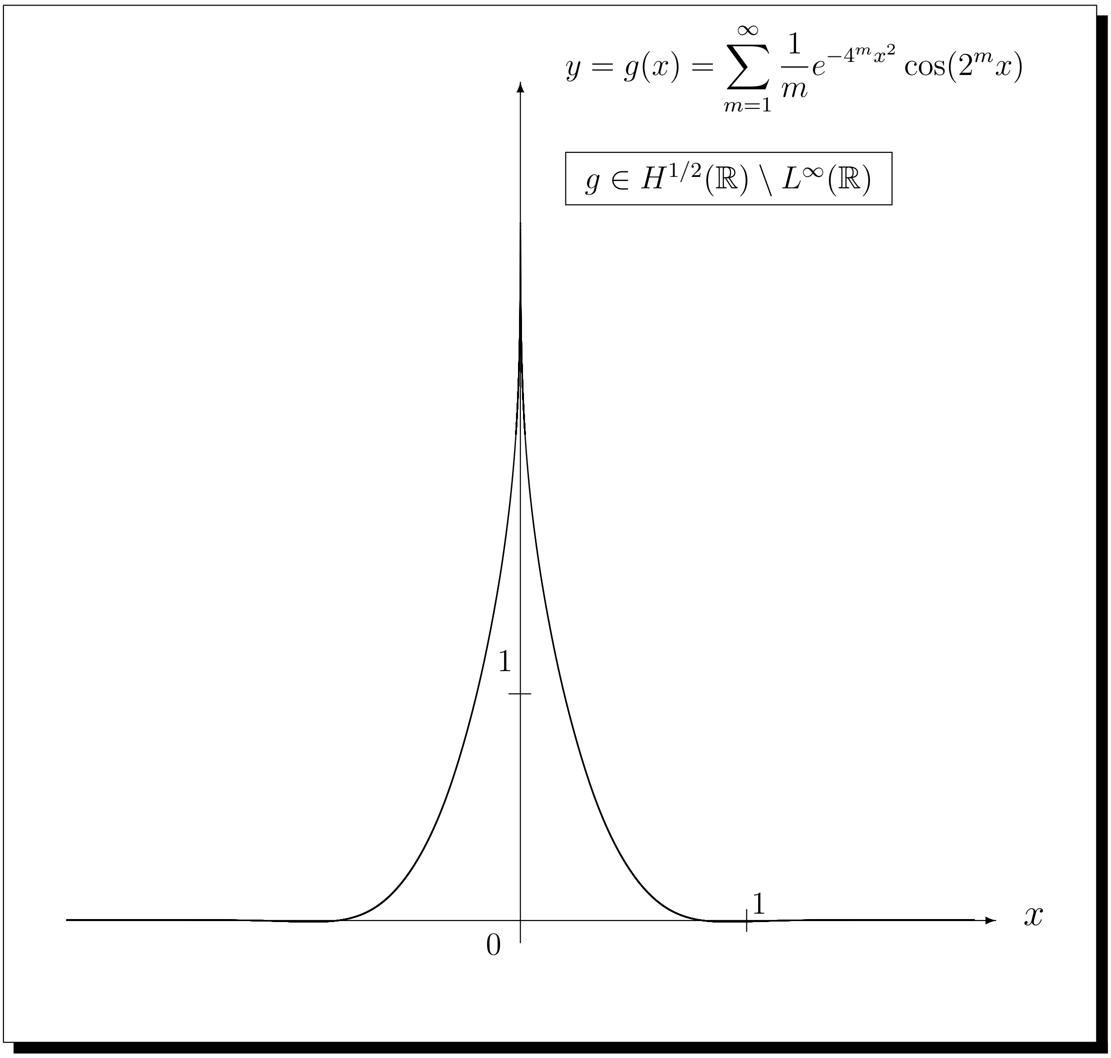
$H^{n/2}$ に属する非有界関数　ver1.04[1]



Sobolev 空間 $H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ (1-\Delta)^s f \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$ について, $s > \dfrac{n}{2}$ であれば,

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

なる埋込が成立する. では埋込

$$H^{n/2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

は真であろうか? 残念ながら, 然に非ず. では実際に反例を作ってみよう.

