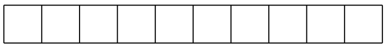
10 と 3 と矢印と巨大な数たち　ver1.03

個人的な話題であるが... 数学（算術）に興味を持った切っ掛けは, 大きな数との邂逅であった. 結局, 巨大数とは直接関係の無い分野を研究しているが, 今でも憧憬は深い. 以下に, 印象深い巨大数を挙げていこう:

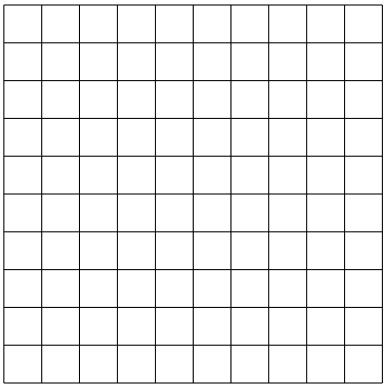
10

幼稚園の頃, 「算数セット」なるものでよく遊んだ. その魅力的な玩具には, 数字の記されたカードが入っており, その中で一番大きな数が 10 であった.



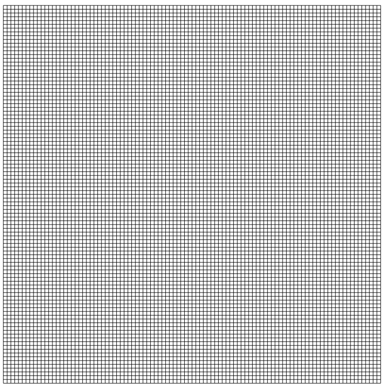
100

小学校 1 年で遭遇する巨大数である. このくらいなら, 湯船に浸かりながらでも数えられるだろう.



