

台が有界である滑らかな関数（一次元）

$\mathbb{R}$ 上で定義される C^∞ 級関数のうち、台が有界であるものの全体を $C_c^\infty(\mathbb{R})$ と書くことにする。ここでは、 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ の元を幾つか挙げてみよう。

1 三角関数と指数関数を用いてみる

指数関数 e^{-x^2} は急減少関数であるが台は $\mathbb{R}$ 全体である。従って $C_c^\infty(\mathbb{R})$ の元ではない。そこで、 $\exp(-\tan^2 x)\chi_{(-\pi/2, \pi/2)}(x)$ に変更すると、これは $C_c^\infty(\mathbb{R})$ に属する。但し、 $\chi_A(x)$ は集合 A に於ける特性関数である。これに基づき、

$$\varphi_1(x) = \sec^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \exp\left(-\frac{4}{\pi} \tan^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \chi_{(-1,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

を考える。グラフは以下の通りである：

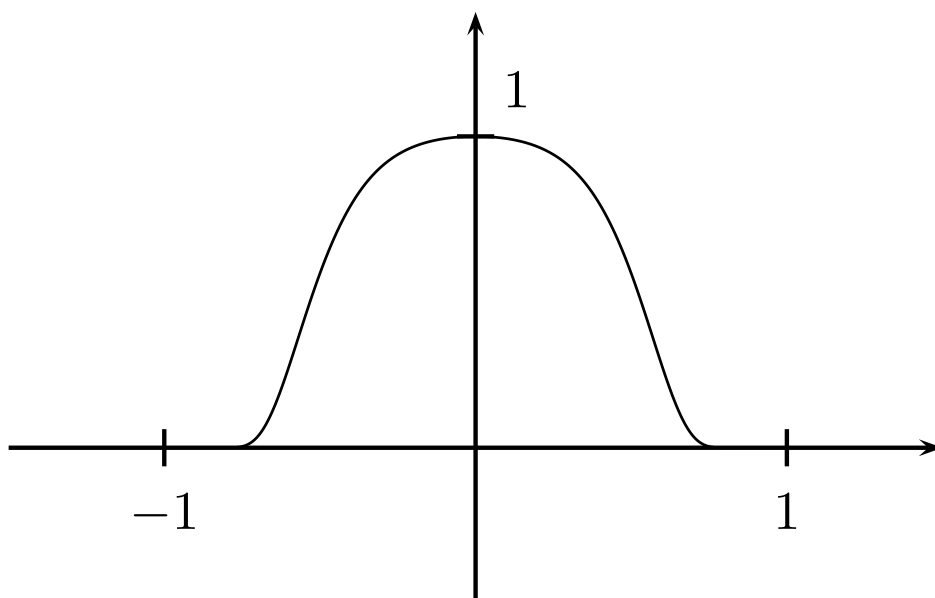


図 1: $\varphi_1(x)$ のグラフ

この φ_1 は実際に $C_c^\infty(\mathbb{R})$ の元であり、以下の性質を満たす：

- (1) $\text{supp } \varphi_1 = [-1, 1]$.
- (2) $0 < \varphi_1(x) < 1, x \in (-1, 1)$.
- (3) $\sup_{x \in \mathbb{R}} \varphi_1(x) = \varphi_1(0) = 1$. (最大値を実現する x は原点のみである.)
- (4) $\varphi_1(-x) = \varphi_1(x), x \in \mathbb{R}$.
- (5) φ_1 は $(-\infty, 0]$ に於いて単調増加し、 $[0, \infty)$ に於いて単調減少する.
- (6) $\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x) dx = 1$. (変数変換 $t = \tan(\pi x/2)$ を用いよ.)

