# コンパクト環上の非線型 Choquet トレース

## -双対ノルム, 擬ノルム-

渚　勝　　綿谷 安男

立命館大学客員教授, 九州大学名誉教授,

September 22, 2023

# $\mathbb{N}$ 上の単調測度

実数の増加列 $\{\alpha(n)\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$:

$$0 = \alpha(0) \leq \alpha(1) \leq \alpha(2) \leq \cdots$$

非負の数列 $\{c_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を

$$c_i = \alpha(i) - \alpha(i-1) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

と定義する.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}$ の有限部分集合 $A$ に対して

$$\mu(A) = \alpha(\sharp A)$$

と定義すると $\mathbb{N}$ 上の単調測度 $\mu$ を定義できる.

$$\mu(\phi) = \alpha(0) = 0$$
$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

# $\mathbb{N}$ 上の単調測度

実数の増加列 $\{\alpha(n)\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$:

$$0 = \alpha(0) \leq \alpha(1) \leq \alpha(2) \leq \cdots$$

非負の数列 $\{c_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を

$$c_i = \alpha(i) - \alpha(i-1) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

と定義する.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}$ の有限部分集合 $A$ に対して

$$\mu(A) = \alpha(\sharp A)$$

と定義すると $\mathbb{N}$ 上の単調測度 $\mu$ を定義できる.

$$\mu(\phi) = \alpha(0) = 0$$
$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

# Choquet 積分を用いた正値汎関数

$H$ を可分な Hilbert 空間,
$\mathbb{K}(H)$ を $H$ 上のコンパクト作用素の集合
$\mathbb{F}(H)$ を $H$ 上の有限階作用素の集合
とする.

$a \in \mathbb{K}(H)$ に対して, その特異値を $s_1(a) \geq s_2(a) \geq s_3(a) \geq \ldots \geq 0$ とする. つまり, 直交する 1 次元射影列 $\{p_i\}$ が存在して

$$|a| = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(a) p_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i \leq 1.$$

$s(a)$ に単調測度 $\mu$ による Choquet 積分を用いて非線型正値汎関数（トレース） $\varphi_\alpha : \mathbb{K}(H) \to [0, \infty]$ を定義する.

$$\varphi_\alpha(a) = (C)\text{-}\int s(a) d\mu = \sum_i (s_i(a) - s_{i+1}(a)) \mu(\{1, 2, \ldots, i\})$$

$$= \sum_i (s_i(a) - s_{i+1}(a)) \alpha(i) = \sum_i s_i(a)(\alpha(i) - \alpha(i+1)) = \sum_i c_i s_i(a)$$

# Choquet 積分を用いた正値汎関数

$H$ を可分な Hilbert 空間,
$\mathbb{K}(H)$ を $H$ 上のコンパクト作用素の集合
$\mathbb{F}(H)$ を $H$ 上の有限階作用素の集合
とする.

$a \in \mathbb{K}(H)$ に対して, その特異値を $s_1(a) \geq s_2(a) \geq s_3(a) \geq \ldots \geq 0$ とする. つまり, 直交する 1 次元射影列 $\{p_i\}$ が存在して

$$|a| = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(a)p_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i \leq 1.$$

$s(a)$ に単調測度 $\mu$ による Choquet 積分を用いて非線型正値汎関数（トレース） $\varphi_\alpha : \mathbb{K}(H) \to [0, \infty]$ を定義する.

$$\varphi_\alpha(a) = (C)\text{-}\int s(a)d\mu = \sum_i (s_i(a) - s_{i+1}(a))\mu(\{1, 2, \ldots, i\})$$

$$= \sum_i (s_i(a) - s_{i+1}(a))\alpha(i) = \sum_i s_i(a)(\alpha(i) - \alpha(i+1)) = \sum_i c_i s_i(a)$$

# Choquet 積分を用いた正値汎関数

$H$ を可分な Hilbert 空間,
$\mathbb{K}(H)$ を $H$ 上のコンパクト作用素の集合
$\mathbb{F}(H)$ を $H$ 上の有限階作用素の集合
とする.
$a \in \mathbb{K}(H)$ に対して, その特異値を $s_1(a) \geq s_2(a) \geq s_3(a) \geq \ldots \geq 0$ とする. つまり, 直交する 1 次元射影列 $\{p_i\}$ が存在して

$$|a| = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(a)p_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i \leq 1.$$

