至るところ実解析的ではない無限回微分可能な関数

f を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合 Ω 上で定義された $\mathbb{C}$-値関数とし, $f \in C^\infty(\Omega)$ とおく．このとき, f が Ω の点 x_0 で**実解析的である**とは, Ω の或る x_0-開近傍 A が,

(D1)　$x \in A$ ならば, 冪級数 $\displaystyle\sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$ は絶対収束し, この極限は $f(x)$ に等しい.

を満たすように存在するときをいう[1]. Ω の任意の点で f が実解析的であるならば, 「f は Ω で実解析的である」といい, $f \in C^\omega(\Omega)$ とかく．C^∞ 級関数は必ずしも C^ω 級とは限らない．典型例は,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{if } t > 0, \\ 0 & \text{if } t \leq 0 \end{cases}$$

であろう．これは $C^\infty(\mathbb{R})$ に属するが原点で実解析的ではない．とはいえ, 原点以外では実解析的であるため, $C^\omega(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ には属する．それでは, 「任意の点で実解析的ではない C^∞ 級関数」は存在するのだろうか?

1　補題

議論を進める為に, 二つ補題を用意する.

補題 1.1. $n = 1$ とする．$f \in C^\infty(\Omega)$ は $x_0 \in \Omega$ で実解析であるとする．このとき, Ω の或る x_0-開近傍で f は実解析的である.

証明．或る $R > 0$ が存在し, $B(x_0; R) \subset \Omega$ かつ

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{(m-k)!}(x-x_0)^{m-k}, \quad x \in B(x_0; R),\ k \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

が成り立つ．冪級数 $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$ の収束半径は R 以上である為,

$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{\left|\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\right|} \leq \frac{1}{R}$$

を得る．従って,

$$\exists M_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall m \geq M_0 \ \left|\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\right| \leq \left(\frac{2}{R}\right)^m$$

[1] [1] による定義は, (D1) を

(D2)　$x \in A$ ならば, 冪級数 $\displaystyle\sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$ は絶対, <u>一様に</u> 収束し, この極限は $f(x)$ に等しい.

に換えたものである．二つの定義は互いに同値である.

が成り立つ.

ここで $x_1 \in B(x_0; R/6)$ を任意に選び固定する. このとき任意の $M \geq M_0$ と $x \in B(x_1; R/6)$ に対して,

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{M} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m &= \sum_{m=0}^{M}\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\binom{m}{k}(x-x_1)^k(x_1-x_0)^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{M}\left(\sum_{m=k}^{M} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\binom{m}{k}(x_1-x_0)^{m-k}\right)(x-x_1)^k\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{M}\sum_{m=M+1}^{\infty}\left|\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\binom{m}{k}(x_1-x_0)^{m-k}(x-x_1)^k\right| &\leq \sum_{k=0}^{M}\sum_{m=M+1}^{\infty}\binom{m}{k}\left(\frac{2}{R}\right)^m\left(\frac{R}{6}\right)^{m-k}\left(\frac{R}{6}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{M}\sum_{m=M+1}^{\infty}\binom{m}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^m \leq 3M\left(\frac{2}{3}\right)^{M+1}\end{aligned}$$

が得られる. 従って (1.1) から,

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m \\ &= \lim_{M\to\infty}\sum_{k=0}^{M}\left(\sum_{m=k}^{M} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\binom{m}{k}(x_1-x_0)^{m-k}\right)(x-x_1)^k \\ &= \lim_{M\to\infty}\sum_{k=0}^{M}\left(\frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} - \sum_{m=M+1}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\binom{m}{k}(x_1-x_0)^{m-k}\right)(x-x_1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}(x-x_1)^k, \quad x \in B(x_1; R/6)\end{aligned}$$

が成り立つ. 以上から, f は $B(x_0; R/6)$ で実解析的である. □

補題 1.2. $n \geq 2$ とする. $f \in C^\infty(\Omega)$ は $x_0 \in \Omega$ で実解析であるとする. 各 $j = 1, \cdots, n$ に対して,

$$\Omega_j = \{y \in \mathbb{R};\ x_0 \text{ の第 } j \text{ 成分を } y \text{ に置き換えた点は } \Omega \text{ に属する}\}, \quad f_j = f|_{\Omega_j}$$

を定めるとき, 任意の j に対して, f_j は x_0^j で実解析的である.

