行列の p-ノルム

渚　勝

立命館大学客員教授 千葉大学名誉教授

March 17, 2023

$\ell^p(n)$, (p,q)-ノルム

$1 \le p, q \le \infty$
ℓ^p-空間, ℓ^p-ノルム

$$\ell^p(n) = \{\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p < \infty\}$$

$$\|\xi\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$$

線形作用素 (行列), $(p.q)$-ノルム

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{B}(\ell^p, \ell^q)$$

$$\|A\|_{p,q} = \max\{\|A\xi\|_q : \|\xi\|_p = 1\}$$

$\ell^p(n)$, (p,q)-ノルム

$1 \leq p, q \leq \infty$
ℓ^p-空間, ℓ^p-ノルム

$$\ell^p(n) = \{\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p < \infty\}$$

$$\|\xi\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$$

線形作用素 (行列), $(p.q)$-ノルム

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{B}(\ell^p, \ell^q)$$

$$\|A\|_{p,q} = \max\{\|A\xi\|_q : \|\xi\|_p = 1\}$$

魔法陣?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow 15 \quad \Downarrow 15$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 15 & 16 \\ 13 & 14 & 3 & 4 \\ 12 & 7 & 10 & 5 \\ 8 & 11 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow 34 \quad \Downarrow 34$$

$$\|B_1\|_{p,p} = 15, \quad \|B_2\|_{p,p} = 34 \quad \text{for any } p \in [1, \infty].$$

定義 $A = (a_ij) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ が魔法陣とは, $a_{ij} \geq 0$ for any i, j かつ

$$A\xi_0 = \alpha\xi_0, \quad {}^t\xi_0 A = \alpha {}^t\xi_0, \text{ where } \xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

魔法陣?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow 15 \quad \Downarrow 15$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 15 & 16 \\ 13 & 14 & 3 & 4 \\ 12 & 7 & 10 & 5 \\ 8 & 11 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow 34 \quad \Downarrow 34$$

$$\|B_1\|_{p,p} = 15, \quad \|B_2\|_{p,p} = 34 \quad \text{for any } p \in [1, \infty].$$

定義 $A = (a_ij) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ が魔法陣とは, $a_{ij} \geq 0$ for any i, j かつ

$$A\xi_0 = \alpha\xi_0, \quad {}^t\xi_0 A = \alpha\, {}^t\xi_0, \text{ where } \xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

魔法陣?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow 15 \quad \Downarrow 15$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 15 & 16 \\ 13 & 14 & 3 & 4 \\ 12 & 7 & 10 & 5 \\ 8 & 11 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow 34 \quad \Downarrow 34$$

$$\|B_1\|_{p,p} = 15, \quad \|B_2\|_{p,p} = 34 \quad \text{for any } p \in [1, \infty].$$

定義 $A = (a_ij) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ が魔法陣とは, $a_{ij} \geq 0$ for any i, j かつ

$$A\xi_0 = \alpha\xi_0, \quad {}^t\xi_0 A = \alpha {}^t\xi_0, \text{ where } \xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

主命題

Theorem 1

$A \in M_n(\mathbb{C})$ が魔法陣であるとき, $p \in [1, \infty]$ によらず $\|A\|_{p,p} = \alpha$ となる. ここで $A\xi_0 = \alpha\xi_0$, $\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

- $A\xi_0 = \alpha\xi_0 \Rightarrow \|A\|_{p,p} \geq \alpha$ for any $p \in [1, \infty]$.
- $\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
  $\|A\|_{1.1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.
- (Riesz-Thorin の定理) $1 \leq p \leq \infty$ に対して

$$\|A\|_{p,p} \leq \|A\|_{1,1}^{1/p} \|A\|_{\infty,\infty}^{1-1/p}.$$

主命題

Theorem 1

$A \in M_n(\mathbb{C})$ が魔法陣であるとき, $p \in [1, \infty]$ によらず $\|A\|_{p,p} = \alpha$ となる. ここで $A\xi_0 = \alpha\xi_0$, $\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

- $A\xi_0 = \alpha\xi_0 \Rightarrow \|A\|_{p,p} \geq \alpha$ for any $p \in [1, \infty]$.
- $\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
  $\|A\|_{1.1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.
- (Riesz-Thorin の定理) $1 \leq p \leq \infty$ に対して

$$\|A\|_{p,p} \leq \|A\|_{1,1}^{1/p} \|A\|_{\infty,\infty}^{1-1/p}.$$

Logarithmic Convexity

Riesz-Thorin の定理 $p, q, p_i, q_i \in [1, \infty], \theta \in [0, 1]$ とする.

$$(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) = (1-\theta)(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}) + \theta(\frac{1}{p_2}, \frac{1}{q_2})$$

ならば $\|A\|_{p,q} \leq \|A\|_{p_1,q_1}^{1-\theta} \|A\|_{p_2,q_2}^{\theta}$ が成立する.

行列 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ に対して

$$f(t) = \log(\|A\|_{1/t,1/t})$$

は $[0, 1]$ 上の convex function になる.