1　Besov 空間による推測

$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を, 急減少関数のうち, $\operatorname{supp} \psi = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n;\ 2^{-1} \le |\xi| \le 2 \right\}$ と $\psi(\xi) > 0\ (2^{-1} < |\xi| < 2)$ と $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(2^{-k}\xi) = 1\ (\xi \neq 0)$ を満たすものとする.[2] また各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して, ψ_k を $\psi_k(\xi) = \psi(2^{-k}\xi)\ (\xi \in \mathbb{R}^n)$ によって定義する. このとき, Besov 空間 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\ (s > 0, 1 \le p \le \infty, 1 \le q < \infty)$ を

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ \|f\|_{B^s_{p,q}} := \|f\|_p + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{sk} \left\| \mathcal{F}^{-1}(\psi_k \mathcal{F} f) \right\|_p \right)^q \right\}^{1/q} < \infty \right\}$$

[1] ver1.03 → 1.04: 1 ページ下から 2 行目, s の設定を訂正.
[2] 実際にこのような関数 ψ が存在することを次回と次々回に触れる.

によって定める．但し，$\|\cdot\|_p$ は L^p ノルムであり，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上の Fourier 変換である．このとき $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ は Banach 空間となる．更に $p=q=2$ ならば，Sobolev 空間 $H^s(\mathbb{R}^n)$ と同値になる:

$$B^s_{2,2}(\mathbb{R}^n) \sim H^s(\mathbb{R}^n).$$

また埋込

$$B^{n/2}_{2,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

が成立する．以上から $f \in H^{n/2}(\mathbb{R}^n) \setminus L^\infty(\mathbb{R}^n)$ となる関数を見つける為には，$f \in B^{n/2}_{2,2}(\mathbb{R}^n) \setminus B^{n/2}_{2,1}(\mathbb{R}^n)$ が満たされていることが必要である．ここでもし $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ かつ

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}(\psi_k \mathcal{F} f)\right\|_2 \sim \frac{1}{k \cdot 2^{nk/2}}$$

が成り立てば，$f \in B^{n/2}_{2,2}(\mathbb{R}^n) \setminus B^{n/2}_{2,1}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．これを踏まえて f を探してみる．

2 反例

x_0 を $x_0 = (n^{-1/2}, \cdots, n^{-1/2})$ で与えられる $\mathbb{R}^n$ の元とする．$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ を，$\phi(0) \neq 0$ を満たす複素数値急減少関数とする．このとき，或る $A \in \{0,1,2,3\}$ によって $\mathrm{Re}\{(-1)^{A/2}\phi(0)\} > 0$ が成立する．更に次の性質が成り立つ:

(ϕ-1) 或る正整数 L が存在し，

$$\mathrm{Re}\left\{(-1)^{A/2}\phi(2^{-R}x_0)\exp(i2^{-R})\right\} > \frac{\mathrm{Re}\{(-1)^{A/2}\phi(0)\}}{2}, \quad R \geq L$$

が成り立つ．

(ϕ-2) 各 $\alpha > 0$ に対して定数 $C_\alpha > 0$ が存在し，

$$|\phi(x)| \leq C_\alpha |x|^{-\alpha} \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \quad \text{かつ} \quad |\mathcal{F}\phi(\xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{-\alpha} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

が成り立つ．

ここで関数 $f(x)$ を，

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\phi(2^m x)\exp\left(i2^m x_0 \cdot x\right), \quad x \neq 0$$

と定義する．条件 (ϕ-2) から各正数 α に対して

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left|\phi(2^m x)\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \frac{C_\alpha}{2^{\alpha m}|x|^\alpha} \leq \frac{C}{|x|^\alpha}, \quad x \neq 0$$

