グラフが稠密な関数

定義域 $D \subset \mathbb{R}$ を持つ関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対して,

$$G(f) = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in D\right\}$$

を f の**グラフ**と呼ぶことにする. 以下で, $G(f)$ の（$\mathbb{R}^2$ の Euclid 位相による）閉包 $\overline{G(f)}$ が, $\mathbb{R}^2$ に等しくなるような f を作る.

1　関数 F の定義

多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^3$ に対して, $p(\alpha) = (2, 3, 5)^\alpha$ と定める. 実数 x が,

(A) $\exists k \in \mathbb{Z} \quad \exists \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^3$ s.t. $x = \dfrac{2k+1}{2^{p(\alpha)}}$

を満たすとき,

$$F(x) = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2^{\alpha_1}}$$

とおく. （性質 (A) が成り立つとき, k, α は一意に定まる.）また, x が (A) を満たさないとき, $F(x) = 0$ とする. このとき, 写像 $F : \mathbb{R} \ni x \mapsto F(x) \in \mathbb{R}$ は以下を満たす:

命題 1　$\overline{G(F)} = \mathbb{R}^2$.

関数 F の性質

集合 $F^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ は可算である. 従って, F は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可測関数となる. F の値域は $B = \{n2^{-m}; n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}\}$ に等しい. $G(F) \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}) \subset B \times B$ が成り立つ.

証明の準備

$x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$g(x, n) = \frac{2\left[2^{n-1}x\right] + 1}{2^n}$$

と

$$h(y, n) = \frac{[2^n y]}{2^n}$$

を定める. 但し, $[x]$ は x より大きくない整数の中で最大のものである. このとき,

(i) $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^3$ に対して, $F(g(x, p(\alpha))) = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_3}{2^{\alpha_1}}$.

(ii) $|x - g(x, n)| \leq 2^{-n}$.

(iii) $|y - h(y, n)| \leq 2^{-n}$.

が言える.

命題 1 の証明

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\varepsilon\in(0,1)$ を任意に選び固定する．このとき, $n=[-\log_2\varepsilon]+2$ とおくと, $n\in\mathbb{N}$ かつ $0<2^{-n+1}<\varepsilon$ を得る．また,

$$\alpha=(n,[2^ny]\vee 0,-[2^ny]\wedge 0),\quad x_n=g(x,p(\alpha))$$

を定める．但し, $a\vee b:=\max\{a,b\}$, $a\wedge b:=\min\{a,b\}$ である．このとき (i) から,

$$F(x_n)=\frac{[2^ny]\vee 0+[2^ny]\wedge 0}{2^n}=\frac{[2^ny]}{2^n}=h(y,n)$$

を得る．更に, (ii) と (iii) から,

$$|x-x_n|\le 2^{-p(\alpha)}\le 2^{-2^n}\le 2^{-n}$$

及び,

$$|y-F(x_n)|=|y-h(y,n)|\le 2^{-n}$$

が成り立つので,

$$(x_n,F(x_n))\in B((x,y),\varepsilon)\cap G(F)$$

を得る．但し, $B((x,y),\varepsilon):=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;|x-u|^2+|y-v|^2<\varepsilon^2\}$ である．故に (x,y) は $G(F)$ の触点であり, $\overline{G(F)}=\mathbb{R}^2$ が示された．（証明終）

2 全単射になるように F を修正する

上で与えた F は, 単射でも全射でもない．ここで, F を全単射になるように修正してみよう．多重指数 $\beta\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2$ に対して, $q(\beta)=(7,11)^\beta$ と定める．実数 x が (A) を満たすとき,

$$\psi(x)=F(x)+\exp(-p(\alpha)\times q(k\vee 0,-k\wedge 0))$$

を与える．性質 (A) を満たすような実数全体の集合を A とする．e^{-1} が超越数であることを用いると, $\psi:A\to\mathbb{R}$ は単射であることが分かる．$A\cap\psi(A)=\emptyset$ であることから,

$$\varphi(x)=\begin{cases} x & \text{if } x\in(\mathbb{R}\setminus A)\setminus\psi(A),\\ \psi^{-1}(x) & \text{if } x\in(\mathbb{R}\setminus A)\cap\psi(A)\end{cases}$$

によって $\varphi:\mathbb{R}\setminus A\to\mathbb{R}\setminus\psi(A)$ を定義することができる．この φ は全単射かつ Lebesgue 可測となる．

更に, 写像 $F_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を, $F_1(x)=\psi(x)$ $(x\in A)$ 及び $F_1(x)=\varphi(x)$ $(x\in\mathbb{R}\setminus A)$ となるように定める．明らかに, F_1 は全単射である．この F_1 は次を満たす:

命題 2 $\overline{G(F_1)}=\mathbb{R}^2$.

証明. $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\varepsilon\in(0,1)$ を任意に選び固定する. このとき, $n=[-\log_2\varepsilon]+3$ とおくと, $n\in\mathbb{N}$ かつ $0<2^{-n+2}<\varepsilon$ を得る. また,

$$\alpha=(n,[2^n y]\vee 0,-[2^n y]\wedge 0),\quad \beta=\Big([2^{p(\alpha)-1}x]\vee 0,-[2^{p(\alpha)-1}x]\wedge 0\Big),\quad x_n=g(x,p(\alpha))$$

を定める. このとき (i) と (ii) から,

$$F_1(x_n)=h(y,n)+\exp\Big(-p(\alpha)\times q(\beta)\Big)$$

かつ

$$|x-x_n|\leq 2^{-p(\alpha)}\leq 2^{-n}$$

を得る. 更に (iii) から,

$$|y-F_1(x_n)|\leq|y-h(y,n)|+e^{-n}\leq 2^{-n}+e^{-n}<2^{-n+1}$$

が成り立つので,

$$(x_n,F_1(x_n))\in B((x,y),\varepsilon)\cap G(F_1)$$

を得る. 故に (x,y) は $G(F_1)$ の触点であり, $\overline{G(F_1)}=\mathbb{R}^2$ が示された. □

3 開集合の閉包と一致するもの

Ω を空でない $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. このとき, $\overline{G(F_\Omega)}=\overline{\Omega}$ を満たす関数 F_Ω を探してみよう.

補題 3 $\overline{\Omega}=\overline{\Omega\cap G(F)}$.

証明. $(x,y)\in\Omega$ を任意に選ぶ. このとき, 或る正数 ε_0 が存在し $B((x,y),\varepsilon_0)\subset\Omega$ を満たす. 命題 1 から, 任意の正数 ε に対して,

$$\begin{aligned}B((x,y),\varepsilon)\cap(\Omega\cap G(F))&\supset B((x,y),\min\{\varepsilon,\varepsilon_0\})\cap\Omega\cap G(F)\\&\supset B((x,y),\min\{\varepsilon,\varepsilon_0\})\cap G(F)\neq\emptyset\end{aligned}$$

を得る. 故に, (x,y) は $\Omega\cap G(F)$ の触点であるので, $\Omega\subset\overline{\Omega\cap G(F)}$ となる. 従って, $\overline{\Omega}=\overline{\Omega\cap G(F)}$ が成り立つ. □

ここで集合 $A_\Omega=\{x\in A;(x,F(x))\in\Omega\}$ と関数

$$F_\Omega:A_\Omega\ni x\mapsto F(x)\in\mathbb{R}$$

を定める. このとき, $G(F_\Omega)=\Omega\cap G(F)$ を得るので, 補題 3 から $\overline{G(F_\Omega)}=\overline{\Omega}$ を得る.

註：選択公理について

以上の定義や証明では, 選択公理を <u>用いていない</u> ことに注意されたい。