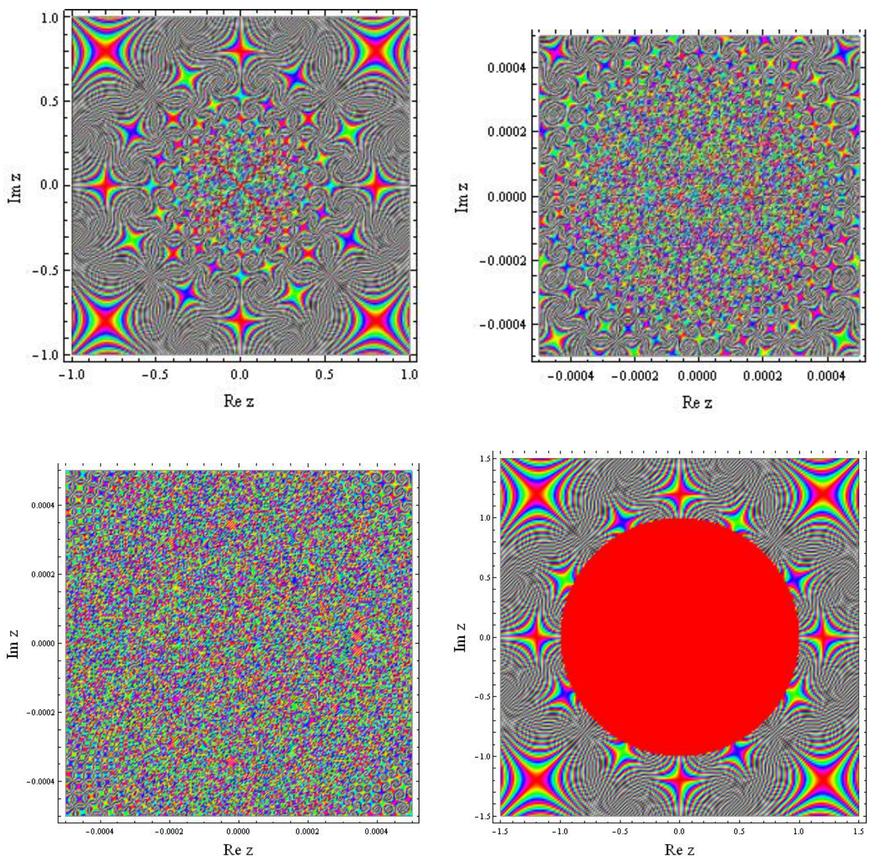
まず左は, 原点中心直径 2 の正方形に於けるグラフである. 中心へ近づくにつれ, 激しく色彩が変動していることが分かる. 右のグラフは左のそれを 10 倍に拡大したものである. 周辺部分 $(|z| > 0.02)$ の変動リズムは単調といえるが, 中心部分では何やら複雑な模様が発生している. 残念ながらこれはエラーである. 色彩が非常に激しく変動している一方で, プロットする点が足りな過ぎるのである. 「複雑な模様」には或る種の規則性が見えるが, これは激しい変動の規則性とプロットする間隔の規則性による相互作用に基づいている. ここで, 精度を 9 倍に上げて再描画する.



「複雑な模様」は幾分委縮したが, 消滅はしなかった. いずれにしても模様はエラーであることが分かる.

エラーで遊ぶ

ここは開き直って, エラー由来の模様を作って楽しもう.