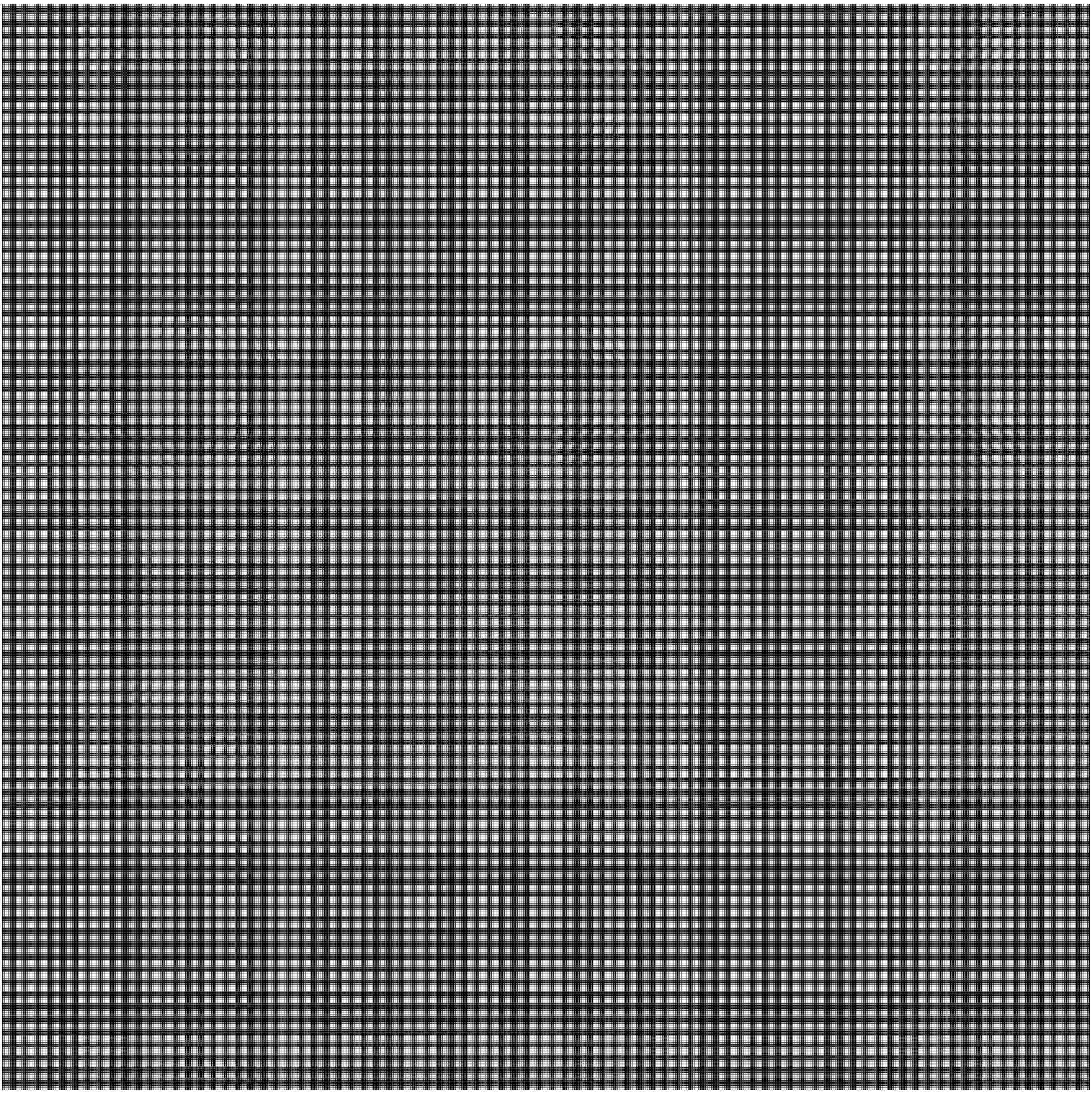
1 0000

小学校 3 年辺りで遭遇する巨大数である. 数えるのは辛い.



100 0000

これも小学校 3 年辺りで遭遇する巨大数である. 英語で言うところの 1 million である.
（下の図を拡大してみよ[1]）



1000 0000 0000 0000

1000 兆. 義務教育では, これより桁の大きい数の名称は習わない. わが国の「借金」は 2010 年現在, 1000 兆円程度であるらしい.

[1]印刷は勧めない.

1 0000 0000 0000 0000

兆より大きい数詞は存在する．この数は 1 京【けい】という．世界の家計金融資産は大体 1 京円程度であるそうだ（2010 年現在）．

100 0000 0000 0000 0000

1946 年, ハンガリーで起きた史上最悪レベルのハイパーインフレーションによって超高額紙幣が登場した．先日, ブダペストのお土産屋で発見した紙幣には,

と書いてある．これは「100 万兆 pengő」と訳すべきで, つまり 100 京 pengő である．

1 0000 0000 0000 0000 0000

私が見つけたのは「100 万兆 pengő」札だが, 最高額は「1 億兆 pengő」札である[2]．こういう紙幣は子供にとってはワクワクするものだが, 大人にとってはゾッとする類の物である．

1 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000

「京」以降も数詞は存在する．現在のところ, 日本語として広く（?）認知されているものとしては, 1 無量大数 10^{68} が最大であろう．（1 無量大数の定義は諸説あるが, 最も少数なものは 10^{68} である.）

1 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000

10^{100} を googol と呼ぶ．google ではない．しかし google の由来は googol である．Hawking 輻射の理論が正しく, 我々の宇宙が閉じていなければ, 大質量ブラック・ホールは約 1 googol 年後には蒸発してしまうだろう．

$100! \sim 9.3326 \times 10^{157}$

階乗 $n!$ は Stirling の公式 $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ によって近似される．この近似は n が大きいほど良い．例えば, $n = 100$ のときの相対誤差は, 0.0008 程度である．

[2]「10 億兆 pengő」も作られたが流通しなかった．

1 centillion$= 10^{303}$

英語（特に米国）では, 10^6 は 1 million, 10^9 は 1 billion, 10^{12} は 1 trillion と呼ぶ. 実はこの後も, 10^{15} は 1 quadrillion, 10^{18} は 1 quintillion と続く. そう, 10^{3+3n} を one "n を表わすラテン語系接頭辞"-illion と呼ぶのである. このルールに基づき, 10^{33} は 1 decillion, 10^{303} は 1 centillion と呼ばれる. centillion は高校生が使用するような英和辞典にも載っていることがある.

1 googolplex$= 10^{10^{100}}$

10 の 1 googol 乗を 1 googolplex という. もはや, 何が何だか意味不明なほど巨大である. ひとつ例を無理矢理挙げる:

> 地球人全て（6×10^9 人とする）が, 一秒毎に, 一斉に正 20 面体のサイコロをふる. これを大体 4×10^{82} 年ほど経過させたときに起こりうるサイコロ達の全パターンが大体 1 googolplex である.

約 $10^{10^{10^{34}}}$

数論に関係する「Skewes 数」の近似値. 1 googolplex よりも圧倒的に大きい.

約 $10^{10^{10^{10^3}}}$

数論に関係する「第 2 Skewes 数」の近似値. 1 googolplex$^{1\ \mathrm{googolplex}}$ よりも圧倒的に大きい.