証明. f の x_0 における多重冪級数について, $x = (x_0^1, \cdots, x_0^{j-1}, y, x_0^{j+1}, \cdots, x_0^n)$ を代入することで示される. □

2　関数 ψ と Ψ

関数 ψ

$\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は, 以下を満たすものとする:

(P1) $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(P2) φ_0 は周期 2 の周期関数. 即ち, $\varphi_0(x+2) = \varphi_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(P3) φ_0 は開区間 $(-1,1)$ 上で正値であり, 実解析的である.

(P4) 任意の非負整数 m に対して, $\partial_x^m \varphi_0(1) = 0$. 従って, φ_0 は $x=1$ で実解析的でない.

また, 実数列 $(S_k)_{k=0}^\infty$ のうち,

(S1) $\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$.

を満たすものをひとつ選び, 関数 $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を,

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^\infty 2^{-kS_k} \varphi_0(2^k(x+1-2^{-k})) =: \sum_{k=0}^\infty \psi_k(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

によって定める.

例 2.1. $S_k = \log(k+1)$ と $\varphi_0(x) = \exp(-\tan^2(\pi x/2))\chi_{\mathbb{O}^c}(x)$ は, 上の条件を満たす. 但し, $\mathbb{O}$ は奇数全体の集合であり, χ_A は集合 A の特性関数である.

$\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ であること.

(P1) から, 任意の自然数 m に対して

$$\partial_x^m \psi_k(x) = 2^{-kS_k+km}(\partial_x^m \varphi_0)(2^k x + 2^k - 1)$$

となるので,

$$\|\partial_x^m \psi_k\|_\infty \le 2^{-kS_k+km} \|\partial_x^m \varphi_0\|_\infty$$

を得る. 条件 (P1) と (P2) から, $\|\partial_x^m \varphi_0\|_\infty$ は有限値であることに注意する. 条件 (S1) から, 或る自然数 K_m によって,

$$-kS_k + km < -km \quad \text{for any } k \ge K_m$$

が成り立つ. 従って,

$$\sum_{k=0}^\infty 2^{-kS_k+km} \le \sum_{k=0}^{K_m-1} 2^{-kS_k+km} + \sum_{k=K_m}^\infty 2^{-km} < \infty$$

を得る. Weierstrass の優級数定理と項別微分の定理から, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ かつ

$$\partial_x^m \psi(x) = \sum_{k=0}^\infty \partial_x^m \psi_k(x) = \sum_{k=0}^\infty 2^{-kS_k+km}(\partial_x^m \varphi_0)(2^k x + 2^k - 1) \tag{A1}$$

が言えた.

ψ は至るところ実解析的ではないこと.

集合 E を,

$$E = \left\{q2^{-p};\ q \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}\right\} \setminus \mathbb{O}$$

によって定義する. これは $\mathbb{R}$ に稠密である. (P2)–(P4) から, $x \in E$ ならば或る $K \in \mathbb{N}$ によって,

(K1) $k = 0, \cdots, K-1$ のとき, ψ_k は x で実解析的.

(K2) $k = K, K+1, \cdots$ のとき, $\partial_x^m \psi_k(x) = 0$ $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

が成り立つ. ここで,

$$\psi_I(x) = \sum_{k=0}^{K-1} \psi_k(x),$$
$$\psi_{II}(x) = \sum_{k=K}^{\infty} \psi_k(x)$$

とおくと, (K1) から ψ_I は x で実解析的である. 一方, ψ_{II} が x で実解析的であると仮定すると, (A1) と (K2) から ψ_{II} は x のまわりで恒等的に 0 となるはずである. しかし (P2) と (P3) から, そのようなことは起こらないことが分かる. 従って, ψ_{II} は x で実解析的ではない. 故に ψ は E の任意の点で実解析的ではない. このことと補題 1.1 から, ψ が至るところで実解析的ではないことが得られる.