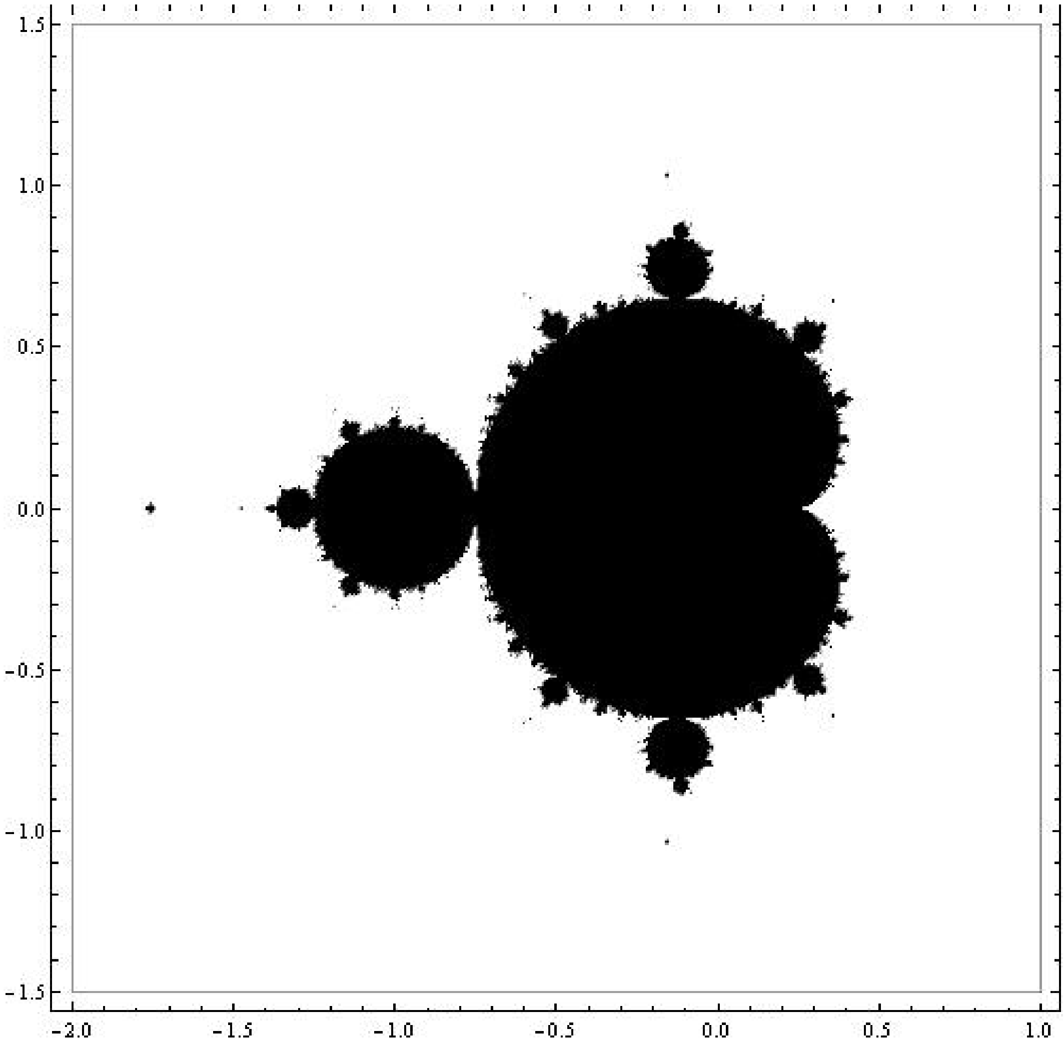
左上から右下にかけてそれぞれ, $f = z^{1000}$, $f = \sin(1/z)$, $f = (z - 0.01)^{1/z}$, $f = 1/(1 + z^{1000})$ のグラフ（のエラー）である.

Mandelbrot 集合

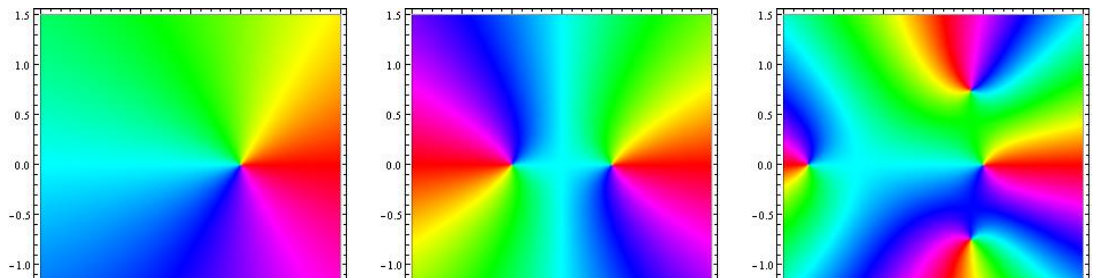
フラクタル幾何でお馴染みの Mandelbrot 集合 $\mathbb{M}$ は, $m_0(z) = 0$, $m_{n+1}(z) = m_n(z)^2 + z$ ($z \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \cdots$) で与えられる数列によって

$$\mathbb{M} = \left\{ z \in \mathbb{C};\ \text{数列} \left(|m_n(z)| \right)_{n=0}^{\infty} \text{は}\ n \to \infty\ \text{のとき無限大に発散しない} \right\}$$

で定義されるものである. 定義はシンプルだが, 形状は全くそうではない.