クラス $\mathcal{C}$, クラス $\mathcal{A}$

$$\mathcal{C}_n = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) : f(t) = \log(\|A\|_{1/t,1/t}) \text{ is constant on } [0,1]\}$$
$$\mathcal{A}_n = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) : f(t) = \log(\|A\|_{1/t,1/t}) \text{ is affine on } [0,1]\}$$

Logarithmic Convexity

Riesz-Thorin の定理 $p, q, p_i, q_i \in [1, \infty], \theta \in [0, 1]$ とする.

$$(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) = (1-\theta)(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}) + \theta(\frac{1}{p_2}, \frac{1}{q_2})$$

ならば $\|A\|_{p,q} \leq \|A\|_{p_1,q_1}^{1-\theta} \|A\|_{p_2,q_2}^{\theta}$ が成立する.

行列 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ に対して

$$f(t) = \log(\|A\|_{1/t,1/t})$$

は $[0, 1]$ 上の convex function になる.

クラス $\mathcal{C}$, クラス $\mathcal{A}$

$$\mathcal{C}_n = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) : f(t) = \log(\|A\|_{1/t,1/t}) \text{ is constant on } [0, 1]\}$$

$$\mathcal{A}_n = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) : f(t) = \log(\|A\|_{1/t,1/t}) \text{ is affine on } [0, 1]\}$$

Logarithmic Convexity

Riesz-Thorin の定理 $p, q, p_i, q_i \in [1, \infty], \theta \in [0, 1]$ とする.

$$(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) = (1-\theta)(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}) + \theta(\frac{1}{p_2}, \frac{1}{q_2})$$

ならば $\|A\|_{p,q} \leq \|A\|_{p_1,q_1}^{1-\theta} \|A\|_{p_2,q_2}^{\theta}$ が成立する.

行列 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ に対して

$$f(t) = \log(\|A\|_{1/t,1/t})$$

は $[0, 1]$ 上の convex function になる.

クラス $\mathcal{C}$, クラス $\mathcal{A}$

$$\mathcal{C}_n = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) : f(t) = \log(\|A\|_{1/t,1/t}) \text{ is constant on } [0, 1]\}$$
$$\mathcal{A}_n = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) : f(t) = \log(\|A\|_{1/t,1/t}) \text{ is affine on } [0, 1]\}$$

定義 $S=(s_{ij})\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ が unitary permutation であるとは, 置換 $\sigma\in S_n$ が存在して次を満たすことである

$$|s_{ij}|=\begin{cases}1 & j=\sigma(i)\\ 0 & j\neq\sigma(i)\end{cases}.$$

Proposition 1

$S=(s_{ij})\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ が *unitary permutation* であることと次の各条件は同値である.

(1) 任意の $p\in[1,\infty]$ に対して $\|S\xi\|_p=\|\xi\|_p$ *for any* $\xi\in\ell^p(n)$ が.

(2) $\|S\xi\|_p=\|\xi\|_p$ *for any* $\xi\in\ell^p(n)$ が成立するような $p\in[1,\infty]\setminus\{2\}$ が存在する.

unitary permutations

定義 $S = (s_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ が unitary permutation であるとは, 置換 $\sigma \in S_n$ が存在して次を満たすことである

$$|s_{ij}| = \begin{cases} 1 & j = \sigma(i) \\ 0 & j \neq \sigma(i) \end{cases}.$$

Proposition 1

$S = (s_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ が *unitary permutation* であることと次の各条件は同値である.

(1) 任意の $p \in [1, \infty]$ に対して $\|S\xi\|_p = \|\xi\|_p$ *for any* $\xi \in \ell^p(n)$ が.

(2) $\|S\xi\|_p = \|\xi\|_p$ *for any* $\xi \in \ell^p(n)$ が成立するような $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$ が存在する.

クラス $\mathcal{C}, \mathcal{A}$

$$\{\text{魔法陣}\} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{C},\ S : \text{a unitary permutation} \ \Rightarrow SA, AS \in \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$$

Proposition 2

$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ に対して $C(\alpha) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n \Leftrightarrow$

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \bar{a_1} & \cdots & \bar{a_n} \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n \Leftrightarrow (a_i a_j \neq 0 \Rightarrow |a_i| = |a_j|).$$

$$\{\text{魔法陣}\} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{C},\ S : \text{a unitary permutation} \ \Rightarrow SA, AS \in \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$$

Proposition 2

$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ に対して $C(\alpha) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n \Leftrightarrow$

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \bar{a_1} & \cdots & \bar{a_n} \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n \Leftrightarrow (a_i a_j \neq 0 \Rightarrow |a_i| = |a_j|).$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,\ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \text{ に対して}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_1\bar{b_1}A & \cdots & a_1\bar{b_n}A \\ \vdots & & \vdots \\ a_n\bar{b_1}A & \cdots & a_n\bar{b_n}A \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n^2}(\mathbb{C})$$

と定義する．このとき

$$B \in \mathcal{A}_{n^2} \Leftrightarrow C(\alpha), R(\beta), A \in \mathcal{A}_n.$$