2 三角関数と指数関数と逆三角関数を用いてみる

関数 φ_1 は、開区間 $(-1, 1)$ で解析的であるから、 $x = 0$ では「平たく」ない。この小節では、「平たい関数」を挙げてみる。

関数 $\arctan x$ は、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $-\pi/2$ 、 $x \rightarrow \infty$ のとき $\pi/2$ へ近づく。これに基づき、

$$\eta(x) = \left[\frac{1}{\pi} \arctan \left\{ \tan \left(\frac{\pi x}{2} \right) \exp \left(\tan^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right) \right\} + \frac{1}{2} \right] \chi_{(-1,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

を考える。グラフは下にある図2の通りである。これ自体はもちろん $C_c^\infty(\mathbb{R})$ に属さないが、「パーツ」として有用である。例えば、

$$\varphi_2(x) := \eta(2x+1) + \chi_{\{0\}}(x) + \eta(-2x+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

は $C_c^\infty(\mathbb{R})$ に属し、次を満たす：

- (1) $\text{supp } \varphi_2 = [-1, 1]$.
- (2) $0 < \varphi_2(x) < 1, x \in (-1, 1)$.
- (3) $\sup_{x \in \mathbb{R}} \varphi_2(x) = \varphi_2(0) = 1$. (最大値を実現する x は原点のみである.)
- (4) $\varphi_2(-x) = \varphi_2(x), x \in \mathbb{R}$.
- (5) φ_2 は $(-1, 0]$ に於いて単調増加し、 $[0, 1)$ に於いて単調減少する。
- (6) $\int_{\mathbb{R}} \varphi_2(x) dx = 1$. (何故なら、 $\eta(x) - 1/2$ が奇関数である為.)
- (7) φ_2 は $x = 0$ に於いて「平たい」。即ち、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、 $\partial_x^m \varphi_2(0) = 0$.

φ_2 のグラフは下にある図3の通りである：

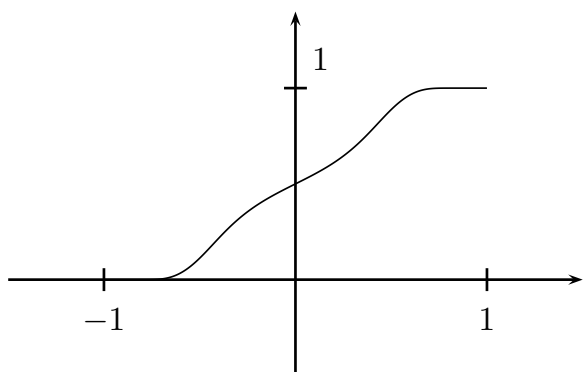


図 2: $\eta(x)$ のグラフ

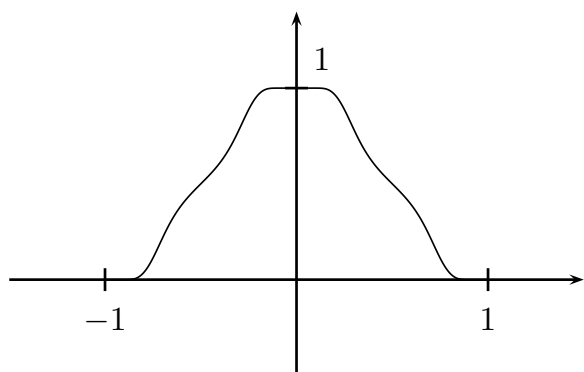


図 3: $\varphi_2(x)$ のグラフ

3 Littlewood-Paley 分解

3.1

パーツ η を用いて,

$$\psi(x) = \eta(2x + 3) + \chi_{[-1,1]}(x) + \eta(-2x + 3), \quad x \in \mathbb{R}$$

を定義する.