となる．従って $f(x)$ は各 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で有限値を持つ．更に，f は $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数であることと，$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ であることが分かり，

$$\mathcal{F}f(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m \cdot 2^{nm}} \mathcal{F}\phi\left(\frac{\xi - 2^m x_0}{2^m}\right) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n)$$

が得られる．

R を十分大きい正数とする．ϕ が実数値であることと (ϕ-1) 及び (ϕ-2) から，

$$
\begin{aligned}
\left|f(2^{-R-L}x_0)\right| &= \left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\phi(2^{m-R-L}x_0)\exp\left(i2^m x_0\cdot 2^{-R-L}x_0\right)\right| \\
&\geq \left|\sum_{m=1}^{[R]}\frac{1}{m}\phi(2^{m-R-L}x_0)\exp\left(i2^{m-R-L}\right)\right| - \left|\sum_{m=[R]+1}^{\infty}\frac{1}{m}\phi(2^{m-R-L}x_0)\exp\left(i2^{m-R-L}\right)\right| \\
&\geq \left|\sum_{m=1}^{[R]}\frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{(-1)^{A/2}\phi(2^{m-R-L}x_0)\exp\left(i2^{m-R-L}\right)\right\}\right| - \sum_{m=[R]+1}^{\infty}\frac{1}{m}\left|\phi(2^{m-R-L}x_0)\right| \\
&\geq \frac{\mathrm{Re}\{(-1)^{A/2}\phi(0)\}}{2}\sum_{m=1}^{[R]}\frac{1}{m} - \sum_{m=[R]+1}^{\infty}\frac{1}{m}\cdot\frac{C_1}{2^{m-R-L}} \\
&\geq \frac{\mathrm{Re}\{(-1)^{A/2}\phi(0)\}}{2}\sum_{m=1}^{[R]}\frac{1}{m} - \frac{2^{L+1}C_1}{[R]+1} \to \infty \quad \text{as } R\to\infty
\end{aligned}
$$

が成り立つので $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$ である．

後は $f \in H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ を示せば良い．ここではより強い命題として，

$$
f \in \bigcap_{q>1} B^{n/2}_{2,q}(\mathbb{R}^n)
$$

を示そう．各正整数 k, m に対して

$$
I_{k,m} = \sqrt{\int_{2^{k-1}\leq|\xi|\leq 2^{k+1}}\left|\mathcal{F}\phi\left(\frac{\xi-2^m x_0}{2^m}\right)\right|^2 d\xi}
$$

を定義すると，

$$
\left\|\mathcal{F}^{-1}(\psi_k\mathcal{F}f)\right\|_2 = \|\psi_k\mathcal{F}f\|_2 \leq \|\psi\|_\infty \|\mathcal{F}f\|_{L^2(2^{k-1}\leq|\xi|\leq 2^{k+1})} \leq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_{k,m}}{m\cdot 2^{nm}}, \quad k=1,2,\cdots
$$

が成立する．ここで $I_{k,m}$ $(k,m=1,2,\cdots)$ の評価を三通りに分けて行おう．

(C1) $k\geq 3$ かつ $m\leq k-2$ のとき，

$$
I_{k,m} \leq C_{2n}2^{nk/2}\sup_{2^{k-1}\leq|\xi|\leq 2^{k+1}}\left|\frac{2^m}{\xi-2^m x_0}\right|^{2n} \leq \frac{C_{2n}2^{nk/2}2^{2nm}}{(2^{k-1}-2^m)^{2n}}.
$$

(C2) $k\geq 1$ かつ $m\geq k+2$ のとき，

$$
I_{k,m} \leq C_{n/2}2^{nk/2}\sup_{2^{k-1}\leq|\xi|\leq 2^{k+1}}\left|\frac{2^m}{\xi-2^m x_0}\right|^{n/2} \leq \frac{C_{n/2}2^{nk/2}2^{nm/2}}{(2^m-2^{k+1})^{n/2}}.
$$

