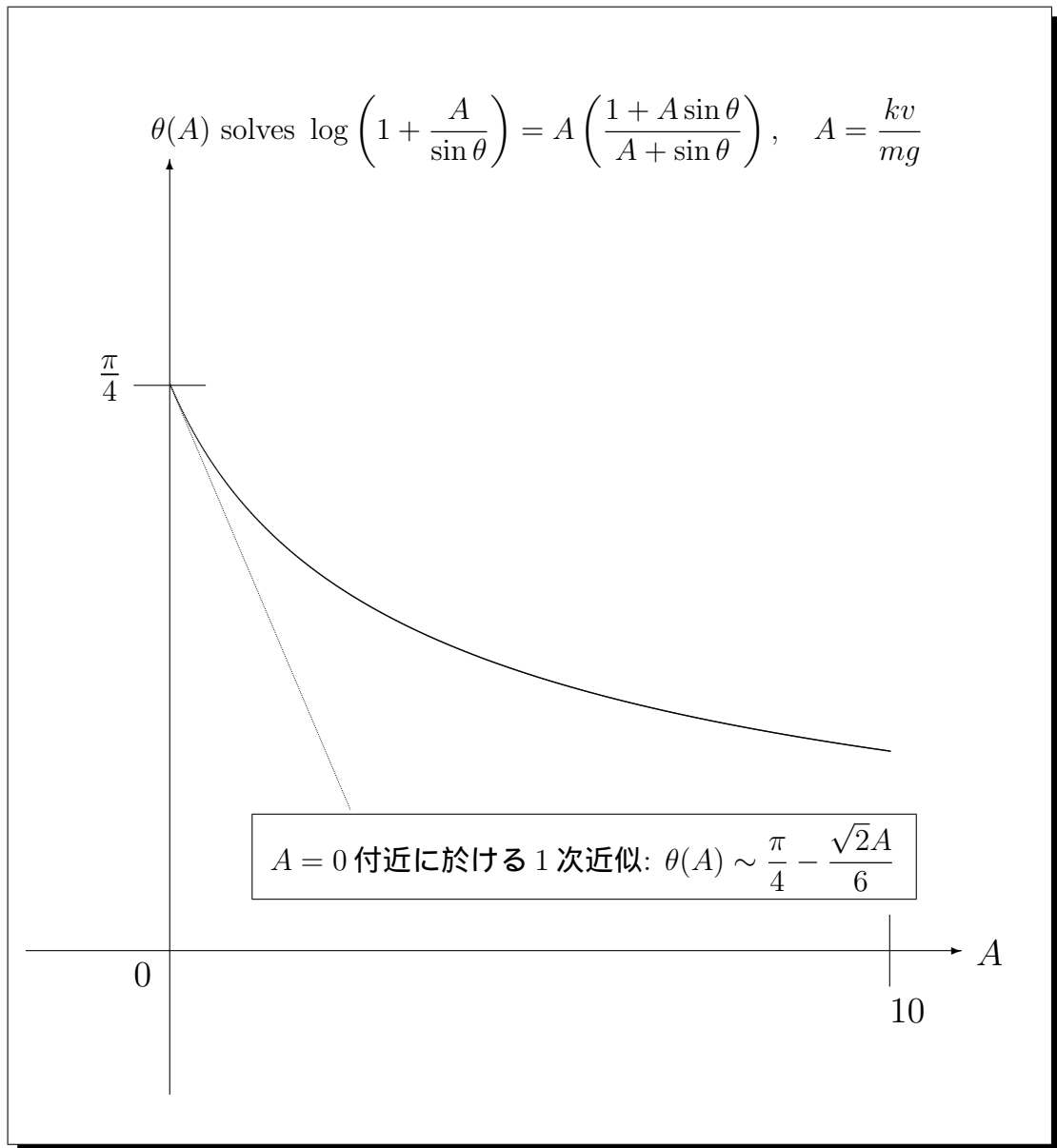


空気抵抗



質点をなるべく遠くまで投擲することを考える。空気抵抗がない場合は、地面に対して $\pi/4$ ラジアン ($= 45^\circ$) の角度をつければ良い。では、空気抵抗がある場合、最適な角度はどうなるのか？ 質点の質量を m 、初速の大きさを v 、初速の地表に対する角度を θ 、空気抵抗を k とした場合、求めるべき角度は冒頭にある θ の方程式を満たす。