補足

- $\mathbb{R}$ の任意の開集合 A について, $\psi \in C^\infty(A) \setminus C^\omega(A)$.
- 関数 $\psi\chi_{[-1,1]}$ は, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ に属し, 台 $[-1,1]$ 上の任意の点について実解析的ではない. また,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\chi_{[-1,1]}(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kS_k} \int_{-1}^{1} \varphi_0(x)dx.$$

例 2: S_k と φ_0 を,

$$S_k = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 0, \\ k^{-1}\log_2 k! & \text{if } k = 1, 2, \cdots, \end{cases} \qquad \varphi_0(x) = \sec^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\exp\left(-1 - \frac{4}{\pi}\tan^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\chi_{\mathbb{O}^c}(x)$$

とおくとき, $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\chi_{[-1,1]}(x)dx = 1$.

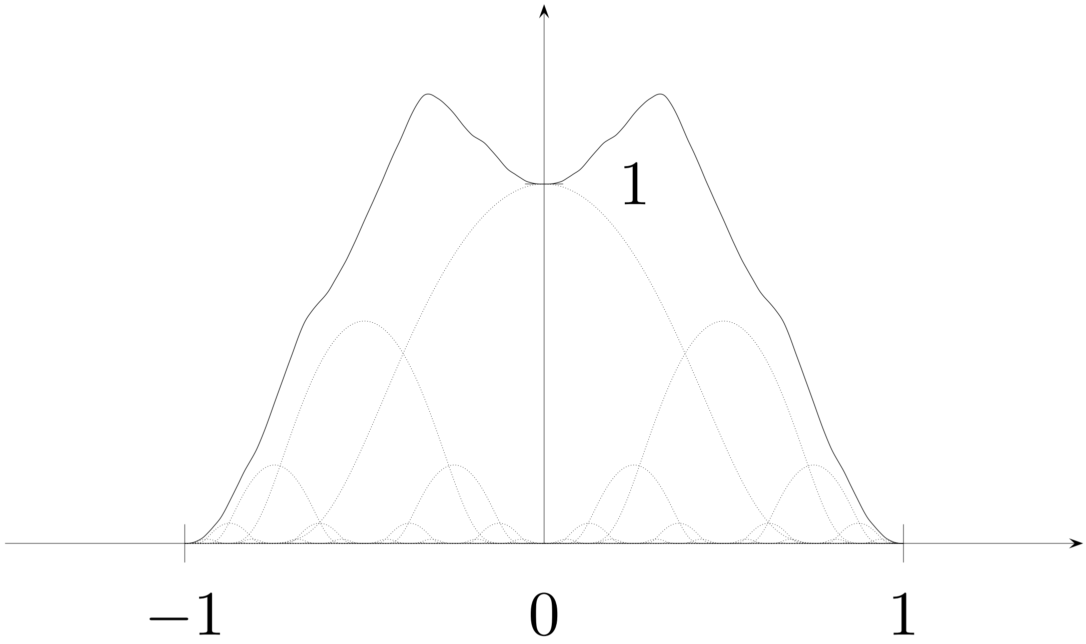
関数 Ψ

上で定めた ψ に対して, $\Psi(x,y) = \psi\chi_{[-1,1]}(x) \times \psi\chi_{[-1,1]}(y)$ とおくと, $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \setminus C^\omega(\mathbb{R}^2)$ かつ $\operatorname{supp}\Psi = [-1,1] \times [-1,1]$ を満たす.