(C3) 任意の $k, m = 1, 2, \cdots$ に対して，

$$
I_{k,m} \leq 2^{nm/2}\|\mathcal{F}\phi\|_2.
$$

(C1) と (C2) は (ϕ-2) より得られる．各正整数 k について，$N_k = \min\{k-2, [k/2]\}$ とおく．ここで和の記号 $\sum_{m=a}^{b}$ $(a, b\in\mathbb{Z})$ について，$b<1$ であったり，$a>b$ であるときは，その和は無視するものとする．この

とき (C1)–(C3) から正整数 k に対して

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{F}^{-1}(\psi_k \mathcal{F} f)\right\|_2 \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{N_k} + \sum_{m=N_k+1}^{k-2} + \sum_{m\geq 1,\ |m-k|\leq 1} + \sum_{m=k+2}^{\infty}\right) \frac{I_{k,m}}{m\cdot 2^{nm}} \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{N_k} + \sum_{m=N_k+1}^{k-2}\right) \frac{C2^{nk/2}2^{nm}}{m(2^{k-1}-2^m)^{2n}} + \sum_{m\geq 1,\ |m-k|\leq 1} \frac{C2^{nm/2}}{m\cdot 2^{nm}} + \sum_{m=k+2}^{\infty} \frac{C2^{nk/2}}{m\cdot 2^{nm/2}(2^m-2^{k+1})^{n/2}} \\
&\leq \sum_{m=1}^{[k/2]} \frac{C2^{nk/2}2^{nm}}{(2^{k-1}-2^{k/2})^{2n}} + \sum_{m=N_k+1}^{k-2} \frac{C2^{nk/2}2^{nm}}{k(2^{k-1}-2^{k-2})^{2n}} \\
&\qquad + \sum_{m\geq 1,\ |m-k|\leq 1} \frac{C}{m\cdot 2^{nm/2}} + \sum_{m=k+2}^{\infty} \frac{C2^{nk/2}}{k\cdot 2^{nk/2}2^{nk/2}(2^{m-k}-2)^{n/2}} \\
&\leq \frac{C}{2^{3nk/2}} \sum_{m=1}^{[k/2]} 2^{nm} + \frac{C}{k\cdot 2^{3nk/2}} \sum_{m=1}^{k+1} 2^{nm} + \frac{C}{k\cdot 2^{nk/2}} + \frac{C}{k\cdot 2^{nk/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{m+1}-2)^{n/2}} \\
&\leq \frac{C}{k\cdot 2^{nk/2}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 従って任意の $q>1$ で,

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{nk/2}\left\|\mathcal{F}^{-1}(\psi_k \mathcal{F} f)\right\|_2\right)^q \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{k^q} < \infty
$$

となるので, $f \in \bigcap_{q>1} B^{n/2}_{2,q}(\mathbb{R}^n)$ （特に $f \in H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$）が示された.

3 実数値関数による反例

x_0, ϕ 及び f を前節で定義したものとする. 更に ϕ は実数値関数であるとする. このとき関数 $g(x)$ を,

$$
g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \phi(2^m x) \cos\left(2^m x_0 \cdot x\right), \quad x \neq 0
$$

と定義する. これは明らかに実数値関数である. このとき前節と同様にして, $g \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus L^\infty(\mathbb{R}^n)$ が示される. 更に, $(1-\Delta)^{n/2} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ かつ

$$
(1-\Delta)^{n/2} g = (1-\Delta)^{n/2}\left(\frac{f+\overline{f}}{2}\right) = \frac{(1-\Delta)^{n/2} f + \overline{(1-\Delta)^{n/2} f}}{2} = \mathrm{Re}\left\{(1-\Delta)^{n/2} f\right\}
$$

であるので, $(1-\Delta)^{n/2} g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 即ち $g \in H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ.

註: 冒頭の図は, $n=1$, $\phi(x) = \exp(-x^2)$ としたときの $y = g(x)$ のグラフである.

参考文献

[1] J. Bergh and J. Löfström, Interpolation Spaces, An Introduction, Springer-Verlag, 1976, ISBN-13: 9787506260114.

[2] G.B. Folland, Real Analysis, Second Edition, John-Wiley, 1999, ISBN-13: 9780471317166.