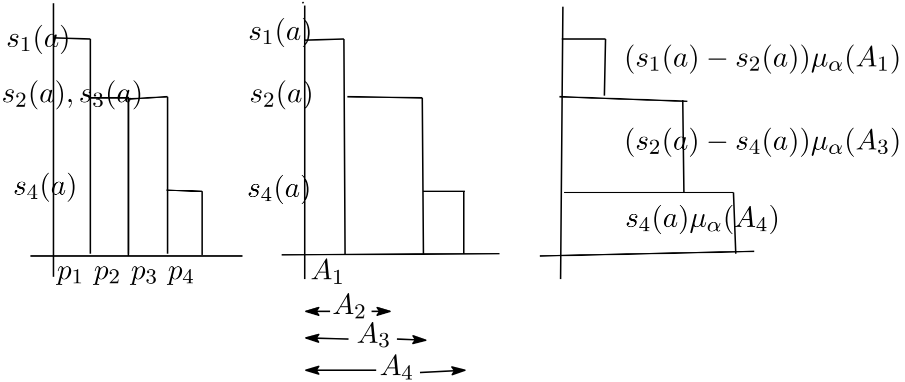
$s(a)$ に単調測度 $\mu$ による Choquet 積分を用いて非線型正値汎関数（トレース） $\varphi_\alpha : \mathbb{K}(H) \to [0, \infty]$ を定義する.

$$\varphi_\alpha(a) = (C)\text{-}\int s(a)d\mu = \sum_i (s_i(a) - s_{i+1}(a))\mu(\{1, 2, \ldots, i\})$$

$$= \sum_i (s_i(a) - s_{i+1}(a))\alpha(i) = \sum_i s_i(a)(\alpha(i) - \alpha(i+1)) = \sum_i c_i s_i(a)$$

$A_i = \{1, 2, \ldots, i\}$

$$
\begin{aligned}
&(s_1(a) - s_2(a))\mu_\alpha(A_1) + (s_2(a) - s_3(a))\mu_\alpha(A_2) \\
&\qquad + (s_3(a) - s_4(a))\mu_\alpha(A_3) + s_4(a)\mu_\alpha(A_4) \\
&= (s_1(a) - s_2(a))\mu_\alpha(A_1) + (s_2(a) - s_4(a))\mu_\alpha(A_3) + s_4(a)\mu_\alpha(A_4)
\end{aligned}
$$



# Result 1

非線型正値汎関数（トレース） $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha,p} : \mathbb{K}(H) \to [0,\infty]$ $(p > 0)$ を考える.

$$\varphi_\alpha(a) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(a)c_i, \ \varphi_{\alpha,p}(a) = (\sum_{i=1}^{\infty} s_i(a)^p c_i)^{1/p}.$$

M. Nagisa and Y. Watatani, *Non-linear traces on the algebra of compact operators and majorization*, Indagationes Mathematicae 34(2023), no.4, 724–751.

## Theorem 1

次は同値

(1) $\{\alpha(n)\}$ は *concave* (*i.e.*, $\frac{\alpha(i)+\alpha(i+2)}{2} \leq \alpha(i+1)$).

(2) $\{c_n\}$ は非負の減少列.

(3) $\varphi_\alpha$ は $\mathbb{F}(H)$ 上のユニタリ不変ノルムになる.

(4) ある $p > 1$ に対して $\varphi_{\alpha,p}$ は $\mathbb{F}(H)$ 上のユニタリ不変ノルムになる.

(5) $p > 1$ に対して $\varphi_{\alpha,p}$ は $\mathbb{F}(H)$ 上のユニタリ不変ノルムになる.

# Result 1

非線型正値汎関数（トレース） $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha,p} : \mathbb{K}(H) \to [0,\infty]$ $(p > 0)$ を考える．

$$\varphi_\alpha(a) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(a)c_i,\ \varphi_{\alpha,p}(a) = (\sum_{i=1}^{\infty} s_i(a)^p c_i)^{1/p}.$$

M. Nagisa and Y. Watatani, *Non-linear traces on the algebra of compact operators and majorization*, Indagationes Mathematicae 34(2023), no.4, 724–751.

## Theorem 1

次は同値

(1) $\{\alpha(n)\}$ は *concave* (*i.e.*, $\frac{\alpha(i)+\alpha(i+2)}{2} \leq \alpha(i+1)$).

(2) $\{c_n\}$ は非負の減少列.