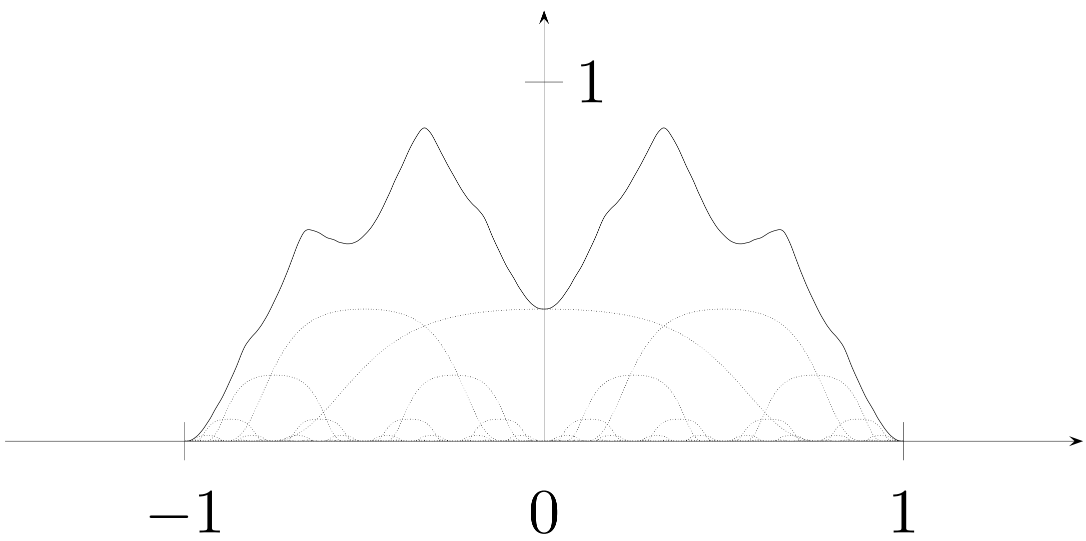
注 2.2. *Ψ は $\operatorname{supp}\Psi$ 上の任意の点で実解析的でない. 補題 1.2 から, $(-1,1) \times (-1,1)$ の任意の点で実解析的とならないのは明らか. $\partial([-1,1] \times [-1,1])$ の点 x_0 で実解析的であるとすると, Ψ の x_0 における任意の偏微分係数は 0 となり, Ψ は或る x_0-近傍で恒等的に 0 である. しかしそれは, $(-1,1) \times (-1,1)$ で Ψ が正であることに反する.*

3　$\psi\chi_{[-1,1]}$ のグラフ

例 1: $\varphi_0(x) = \exp(-\tan^2(\pi x/2))\chi_{\mathbb{O}^c}(x)$ かつ $S_k = \log(k+1)$ のとき

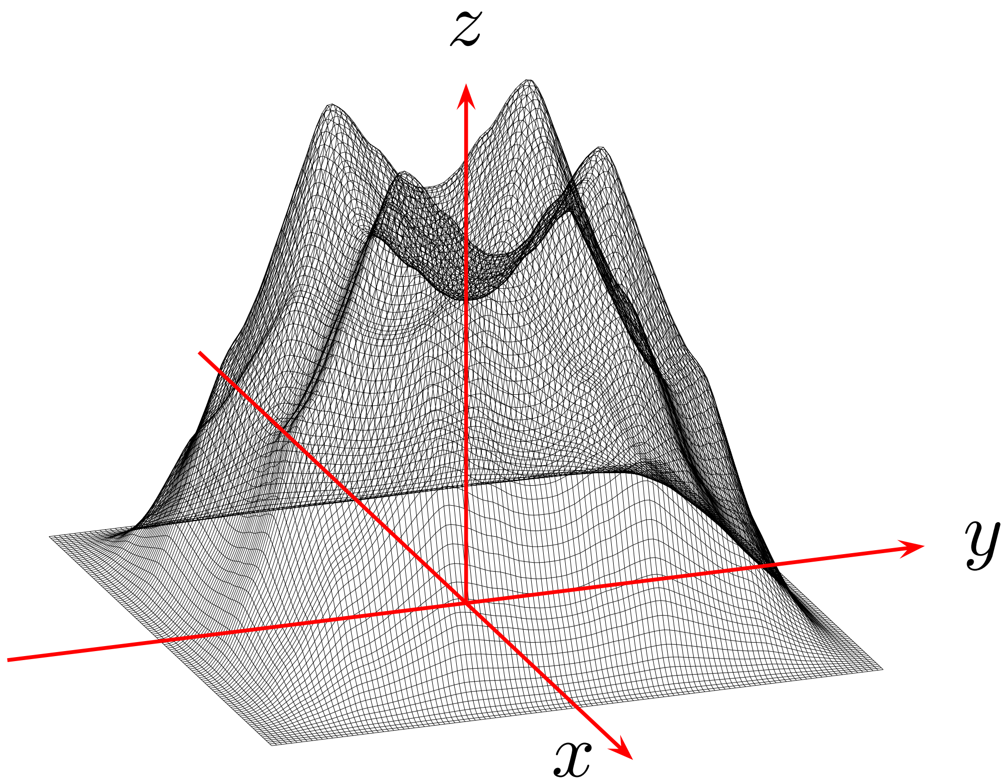


例 2: $\varphi_0(x) = \sec^2(\pi x/2)\exp\left(-1-(4/\pi)\tan^2(\pi x/2)\right)\chi_{\mathbb{O}^c}(x)$ かつ $kS_k = \log_2 k!$ のとき

