有限因子環上の Choquet 型の非線型トレース に関する大数の法則

渚　勝　(千葉大学、立命館大学)
綿谷　安男　（九州大学）

日本数学会（東京理科大学）

2026 年 3 月

Choquet 積分

Ω : 集合, $\mathcal{B}$: Ω の集合環 $(\cup, \setminus)$
$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ が単調測度であるとは

(1) $\mu(\phi) = 0$.

(2) $A, B \subset \mathcal{B}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

$\mathcal{B}$ を Ω の σ-加法族とする. Ω 上の非負値可測関数 f に対して

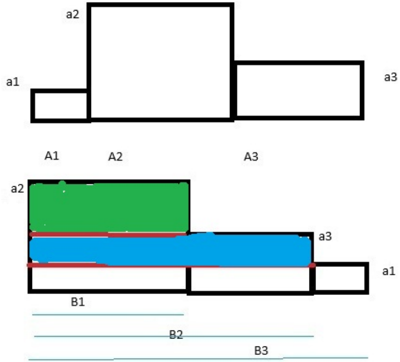
$$(C) \int f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega | f(x) \geq s\}) ds$$

を f の Choquet 積分という.

$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, $A_i \cap A_j = \phi \ (i \neq j)$ のとき

$$(C) \int f d\mu = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(i+1)}) \mu(B_i) + a_{\sigma(n)} \mu(B_n)$$

ただし $a_{\sigma(1)} \geq a_{\sigma(2)} \geq \cdots \geq a_{\sigma(n)} \geq 0$, $B_i = \cup_{j=1}^{i} A_{\sigma(j)}$.



Choquet 型の非線型トレース

$\mathcal{M}$ を有限因子環, τ を faithful normalized normal trace on $\mathcal{M}$ とする.

$\alpha : [0,1] \to [0,1]$ 右連続単調増加関数で $\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1$ を満たすものとする. (α を**重み関数**という)

$p \in \mathcal{M}$ が射影であるとき, $p \mapsto \alpha(\tau(p))$ を単調測度と考えて,
$\varphi_\alpha : \mathcal{M}^+ \to [0,\infty)$ を以下のように定義する.
$a \in \mathcal{M}^+$ のスペクトル分解 $a = \int_0^\infty \lambda de_\lambda(a)$ を用いて

$$\varphi_\alpha(a) = \int_0^\infty \alpha(\tau(e_{(s,\infty)}(a)))ds$$

を α に付随した**非線型 Choquet 型トレース**という.

重み関数 α に対して,

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(1) - \alpha(1-t) = 1 - \alpha(1-t)$$

と定義すると $\bar{\alpha}$ も重み関数になる,

Choquet 型の非線型トレースの拡張

非線型 Choquet 型トレース φ_α を $\mathcal{M}^+$ から $\mathcal{M}_{s.a.}$ へ拡張する.
$a \in \mathcal{M}_{s.a.}$ を $a = a^+ - a^-$, $a^+a^- = 0$ と分解して

$$\varphi_\alpha(a) = \varphi_\alpha(a^+) - \varphi_{\bar{\alpha}}(a^-)$$

と定義する. 拡張された φ_α の性質:

(0) $\varphi_\alpha(-a) \neq -\varphi_\alpha(a)$ $(a \in \mathcal{M}_{s.a.})$

(1) $\varphi_\alpha(ka) = k\varphi_\alpha(a)$ $(a \in \mathcal{M}_{s.a.}, k \geq 0)$

(2) $\varphi_\alpha(a + cI) = \varphi_\alpha(a) + c$ $(a \in \mathcal{M}_{s.a.},\ c \in \mathbb{R})$

(3) $a, b \in \mathcal{M}_{s.a.},\ a \leq b \Rightarrow \varphi_\alpha(a) \leq \varphi_\alpha(b)$.

(4) $\varphi_\alpha(uau^*) = \varphi_\alpha(a)$ $(a \in \mathcal{M}_{s.a.},\ u \in \mathcal{M}$:unitary)

(5) α が concave のとき $\varphi_\alpha(a + b) \leq \varphi_\alpha(a) + \varphi_\alpha(b)$ $(a, b \in \mathcal{M}_{s.a.})$

(6) α が convex のとき $\varphi_\alpha(a + b) \geq \varphi_\alpha(a) + \varphi_\alpha(b)$ $(a, b \in \mathcal{M}_{s.a.})$

(7) $\varphi_\alpha(a)$ は operator norm に関して連続

(8) $\varphi_\alpha(-a) = -\varphi_{\bar{\alpha}}(a)$ $(a \in \mathcal{M}_{s.a.})$

非可換環上の非線型確率 (capacity) と大数の法則

[コイントス] $\mathcal{M} \supset A = \otimes_{n\in\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C})$, $\tau = \otimes_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{tr}_2$.
重み関数 $\alpha(t) = \sqrt{t}$ (concave)
φ_α は α に付随する Choquet 型の非線型トレース.

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{表}), \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{裏}).$$

n 回目の試行の時に表が出る事象（射影作用素）

$$p_n = \otimes_1^{n-1} I \otimes e_0 \otimes_{n+1}^{\infty} I$$

$s_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_\alpha\left(\frac{s_n}{n}\right) = \frac{1}{2} \leq \varphi_\alpha(p_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

[Powers' binary shift] ユニタリ $\{u_n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$ で生成される II_1 型因子環で

$$u_n = u_n^* = u_n^{-1}, \quad u_i u_j = -u_j u_i \quad (i \neq j)$$

この binary shift は

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$u_n = \overbrace{y \otimes y \otimes \cdots \otimes y}^{n} \otimes x \otimes_{n+2}^{\infty} I$$

と構成することもできる.

α を concave, $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_\alpha(\frac{s_n}{n}) = 0 \leq \varphi_\alpha(u_n) = 2\alpha(\frac{1}{2}) - 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\frac{s_n}{\sqrt{n}}\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|(\frac{s_n}{n})^k\| = 0 \ (k = 1, 2, 3, ...)$$

となり後者は C.J.K. Batty(1979) の結果の再発見にもなっている.

主結果

$\mathcal{M}$ は有限因子環, τ を faithful normal normalized trace on $\mathcal{M}$, α を重み関数とする.

φ_α の $\mathcal{M}_{s.a.}$ への拡張より, $a \in \mathcal{M}$ に対して

$$-\|a\| \leq \varphi_\alpha(\mathrm{Re}\ a) = \varphi_\alpha(\frac{a+a^*}{2}) \leq \|a\|$$

が成立する.

定理 $\{a_n\}$ を $\mathcal{M}_{s.a.}$ のノルム有界列とし, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく.
(1) α が concave のとき.

$$C(k) = \sup\{\varphi_\alpha(\mathrm{Re}(a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k})) | i_1, i_2, \ldots, i_k \text{ はすべて異なる} \}$$

とすると

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi_\alpha((\frac{s_n}{n})^k) \leq C(k).$$

(2) α が convex のとき.

$$\hat{C}(k) = \inf\{\varphi_\alpha(\mathrm{Re}(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}))| i_1, i_2, \ldots, i_k \text{ はすべて異なる }\}$$

とすると

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi_\alpha((\frac{s_n}{n})^k) \geq \hat{C}(k).$$

Thanks

Thank you for your attention.