(3) $\varphi_\alpha$ は $\mathbb{F}(H)$ 上のユニタリ不変ノルムになる．

(4) ある $p > 1$ に対して $\varphi_{\alpha,p}$ は $\mathbb{F}(H)$ 上のユニタリ不変ノルムになる．

(5) $p > 1$ に対して $\varphi_{\alpha,p}$ は $\mathbb{F}(H)$ 上のユニタリ不変ノルムになる．

I.C. Gohberg and M.G. Krein, Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, Transl. Math. Monographs, Vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969.
J.-T. Chan, C.-K. Li, and C.C.N. Tu, A class of unitarily invariant norms on $B(H)$, Proc. A.M.S. 129(2000), 1065–1076.

- $\Phi$ : a symmetric norm on $\mathbb{F}(H)$ (ユニタリ不変ノルム) とするとき

$$\mathbb{F}(H) \subset I_\Phi = \{b \in \mathbb{K}(H) : \Phi(b) < \infty\} \subset \mathbb{K}(H)$$

イデアル $(I_\Phi, \Phi)$ は Banach 空間になる.

- symmetric norm $\Phi$ on $\mathbb{F}(H)$ に対して

$$\Phi'(b) = \sup\{\sum_i s_i(a)\lambda_i(b)| : a \in \mathbb{F}(H), \Phi(a) \leq 1\}$$

も symmetric norm on $\mathbb{F}(H)$ になる. $(\lambda_i(b) \in \sigma(b))$

**Corollary 2**

$$\varphi'_\alpha(b) = \sup\{\frac{s_1(b)}{c_1}, \frac{s_1(b)+s_2(b)}{c_1+c_2}, \dots, \frac{s_1(b)+\cdots+s_n(b)}{c_1+\cdots+c_n}, \dots\}.$$

I.C. Gohberg and M.G. Krein, Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, Transl. Math. Monographs, Vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969.
J.-T. Chan, C.-K. Li, and C.C.N. Tu, A class of unitarily invariant norms on $B(H)$, Proc. A.M.S. 129(2000), 1065–1076.

- $\Phi$ : a symmetric norm on $\mathbb{F}(H)$ (ユニタリ不変ノルム) とするとき

$$\mathbb{F}(H) \subset I_\Phi = \{b \in \mathbb{K}(H) : \Phi(b) < \infty\} \subset \mathbb{K}(H)$$

イデアル $(I_\Phi, \Phi)$ は Banach 空間になる.

- symmetric norm $\Phi$ on $\mathbb{F}(H)$ に対して

$$\Phi'(b) = \sup\{\sum_i s_i(a)\lambda_i(b)| : a \in \mathbb{F}(H), \Phi(a) \le 1\}$$

も symmetric norm on $\mathbb{F}(H)$ になる. ($\lambda_i(b) \in \sigma(b)$)

**Corollary 2**

$$\varphi'_\alpha(b) = \sup\{\frac{s_1(b)}{c_1}, \frac{s_1(b)+s_2(b)}{c_1+c_2}, \cdots, \frac{s_1(b)+\cdots+s_n(b)}{c_1+\cdots+c_n}, \cdots\}.$$

I.C. Gohberg and M.G. Krein, Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, Transl. Math. Monographs, Vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969.
J.-T. Chan, C.-K. Li, and C.C.N. Tu, A class of unitarily invariant norms on $B(H)$, Proc. A.M.S. 129(2000), 1065–1076.

- $\Phi$ : a symmetric norm on $\mathbb{F}(H)$ (ユニタリ不変ノルム) とするとき

$$\mathbb{F}(H) \subset I_\Phi = \{b \in \mathbb{K}(H) : \Phi(b) < \infty\} \subset \mathbb{K}(H)$$

イデアル $(I_\Phi, \Phi)$ は Banach 空間になる.

- symmetric norm $\Phi$ on $\mathbb{F}(H)$ に対して

$$\Phi'(b) = \sup\{\sum_i s_i(a)\lambda_i(b)| : a \in \mathbb{F}(H), \Phi(a) \leq 1\}$$

も symmetric norm on $\mathbb{F}(H)$ になる. $(\lambda_i(b) \in \sigma(b))$

## Corollary 2

$$\varphi'_\alpha(b) = \sup\{\frac{s_1(b)}{c_1}, \frac{s_1(b)+s_2(b)}{c_1+c_2}, \cdots, \frac{s_1(b)+\cdots+s_n(b)}{c_1+\cdots+c_n}, \cdots\}.$$

# 擬ノルム (quasi-norm)

$\|\cdot\|$ が線形空間 $X$ 上の擬ノルムであるとは

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|kx\| = |k|\|x\|$
- $\exists L;\ \|x+y\| \leq L(\|x\| + \|y\|)$ for any $x, y \in X$.

を満たすことである. $(X, \|\cdot\|)$ は位相線形空間になる.

