

台が有界である滑らかな関数（多次元）

\mathbb{R}^n 上で定義される C^∞ 級関数のうち、台が有界であるもの全体を $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ と書くことにする。ここでは $C_c^\infty(\mathbb{R})$ の元を用いて、 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ の元を幾つか挙げてみよう。

1 1次元（復習）

前回は1次元の場合について考察し、以下の関数が $C_c^\infty(\mathbb{R})$ に属することを紹介した：

$$(i) \varphi_1(x) = \sec^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \exp\left(-\frac{4}{\pi} \tan^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \chi_{(-1,1)}(x).$$

但し、 $\chi_A(x)$ は集合 A に於ける特性関数である。

$$(ii) \varphi_2(x) = \eta(2x+1) + \chi_{\{0\}}(x) + \eta(-2x+1).$$

$$\text{但し、} \eta(x) = \left[\frac{1}{\pi} \arctan\left\{ \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \exp\left(\tan^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\right\} + \frac{1}{2} \right] \chi_{(-1,1)}(x).$$

$$(iii) \psi(x) = \eta(2x+3) + \chi_{[-1,1]}(x) + \eta(-2x+3).$$

$$(iv) \psi_0(x) = \psi(x) - \psi(2x).$$

それぞれの関数のグラフは以下の通りである：

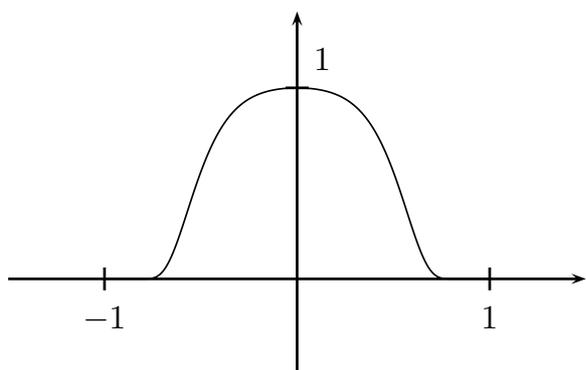


図 1: $\varphi_1(x)$ のグラフ

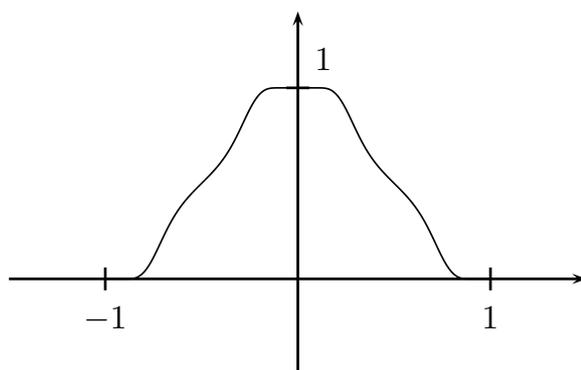


図 2: $\varphi_2(x)$ のグラフ

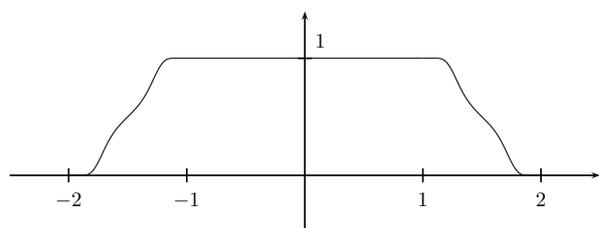


図 3: $\psi(x)$ のグラフ

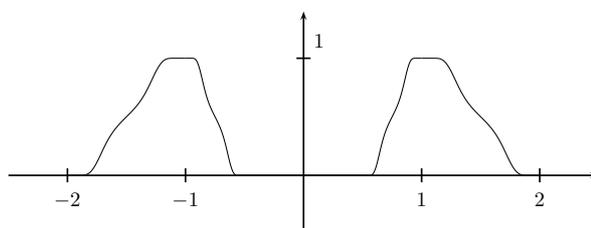


図 4: $\psi_0(x)$ のグラフ

2 2次元

次に $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ の元を挙げてみよう。まず、 $\Phi_1(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_1(y)$ を定義する。このとき、 $\Phi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ かつ $\Phi_1 \geq 0$ 及び $\int_{\mathbb{R}^2} \Phi_1(x, y) dx dy = 1$ となる。興味深いのは、 $\text{supp } \Phi_1 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ である。即ち、境界が C^1 級でない有界集合を台とする C^∞ 級関数が存在していることが分かる。