グラフを見ると、空気抵抗が強いほど最適な角度は低くなっていることが判る。

証明の概略

水平方向を x 座標, 鉛直方向を y 座標とする. すなわち, 時刻 t に於ける質点の位置は $(x(t), y(t))$ で表される. 初速の地表に対する角度 θ は $\theta \in (0, \pi/2)$ を満たすものとする. 時刻 $t = 0$ における質点の位置を $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ と設定した場合, 質点満たすべき運動方程式は以下の様になる:

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = -k\dot{x}(t), & t \geq 0, \\ m\ddot{y}(t) = -k\dot{y}(t) - mg, & t \geq 0, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = v \cos \theta, \\ \dot{y}(0) = v \sin \theta. \end{cases}$$

これを解くと時間大域解

$$x(t) = v \cos \theta \cdot \frac{m}{k} \left(1 - \exp \left(\frac{-kt}{m} \right) \right), \quad (1)$$

$$y(t) = \left(\frac{mg}{k} + v \sin \theta \right) \frac{m}{k} \left(1 - \exp \left(\frac{-kt}{m} \right) \right) - \frac{mgt}{k} \quad (2)$$

を得る. これより, 質点が再び地表に接触する時刻 T_θ は

$$\frac{mgT_\theta}{k} = \left(\frac{mg}{k} + v \sin \theta \right) \frac{m}{k} \left(1 - \exp \left(\frac{-kT_\theta}{m} \right) \right) \quad (3)$$

を満たすことがわかる. 従って接触時の到達距離は $x(T_\theta)$ となる. 更に θ が最長到達を導く角度になるためには,

$$\frac{\partial x(T_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

を満たすことが必要である. (1) と (4) から直ちに

$$-v \sin \theta \cdot \frac{m}{k} \left(1 - \exp \left(\frac{-kT_\theta}{m} \right) \right) + v \cos \theta \cdot \exp \left(\frac{-kT_\theta}{m} \right) \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (5)$$

が得られる. 一方で (3) から

$$\frac{mg}{k} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} = v \cos \theta \cdot \frac{m}{k} \left(1 - \exp \left(\frac{-kT_\theta}{m} \right) \right) + \left(\frac{mg}{k} + v \sin \theta \right) \exp \left(\frac{-kT_\theta}{m} \right) \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} \quad (6)$$

を得る. (5) と (6) を用いると,

$$\frac{mg}{k} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} = v \cos \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \exp \left(\frac{-kT_\theta}{m} \right) \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \left(\frac{mg}{k} + v \sin \theta \right) \exp \left(\frac{-kT_\theta}{m} \right) \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta}$$

となり, $\partial T_\theta / \partial \theta$ を除去できる. この両辺を mg/k で割り, 整理すると,

$$\exp\left(\frac{kT_\theta}{m}\right) = 1 + \frac{A}{\sin \theta} \quad (7)$$

が示される. ただし, ここで A は

$$A = \frac{kv}{mg}$$

で定義される定数である. 関係式 (7) を (3) の右辺に代入すると,

$$T_\theta = \frac{v(1 + A \sin \theta)}{g(A + \sin \theta)}$$

が成り立つ. 再び, (7) を用いると θ が満たすべき関係式

$$\log\left(1 + \frac{A}{\sin \theta}\right) = A \left(\frac{1 + A \sin \theta}{A + \sin \theta}\right) \quad (8)$$

が得られる. これを満たす θ は一つしかないことと, $x(T_\theta)$ が最長到達距離となることは明らかである.

Q.E.D.

A が微小な場合に於ける角度の近似

関数方程式 (8) の解 $\theta(A)$ を初等関数のみで (陽関数) 表示することは出来ない. 空気抵抗が無い場合, 求まる角度は $\pi/4$ なので, $\theta(0) = \pi/4$ とするべきだろう. 問題は A が微小な場合, $\theta(A)$ はどのような “勢い” で $\pi/4$ に近づくか, である.

設定: $\theta = \pi/4 + \vartheta$ と書く. また, A, ϑ は微小なものと仮定し, A については 4 次以上, ϑ については 3 次以上を無視する.

