

Schmidt ランクと部分空間

$(n+k) \times n$ 行列の n 次小行列式

Priyabrata Bag¹ Santanu Dey² 渚 勝³ 大坂博幸³

¹Narse Monjee Institute of management studies

²Indian Institute of Technology Bombay

³立命館大学

2020年9月24日 数学会

この講演では 2 量子状態のヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ を扱う. 純粋状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ の **Schmidt 分解**とは

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^k \alpha_j |u_j\rangle \otimes |v_j\rangle,$$

ここで $\{u_j\}$ は \mathbb{C}^m の正規直交系, $\{v_j\}$ は \mathbb{C}^n の正規直交系で

$$\alpha_j > 0, \quad \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 = 1$$

を満たすように書き表すことである.

純粋状態 $|\psi\rangle$ の **Schmidt ランク** $\text{SR}(|\psi\rangle)$ とは, $|\psi\rangle$ の Schmidt 分解に現れる個数 k の最小値で定義される.

縛れた部分空間

m, n を 4 以上の整数とし $\mathcal{H} = \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ を考える. S を \mathcal{H} の部分空間とする.

$\text{SR} \geq 2$

任意の純粋状態 $|\psi\rangle \in S$ に対して $\text{SR}(|\psi\rangle) \geq 2$ となるような部分空間 S の最大次元は $(m-1)(n-1)$ である (Parthasarathy, Wallach).

$\text{SR} \geq k$

任意の純粋状態 $|\psi\rangle \in S$ に対して $\text{SR}(|\psi\rangle) \geq k$ となるような部分空間 S の最大次元は $(m-k+1)(n-k+1)$ 以下である (Cubbit-Montanaro-Winter).

ここでは $k = 2, 3, 4$ のときに $\text{SR}(|\psi\rangle) \geq k$ となる $(m-k+1)(n-k+1)$ 次元の部分空間でこの部分空間を生成する基底に規則性を持つものを構成する.

\mathbb{C}^m の正規直交基底を $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_m\rangle$
 \mathbb{C}^n の正規直交基底を $|f_1\rangle, |f_2\rangle, \dots, |f_n\rangle$ と表す.
 a は正の実数で $a + \frac{1}{a} > 4$ とする.

$$\mathcal{S} = \text{span}\{g_{i,j}^{(2)} : 2 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$$

$$g_{i,j}^{(2)} = |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle + a|e_{i-1}\rangle \otimes |f_{j+1}\rangle$$

$$|\psi\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \text{SR}(|\psi\rangle) \geq 2$$

$$\text{SR}(g_{i,j}^{(2)}) = 2, \dim \mathcal{S} = (m-1)(n-1).$$

$$\mathcal{T} = \text{span}\{g_{i,j}^{(3)} : 3 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 2\}$$

$$g_{i,j}^{(3)} = g_{i,j}^{(2)} + \frac{1}{a}g_{i-1,j+1}^{(2)}$$

$$= |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle + \left(a + \frac{1}{a}\right)|e_{i-1}\rangle \otimes |f_{j+1}\rangle + |e_{i-2}\rangle \otimes |f_{j+2}\rangle$$

$$|\psi\rangle \in \mathcal{T} \Rightarrow \text{SR}(|\psi\rangle) \geq 3$$

$$\text{SR}(g_{i,j}^{(3)}) = 3, \dim \mathcal{S} = (m - 2)(n - 2).$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \text{span}\{g_{i,j}^{(4)} : 4 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-3\} \\
g_{i,j}^{(4)} &= g_{i,j}^{(3)} + g_{i-1,j+1}^{(3)} \\
&= |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle + (a+1 + \frac{1}{a})|e_{i-1}\rangle \otimes |f_{j+1}\rangle \\
&\quad + (a+1 + \frac{1}{a})|e_{i-2}\rangle \otimes |f_{j+2}\rangle + |e_{i-3}\rangle \otimes |f_{j+3}\rangle \\
|\psi\rangle \in \mathcal{U} &\Rightarrow \text{SR}(|\psi\rangle) \geq 4 \\
\text{SR}(g_{i,j}^{(4)}) &= 4, \dim \mathcal{S} = (m-3)(n-3).
\end{aligned}$$

上の構成で,

$$|\psi\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \text{SR}(|\psi\rangle) \geq 2$$

$$|\psi\rangle \in \mathcal{T} \Rightarrow \text{SR}(|\psi\rangle) \geq 3$$

$$\underline{|\psi\rangle \in \mathcal{U} \Rightarrow \text{SR}(|\psi\rangle) \geq 4}$$

以外は容易である.

$|\psi\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \in \mathcal{H}$ に対して $(\alpha_{i,j}) \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ を考える. このとき

$$\text{SR}(|\psi\rangle) = \text{rank}(\alpha_{i,j})$$

であることはよく知られている. これにより Schmidt ランクの計算を行列のランクに帰着できる.

$$|\psi\rangle \in \mathcal{U} \Rightarrow \text{SR}(|\psi\rangle) \geq 4$$

これを示すために $(n+3) \times n$ 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ -a & 1 & & & & & & \\ a & -a & \ddots & & & & & \\ -1 & a & \ddots & & & & 1 & \\ & -1 & \ddots & & & & -a & 1 \\ & & \ddots & & & & a & -a \\ & & & & & & -1 & a \\ 0 & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

に対して $|a| \geq 5$ のとき

- (1) 上の行列から, どの3つの行を削除しても可逆である
- (2) 上の行列の列ベクトルの線型結合で0ベクトルでないものは少なくとも4つ以上の0でない成分を持つ

ことを示す.

タイトルとサブタイトルの関係については概略を述べましたが前頁から結論への議論は残っています.

a の値については, 同様の結果が得られる場合や, 得られない場合なども考察しています.

詳細については, 論文をご覧くださいと幸いです.