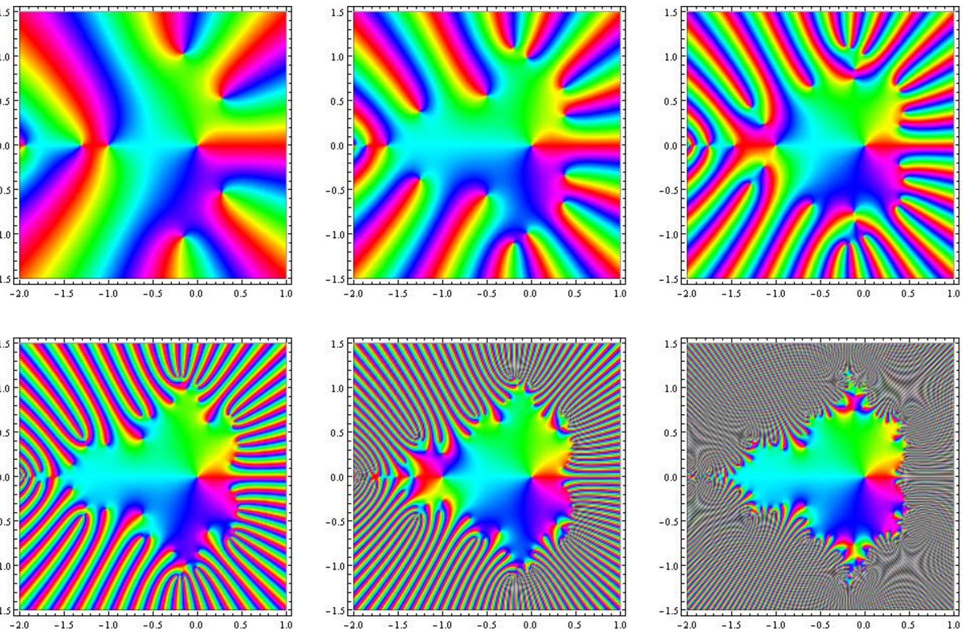


関数 $f = m_n(z)$ を（n を増やしつつ）描画することで, この形状の成り立ちを見ていこう.

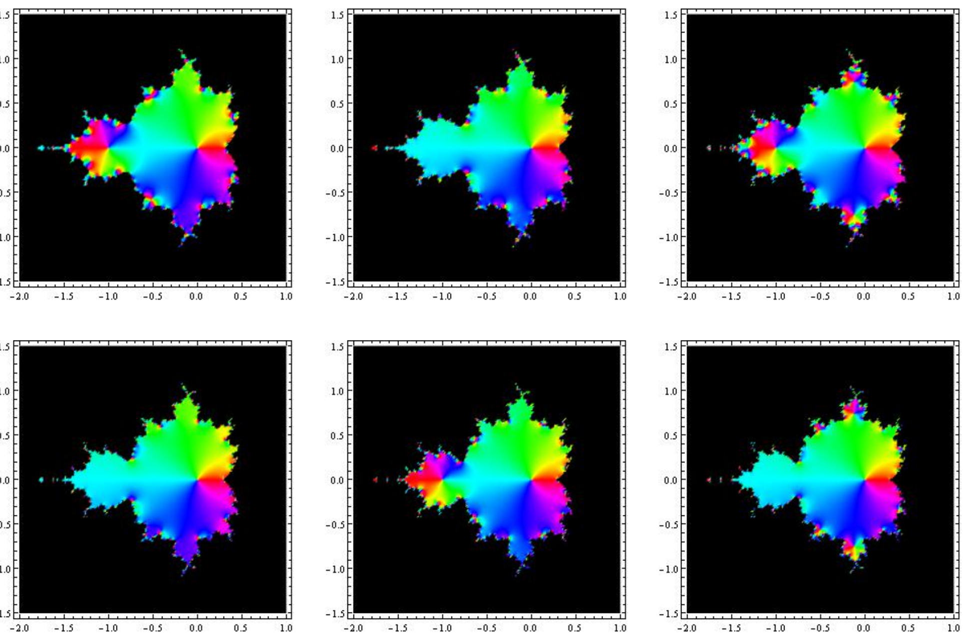


上では $n = 1$ から $n = 3$ のときを描画した. まだ何も分からない. 次に $n = 4$ から $n = 9$ のとき

を描画しよう.



n が増えるにつれ, Mandelbrot 集合の外では激しく色彩が変化し, $n=9$ では先述の「エラー」が発生している. 以下では, $|m_n(z)|>2$ の部分は黒く染め $n=10$ から $n=15$ について描画しよう.



黒以外の部分がだいたい Mandelbrot 集合に近づいたようだ.

練習問題の答

$$f = \frac{(z-1)^2(z-1-i)^3(z+1-i)^2(z+i)^4}{(z-i)(z+1)^2(z+1+i)^2(z-1+i)^3}.$$