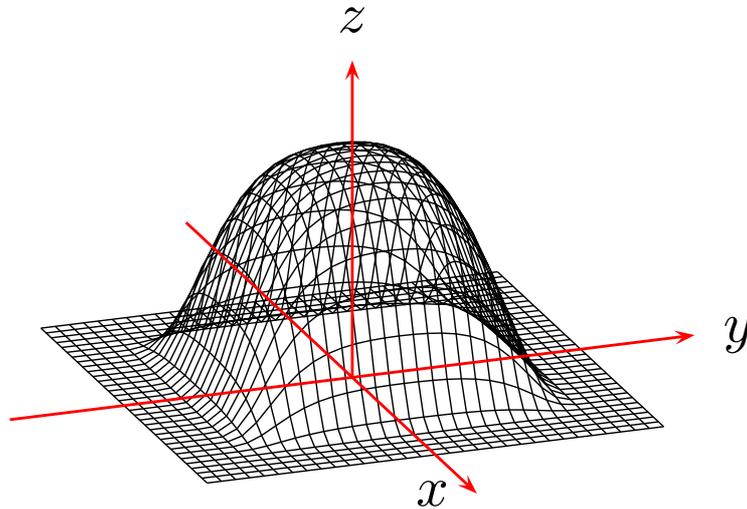


図 5: $\Phi_1(x, y)$ のグラフ

上記 Φ_1 は球対称ではない。球対称と言え、関数 $\varphi_1(\sqrt{x^2 + y^2})$ が挙げられるが、これは $(x, y) = (0, 0)$ に於いて C^∞ 級ではない。もし φ_1 の代わりに φ_2 を用いると、 $\Phi_2(x, y) := \varphi_2(\sqrt{x^2 + y^2})$ は $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ の元となる。

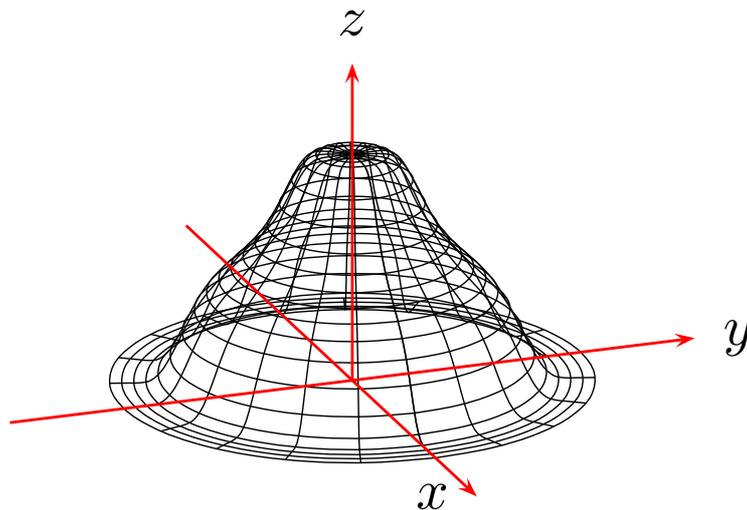


図 6: $\Phi_2(x, y)$ のグラフ

関数 $\Psi(x, y) := \psi(\sqrt{x^2 + y^2})$ は $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ に属し, 単位円上で恒等的に 1 である. 丁度洗面器をひっくり返した様な外形である¹.