**例.** $\ell^p$-空間, $\ell^p$-ノルム $(0 < p \leq 1)$

$$\ell^p(n) = \{\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p < \infty\}$$

$$\|\xi\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$$

このとき

$$\|\xi_1 + \xi_2\|_p \leq 2^{(1-p)/p}(\|\xi_1\|_p + \|\xi_2\|_p).$$

# 擬ノルム (quasi-norm)

$\|\cdot\|$ が線形空間 $X$ 上の擬ノルムであるとは

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|kx\| = |k|\|x\|$
- $\exists L;\ \|x+y\| \leq L(\|x\| + \|y\|)$ for any $x, y \in X$.

を満たすことである. $(X, \|\cdot\|)$ は位相線形空間になる.

**例.** $\ell^p$-空間, $\ell^p$-ノルム $(0 < p \leq 1)$

$$\ell^p(n) = \{\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p < \infty\}$$

$$\|\xi\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$$

このとき

$$\|\xi_1 + \xi_2\|_p \leq 2^{(1-p)/p}(\|\xi_1\|_p + \|\xi_2\|_p).$$

# Result 2

実数の増加列 $\{\alpha(n)\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$:

$$0 = \alpha(0) \le \alpha(1) \le \alpha(2) \le \cdots$$

と非負の数列 $\{c_n\}$ $c_i = \alpha(i) - \alpha(i-1)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ に対して，
非線型正値汎関数（トレース） $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha,p} : \mathbb{K}(H) \to [0, \infty]$ $(p > 0)$

$$\varphi_\alpha(a) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(a) c_i, \ \varphi_{\alpha,p}(a) = (\sum_{i=1}^{\infty} s_i(a)^p c_i)^{1/p}.$$

を考える．

## Theorem 3

次は同値

(1) $\sup_n \frac{\alpha(2n)}{\alpha(n)} < \infty$

(2) $\varphi_\alpha$ は $\mathbb{F}(H)$ 上のユニタリ不変擬ノルムになる．

(3) ある $p > 0$ に対して $\varphi_{\alpha,p}$ は $\mathbb{F}(H)$ 上のユニタリ不変擬ノルムになる．

(4) $p > 0$ に対して $\varphi_{\alpha,p}$ は $\mathbb{F}(H)$ 上のユニタリ不変擬ノルムになる．

# Result 2

実数の増加列 $\{\alpha(n)\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$:

$$0 = \alpha(0) \leq \alpha(1) \leq \alpha(2) \leq \cdots$$

と非負の数列 $\{c_n\}$ $c_i = \alpha(i) - \alpha(i-1)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ に対して,
非線型正値汎関数（トレース） $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha,p} : \mathbb{K}(H) \to [0, \infty]$ $(p > 0)$

$$\varphi_\alpha(a) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(a) c_i, \ \varphi_{\alpha,p}(a) = (\sum_{i=1}^{\infty} s_i(a)^p c_i)^{1/p}.$$

を考える.

## Theorem 3

次は同値

(1) $\sup_n \frac{\alpha(2n)}{\alpha(n)} < \infty$

(2) $\varphi_\alpha$ は $\mathbb{F}(H)$ 上のユニタリ不変擬ノルムになる.

(3) ある $p > 0$ に対して $\varphi_{\alpha,p}$ は $\mathbb{F}(H)$ 上のユニタリ不変擬ノルムになる.

(4) $p > 0$ に対して $\varphi_{\alpha,p}$ は $\mathbb{F}(H)$ 上のユニタリ不変擬ノルムになる.

## 注意

- $q(x)$ を非負係数を持つ $N$ 次多項式とする．$\alpha(n) = q(n)$ であれば，$\varphi_{\alpha,p}$ は擬ノルムである．
- $\alpha(n) = 2^n$ であるとき，$\varphi_{\alpha,p}$ は擬ノルムではない．
- $s(a) = s(ua) = s(au)$, $a \in \mathbb{F}(H)$, ユニタリ $u \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$ だから，

$$\varphi_{\alpha,p}(a) = \varphi_{\alpha,p}(ua) = \varphi_{\alpha,p}(au).$$

- $\varphi_{\alpha,p}$ が擬ノルムであるとき

$$\varphi_{\alpha,p}(xa) \le L\|x\|\varphi_{\alpha,p}(a),\ \varphi_{\alpha,p}(ax) \le L\|x\|\varphi_{\alpha,p}(a)$$

ここで $a \in \mathbb{F}(H)$, $x \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$, $\|x\|$ は $x$ の作用素ノルム．