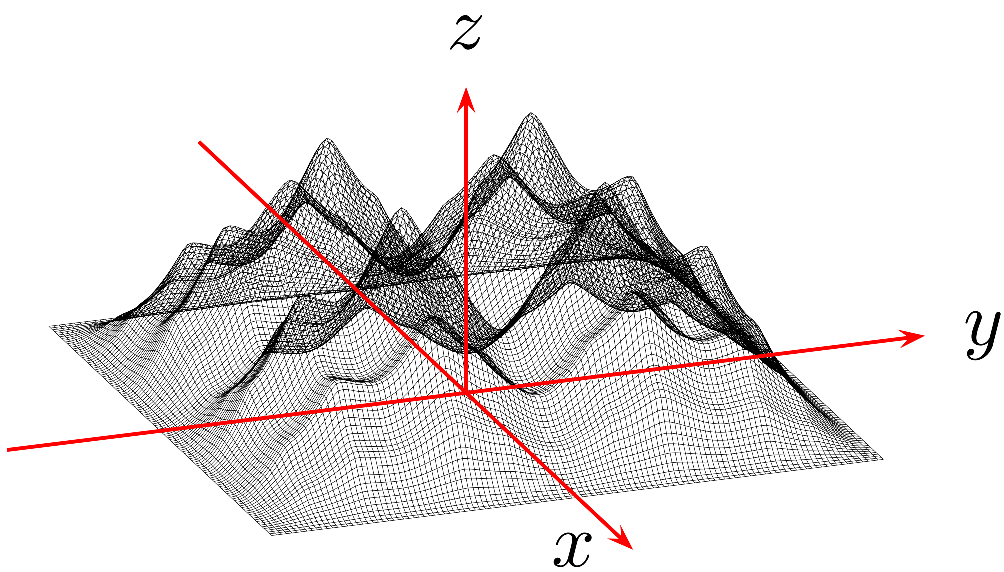


4　Ψ のグラフ

例 1: $\varphi_0(x) = \exp(-\tan^2(\pi x/2))\chi_{\mathbb{O}^c}(x)$ かつ $S_k = \log(k+1)$ のとき



例 2: $\varphi_0(x) = \sec^2(\pi x/2)\exp\left(-1-(4/\pi)\tan^2(\pi x/2)\right)\chi_{\mathbb{O}^c}(x)$ かつ $kS_k = \log_2 k!$ のとき



5 一般の開集合を台に持つ関数

次の命題は真であろうか?

> $\mathbb{R}^n$ の任意の空でない開集合 Ω に対して, 或る C^∞ 級関数 Ψ_Ω で
>
> $(\Omega 1)$ $\operatorname{supp}\Psi_\Omega = \overline{\Omega}$.
>
> $(\Omega 2)$ $\overline{\Omega}$ 上の任意の点で実解析的でない.
>
> を満たすものが存在する.

Cube の場合

n 次元超立方体 $[-1/2, 1/2]^n$ を Q_0 で表わそう. n 変数関数 $\Psi_0(x)$ を,

$$\Psi_0(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} \psi\chi_{[-1,1]}(2x_j)$$

によって定める. このとき, $\Psi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ かつ $\operatorname{supp}\Psi_0 = Q_0$ を満たす. また, Ψ_0 は Q_0 上の任意の点で実解析的でない.

Cube の場合（その 2）

$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ に対して, n 次元超立方体 $Q(z;r)$ を

$$Q(z;r) = [z_1 - r/2, z_1 + r/2] \times \cdots \times [z_n - r/2, z_n + r/2]$$

によって定める. これは中心 z, 辺長 r の超立方体である. また直ちに $Q_0 = Q(1;0)$ を得る. n 変数関数 $\Psi[z;r](x)$ を,

$$\Psi[z;r](x_1, \cdots, x_n) = \Psi_0\left(\frac{x-z}{r}\right) = \prod_{j=1}^{n} \psi\chi_{[-1,1]}\left(\frac{2(x_j - z_j)}{r}\right)$$

によって定める. このとき, $\Psi[z;r] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ かつ $\operatorname{supp}\Psi[z;r] = Q(z;r)$ を満たす. また, $\Psi[z;r]$ は $Q(z;r)$ 上の任意の点で実解析的でない.