上記設定の上で θ の漸近表示を考えるまず, 簡単の為, $z = A/\sin \theta$ とおくと, (8) は

$$\log(1 + z) = \frac{z + A^2}{z + 1} \quad (9)$$

と書き直される. $\log(1 + z)$ の点 0 を中心とする Taylor 展開は

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \cdots, \quad -1 < z < 1$$

であったので, (9) と設定を用いると,

$$3z^2 - z^3 = 6A^2$$

となる. これを整理すると

$$A = 3 \sin \theta - 6 \sin^3 \theta$$

を得る. 設定より, $\sin \theta = 1/\sqrt{2} + \vartheta/\sqrt{2}$ と書けるので,

$$A = -\frac{6\vartheta}{\sqrt{2}}$$

が成り立つ. よって, 1 次近似

$$\theta(A) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}A}{6} \quad (10)$$

を得る.

対数積を用いた $\theta(A)$ の表示

前節で触れたとおり, $\theta(A)$ は初等関数のみで (陽関数) 表示することは出来ない. しかし, 特殊関数のひとつである対数積 (ランベルトの W 関数) $W(x)$ を上手く利用することで, $\theta(A)$ は

$$\theta(A) = \text{Cosec}^{-1} \left(\frac{\exp \left(1 + W \left(\frac{A^2-1}{e} \right) \right) - 1}{A} \right), \quad A > 0. \quad (11)$$

のように表示される. これより $\theta(+0) = \frac{\pi}{4}$ と $\dot{\theta}(+0) = -\frac{\sqrt{2}}{6}$ を得るので, 上記近似式 (10) の正しさが裏付けられる. 更に追及¹すると,

$$\theta(A) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}A}{6} + \frac{A^2}{9} - \frac{149\sqrt{2}A^3}{3240}$$

が得られる.

対数積

まず, 対数積 $W(x)$ の定義と, 諸性質についてまとめる. 写像 $f : [-1, \infty) \ni w \rightarrow we^w \in [-1/e, \infty)$ は狭義単調増加関数であることが分かる. 従って, f の

¹Mathematica に助けてもらった

逆写像 $W : [-1/e, \infty) \ni x \rightarrow W(x) \in [-1, \infty)$ が一意に定義される. この W は対数積 (ランベルトの W 関数) と呼ばれる. すなわち, 任意の $x \in [-1/e, \infty)$, $w \in [-1, \infty)$ について, 「 $W(x) = w$ であること」と, 「 $we^w = x$ であること」は同値である. また, W が狭義単調増加関数であることは定義から明らかである. さらに, $W(-1/e) = -1$, $W(0) = 0$, $W(e) = 1$ が直ちに得られる. 余談であるが, 実数 $\Omega := W(1) \sim 0.56714329 \dots$ はオメガ定数と呼ばれる. つまり, Ω は $\Omega = e^{-\Omega}$ を満たす.

(11) の証明の概略

$z = A/\sin(\theta(A))$ (> 0) とおく. (9) より, z は

$$\log(1+z) = 1 + \frac{A^2 - 1}{1+z}$$

を満たす. これを整理すると

$$\frac{1+z}{e} \log\left(\frac{1+z}{e}\right) = \frac{A^2 - 1}{e}$$

となる. W の定義より

$$W\left(\frac{A^2 - 1}{e}\right) = \log\left(\frac{1+z}{e}\right)$$

が成り立つので (11) を得る.

$\theta(A)$ の例

- $\theta(+0) = \frac{\pi}{4} \sim 0.785398$
- $\theta(1) = \text{Cosec}^{-1}(e-1) \sim 0.621157$
- $\theta(\sqrt{e+1}) = \text{Cosec}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{e+1}}\left(\frac{e}{\Omega} - 1\right)\right) \sim 0.533312$
- $\theta(\sqrt{e^2+1}) = \text{Cosec}^{-1}\left(\frac{e^2-1}{\sqrt{e^2+1}}\right) \sim 0.470504$
- $y > -1$ のとき, $\theta\left(\sqrt{1+ye^{y+1}}\right) = \text{Cosec}^{-1}\left(\frac{e^{1+y}-1}{\sqrt{1+ye^{y+1}}}\right)$