Graham's number

ZF 公理系を認めれば, 自然数は無限に存在する. 従って, 「一番大きな数」というものは無い. しかしながら「学術論文に記載された, 何らかの意味がある数」として, グラフ理論に関連する Graham 数がギネスブックに記載された.

それでは, Graham 数はどのくらいの大きさなのか? これを指数で表現するのは極めて無謀である. 何故なら, Skewes 数の Skewes 数乗を Skewes 数の冪として得られた数を, Skewes 数の冪として $\cdots$ という操作を Skewes 数回行って得られる, という数でさえ, Graham 数と比べれば微々たる量に過ぎないからである.

そこで助けとなるのは, Knuth によって考案された矢印表記法である. 定義は以下の通りである（n, m, l を自然数とする）:

- $n \uparrow m = n^m$.
- $l > 1$ とするとき,

$$n \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{l} m = \begin{cases} n & \text{if } m = 1, \\ n \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{l-1} \bigl(n \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{l} (m-1)\bigr) & \text{if } m > 1. \end{cases}$$

ここで, 具体例を挙げておこう:

- $3 \uparrow 3 = 3^3 = 27$

- $3\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow(3\uparrow 3) = 3\uparrow(3^3) = 3^{3^3} = 7625597484987.$
- $3\uparrow\uparrow 4 = 3\uparrow(3\uparrow(3\uparrow 3)) = 3\uparrow(3\uparrow(3^3)) = 3^{3^{3^3}} = 3^{7625597484987} \sim 2.31\times 10^{10^{12}}.$
- $3\uparrow\uparrow m = \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} m.$
- $3\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow 3) = \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} 3^{3^3}.$
- $3\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow 3)) = \left. 3\uparrow\uparrow 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} 3^{3^3} = \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} 3^{3^3}.$
- $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow\uparrow 3) = \underbrace{\left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \cdots \left.\right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^3} \right\} 3}_{3\uparrow\uparrow\uparrow 3}$

$$= \underbrace{\left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \cdots \left.\right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^3} \right\} 3.}_{\underbrace{\left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^3} \right\} 3}_{3}}$$

- $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$

$$= \left.\begin{array}{c} \underbrace{\left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \cdots \left.\right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^3} \right\} 3} \\ \underbrace{\left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \cdots \left.\right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^3} \right\} 3} \\ \vdots \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \underbrace{\left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \cdots \left.\right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^3} \right\} 3}_{\underbrace{\left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^3} \right\} 3}_{3}} \end{array}\right\} \left. \underbrace{\left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \cdots \left.\right\} \left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^3} \right\} 3}_{\underbrace{\left. 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \right\} \left. 3^{3^3} \right\} 3}_{3}} \right\} 3.$$

というわけで, $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$ というシンプルな表記であっても, 指数表記に直すと恐ろしい状況になる.

それではいよいよ Graham 数を紹介しよう. まず, 例の恐ろしい巨大数 $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$ を G_1 とかく. 次に, $3\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{G_1}3$ なる数を G_2 とかく. どうだろう, 矢印が一個増えただけでも途方にくれるほど巨大化するのに, G_2 には矢印が G_1 個含まれているのだ. 以下, 帰納的に定義していく. 即ち, G_{l+1} は $3\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{G_l}3$ とおくのである. こうして得られる数 G_{64} が Graham 数である. 従って, 次のようにかかれる:

$$G_{64} = \left.\begin{array}{c} 3\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}3 \\ 3\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}3 \\ \underbrace{\vdots} \\ 3\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}3 \end{array}\right\} 64.$$

この数の巨大さを体感することは難しい. 兎に角, ひたすら巨大である.

$\mathbf{3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 3}$

Conway によるチェーン表記 “$\rightarrow$” を用いれば, Graham 数より遥かに巨大な数を容易に作ることが出来る. 例えば, $3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 3$ は,

$$3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 = \left.\begin{matrix} 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow} 3 \\ 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow} 3 \\ \vdots \\ \underbrace{\qquad} \\ 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{3\uparrow 3} 3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow} 3 \\ 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow} 3 \\ \vdots \\ \underbrace{\qquad} \\ 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{3\uparrow 3} 3 \end{matrix}\right\} 3 \uparrow 3$$

となるので, G_{64} より圧倒的に巨大であることがわかる.

参考文献

[1] コンウェイ, ガイ「数の本」シュプリンガー・フェアラーク東京 (2001) ISBN-13: 9784431707707

[2] ウェルズ「数の事典」東京図書 (1987) ISBN-13: 9784489002427.