一般の場合

$\mathbb{R}^n$ の空でない開集合 Ω を任意に選び固定する. Whitney の被覆定理から, 或る正数列 $(r_m)_{m=1}^\infty$ と点列 $(z_m)_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ が,

(W1) $\Omega = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} Q(z_m; r_m)$.

(W2) $Q(z_m; r_m)^\circ \cap Q(z_l; r_l)^\circ = \emptyset \quad$ if $m \neq l$.

を満たすように存在する.

さて, この $Q(z_m;r_m)$ 達を用いて,

$$\Psi_\Omega(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-1/r_m}}{m^2}\Psi[z_m;r_m](x),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

を定義する. これが $(\Omega 1)$ と $(\Omega 2)$ を満たす C^∞ 級関数であることを示そう.

各 $\alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n$, $m\in\mathbb{N}$ について,

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^\alpha\left(\frac{e^{-1/r_m}}{m^2}\Psi[z_m;r_m](x)\right)\right|&=\left|\frac{e^{-1/r_m}}{m^2}r_m^{-|\alpha|}(\partial_x^\alpha\Psi_0)\left(\frac{x-z_m}{r_m}\right)\right|\\&\le\frac{1}{m^2}\left(\sup_{r>0}e^{-1/r}r^{-|\alpha|}\right)\|\partial_x^\alpha\Psi_0\|_\infty\le\frac{e^{-|\alpha|}|\alpha|^{|\alpha|}}{m^2}\|\partial_x^\alpha\Psi_0\|_\infty\end{aligned}$$

が成り立つ. Weierstrass の優級数定理と項別微分の定理から, $\mathbb{R}^n$ 上で Ψ_Ω は C^∞ 級である.

各 $\Psi[z_m;r_m]$ は $Q(z_m;r_m)^\circ$ において正値であり, その補集合において 0 であることから,

$$\{x\in\mathbb{R}^n;\ \Psi_\Omega(x)\neq 0\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}Q(z_m;r_m)^\circ$$

である. 右辺の閉包は $\bigcup_{m=1}^\infty Q(z_m;r_m)$ の閉包に等しい[2]. (W1) から, これは $\overline{\Omega}$ に等しい. 従って, $(\Omega 1)$ が言えた.

最後に $(\Omega 2)$ を示そう. (W2) から, $\bigcup_{m=1}^\infty Q(z_m;r_m)^\circ$ の任意の点 x_0 に対して, 或る m と或る x_0-開近傍で, $\Psi_\Omega\equiv\Psi[z_m;r_m]$ である. 従って Ψ_Ω は, $\bigcup_{m=1}^\infty Q(z_m;r_m)^\circ$ の任意の点で実解析的ではない. 次に, Ψ_Ω は点 $x_0\in\overline{\Omega}\setminus(\bigcup_{m=1}^\infty Q(z_m;r_m)^\circ)$ で実解析的であると仮定する. Ψ_Ω の定義から, Ψ_Ω の x_0 における任意の偏微分係数は 0 となる. 従って或る正数 R によって, Ψ_Ω は $B(x_0;R)$ で恒等的に 0 となる. x_0 は Ω の触点であるから, $B(x_0;R)$ に属する $x_1\in\Omega$ が存在する. x_1 は或る $Q_m(z_m;r_m)^\circ$ の触点であるから, $B(x_0;R)$ に属する $x_2\in Q_m(z_m;r_m)^\circ$ が存在する. これは, $\Psi_\Omega(x_2)>0$ であることと矛盾する. 従って $(\Omega 2)$ が示された.

参考文献

[1] 松島, 多様体入門, 裳華房, ISBN:9784785313050.

[2] $\bigcup_{m=1}^\infty Q(z_m;r_m)=\bigcup_{m=1}^\infty\overline{Q(z_m;r_m)^\circ}\subset\overline{\bigcup_{m=1}^\infty Q(z_m;r_m)^\circ}$ から得られる.