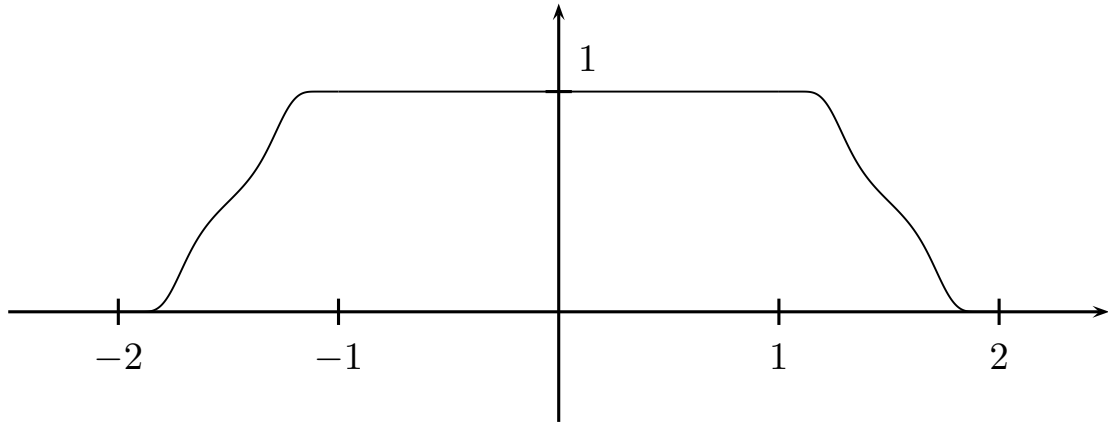


図 4: $\psi(x)$ のグラフ

これは $C_c^\infty(\mathbb{R})$ に属し, 次を満たす:

- (1) $\text{supp } \psi = [-2, 2]$.
- (2) $0 < \psi(x) < 1, x \in (-2, 2)$.
- (3) $\psi(x) = 1, x \in [-1, 1]$.
- (4) $\psi(-x) = \psi(x), x \in \mathbb{R}$.
- (5) ψ は $(-\infty, 0]$ に於いて広義単調増加し, $[0, \infty)$ に於いて広義単調減少する.
- (6) $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 3$.

3.2

更に,

$$\psi_0(x) = \psi(x) - \psi(2x), \quad x \in \mathbb{R}$$

を定義する. これは,

$$\eta(2x + 3) + \chi_{\{-1\}}(x) + \eta(-4x - 3) + \eta(4x + 3) + \chi_{\{1\}}(x) + \eta(-2x + 3)$$

に等しく, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ に属し, 次を満たす:

- (1) $\text{supp } \psi_0 = [-2, -1/2] \cup [1/2, 2]$.
- (2) $0 < \psi_0(x) < 1, x \in (-2, -1/2) \cup (1/2, 2)$.
- (3) $\sup_{x \in \mathbb{R}} \psi_0(x) = 1$. (最大値を実現する x は -1 と 1 のみである.)
- (4) $\psi_0(-x) = \psi_0(x), x \in \mathbb{R}$.
- (5) $\int_{\mathbb{R}} \psi_0(x) dx = 3/2$.

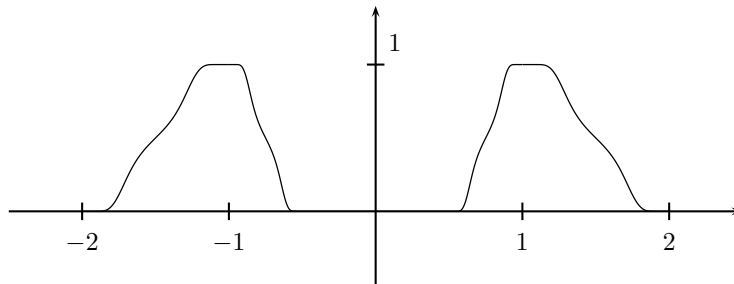


図 5: $\psi_0(x)$ のグラフ

3.3

整数 k に対して,

$$\psi_k(x) = \psi(2^{-k}x), \quad x \in \mathbb{R}$$

を定めると, $\psi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ であり, $\text{supp } \psi_k = [-2^{k+1}, -2^{k-1}] \cup [2^{k-1}, 2^{k+1}]$ を満たし,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

が成り立つ.

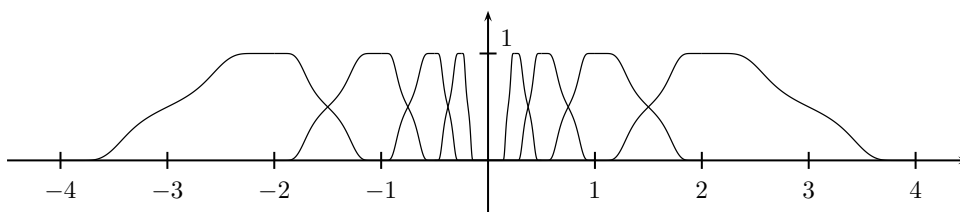


図 6: 外側から, $\psi_1(x), \psi_0(x), \psi_{-1}, \psi_{-2}(x)$ のグラフ

関数 ψ と関数列 $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を用いて, 関数 f に対する Littlewood-Paley 分解

$$f = \mathcal{F}^{-1} \psi * f + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \psi_k * f$$

を得る.