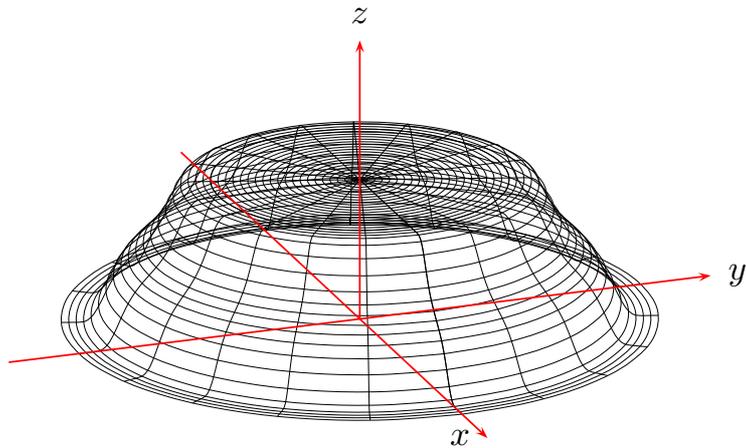


図 7: $\Psi(x, y)$ のグラフ

関数 $\Psi_0(x, y) := \psi_0(\sqrt{x^2 + y^2})$ は $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ に属し, 単位円周上で恒等的に 1 である.

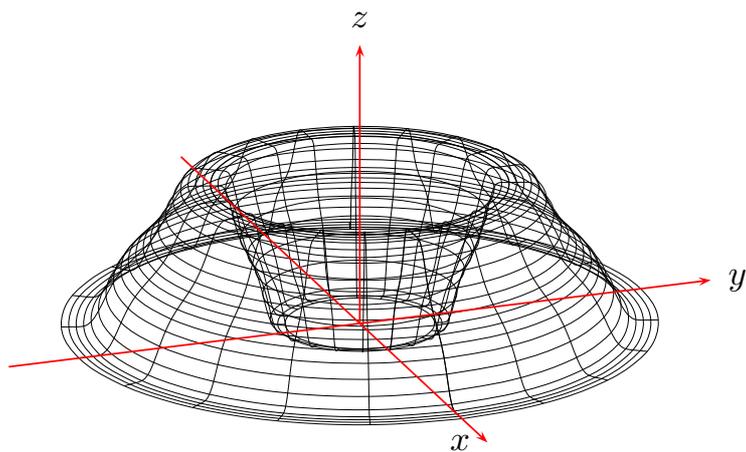


図 8: $\Psi_0(x, y)$ のグラフ

関数 Ψ と関数列 $\{\Psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ($\Psi_k(x) := \Psi(2^{-k}x)$) を用いて, 関数 f に対する Littlewood-Paley 分解

$$f = \mathcal{F}^{-1}\Psi * f + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\Psi_k * f$$

を得る.

¹もしくはプリン?

3 n 次元

$n \geq 3$ とおくとき, 2次元と同様にして, 次のことが分かる:

- (I) $\Phi_1(x) := \prod_{j=1}^n \varphi_1(x_j)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ は $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に属し, $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1(x) dx = 1$ かつ $\Phi_1 \geq 0$ 及び $\text{supp } \Phi_1 = [-1, 1]^n$ を満たす.
- (II) $\Phi_2(x) := \varphi_2(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$ は $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に属する球対称関数であり, $\Phi_2 \geq 0$ かつ $\text{supp } \Phi_2 = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$ を満たす.
- (III) $\Psi(x) := \psi(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$ は $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に属する球対称関数であり, $\Psi \geq 0$ かつ $\text{supp } \Psi = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 2\}$ を満たす.
- (IV) $\Psi_0(x) := \psi_0(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$ は $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に属する球対称関数であり, $\Psi_0 \geq 0$ かつ $\text{supp } \Psi_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; 1/2 \leq |x| \leq 2\}$ を満たす.
- (V) 関数 Ψ と関数列 $\{\Psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ($\Psi_k(x) := \Psi(2^{-k}x)$) を用いて, 関数 f に対する Littlewood-Paley 分解

$$f = \mathcal{F}^{-1}\Psi * f + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\Psi_k * f$$

を得る.

©2012 Hironobu Sasaki