

ALGEBRAIC CORRESPONDENCE から作られる C^* -環

梶原 毅 (TSUYOSHI KAJIWARA)
岡山大学環境学研究科 (OKAYAMA UNIVERSITY)

ABSTRACT. This is a joint work with Yasuo Watatani.

Let $p(z, w)$ be a two variable polynomial. We consider the algebraic equation $p(z, w) = 0$ on the Riemannian sphere. We call the solution of the equation algebraic correspondence. We can construct Hilbert C^* -bimodule from p , and Cuntz-Pimsner C^* -algebra from it. Let J be a p -invariant closed subset of \hat{C} . Restricting to J , we can construct Hilbert C^* -bimodule and Cuntz-Pimsner C^* -algebra.

Under the assumption that p is expansive on J and free on J for a p -invariant closed subset J , we prove that the corresponding Cuntz-Pimsner C^* -algebra is simple and purely infinite. Moreover we present some examples satisfying the above assumptions.

1. INTRODUCTION

本研究は綿谷安男氏との共同研究である。

$p(z, w)$ を 2 変数の多項式として, リーマン球面 \hat{C} 上の代数方程式 $p(z, w) = 0$ を考える. この方程式で決まる $\hat{C} \times \hat{C}$ の部分集合を algebraic correspondence という. p に適切な条件を付した上で, p から Hilbert C^* -bimodule を構成し, これより Cuntz-Pimsner 環を構成することができる. p 不変な閉集合 J に対して p を J に制限して Hilbert C^* -bimodule, Cuntz-Pimsner 環を考えることもできる. 従来調べてきたリーマン球面上の有理関数 $R(z) = P(z)/Q(z)$ のグラフは, $p(z, w) = Q(z)w - P(z)$ とすることによって, algebraic correspondence の特別の例と考えることができる.

p -不変集合 J に対して p が expansive on J かつ free on J とする. そのとき p を J に制限して構成した Cuntz-Pimsner 環が simple かつ purely infinite になることを示す. 有理関数のときには J としてジュリア集合を取れば上の 2 つの条件は自動的に満たされているが, 一般の algebraic correspondence の場合にはそうではなく, 検証する必要がある.

最初に algebraic correspondence の基本的な性質とヒルベルト C^* -bimodule の構成について説明する. 次に, expansive と free の条件のもとで, ヒルベルト C^* -bimodule から構成した Cuntz-Pimsner 環が simple かつ purely infinite になることを証明する. 最後にいくつかの example について報告する.

2. CONSTRUCTION OF C^* -ALGEBRAS

$p(z, w)$ を 2 変数の多項式とする. $p(z, w) = 0$ を複素変数の代数方程式と考える. さらにこれは, 1 次元射影平面上の代数方程式に拡張できる. リーマン球面 \hat{C} は 1

次元射影平面と同一視できるので、 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の代数方程式とみなすことができ、以下そのように考える。

$p(z, w)$ を z, w の多項式として既約分解する。すなわち、

$$p(z, w) = g_1(z, w)^{n_1} \cdots g_p(z, w)^{n_p}$$

であって、各 $g_i(z, w)$ は z, w について既約であるとする。

仮定 $p(z, w) = 0$ は被約 (reduced) すなわち、全ての i について、 $n_i = 1$ とする。さらに、各 $g_i(z, w)$ は z だけ、また w だけの関数ではないとする。

$p(z, w)$ を z の多項式と見たときの次数を m とする。

Lemma 2.1. $w \in \hat{\mathbb{C}}$ を固定する。そのとき $p(z, w) = 0$ は $z \in \hat{\mathbb{C}}$ の方程式とみて、重複度を込めてちょうど m 個の解をもつ。さらに、それらの解は、 w に連続的に依存する。

$e(z_0, w)$ で、 $p(z, w) = 0$ を w を定数と思って z の方程式とみなしたときの解 $z = z_0$ の分岐指数を表す。 $\mathcal{C}_p = \{(z, w) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \mid p(z, w) = 0\}$ とおく。

Lemma 2.2. \mathcal{C}_p は $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ のコンパクト部分集合である。

Definition 2.3. \mathcal{C}_p を p によって決まる algebraic correspondence とよぶ。

$A = C(\hat{\mathbb{C}})$, $X = C(\mathcal{C}_p)$ とおく。 A は可換 C^* 環である。 w を固定すると $p(z, w) = 0$ となる z が有限個であるので、 $f, g \in X$, $a, \in A$ に対して、次のように、 \mathcal{C} の関数 $a \cdot f \cdot b$ と $\hat{\mathbb{C}}$ の関数 $(f|g)_A(w)$ を定義することができる。

$$(a \cdot f \cdot b)(z, w) = a(z)f(z, w)b(w)$$

$$(f|g)_A(w) = \sum_{\{z \mid (z, w) \in \mathcal{C}_p\}} e(z, w) \overline{f(z, w)} g(z, w)$$

$(a \cdot f \cdot b)(z, w)$ は、 X の元である。一方、 Lemma 2.1 により次がなりたつ。

Lemma 2.4. 任意の $f, g \in X$ に対して、写像 $w \rightarrow (f|g)_A(w)$ は連続であり、 $(f|g)_A$ は A の元になる。

Proposition 2.5. A の右作用と X 上の A -値内積によって X は Hilbert A -module になる。

$\mathcal{L}(X_A)$ で、 X 上の線形写像全体で、 A 内積に関して adjoint を持つものを表す。 A から $\mathcal{L}(X_A)$ への写像 ϕ を $a, f \in X$ に対して $\phi(a)f = a \cdot f$ で定義する。

Proposition 2.6. (X, ϕ) は、 Hilbert C^* -bimodule (または C^* -correspondence) である。

この Hilbert C^* -bimodule に対して、 Pimsner construction によって C^* -環を定義する。

Definition 2.7. (X, ϕ) から作られる Pimsner 環を $\mathcal{O}_p(\hat{\mathbb{C}})$ とかく。

Definition 2.8. $\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合 J が p -不変であるとは, $z \in J$ に対して $p(z, w) = 0$ なら $w \in J$ となり, また $w \in J$ に対して $p(w, z) = 0$ でも $z \in J$ となることである.

p -不変な閉集合が J に対して, $\mathcal{C}_p(J) = \{(z, w) \in J \times J \mid p(z, w) = 0\}$, $A_J = C(J)$, $X_J = C(\mathcal{C}_J)$ が同様に定義でき, (X_J, ϕ) は Hilbert C^* -bimodule になる.

Definition 2.9. (X_J, ϕ) に対して作られる Pimsner 環を $\mathcal{O}_p(J)$ と書く.

ここで, 有理関数における分岐点にあたるものを定義する.

$$B(p) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid e(z, w) \geq 2 \text{ for some } w \text{ } p(z, w) = 0\}$$

Lemma 2.10. $B(p)$ は, 有限集合である.

$\mathcal{L}(X_A)$ の部分集合で, 有限階作用素のノルム極限で表されるもの全体を $\mathcal{K}(X_A)$ とする. $I_X = \phi^{-1}(\phi(A) \cap \mathcal{K}(X_A))$ とおく.

Proposition 2.11. p が仮定を満たすとき,

$I_X = \{f \in C(\hat{\mathbb{C}}) \mid f|_{B(p)} = 0\} = 0$ となる. X_J に対しても, 同様に記述される.

$$X_A^{\otimes 2} = X \otimes_A X, \dots, X_A^{\otimes n} = X^{\otimes n-1} \otimes_A X \text{ と書く.}$$

J を不変集合として次を定義する.

$$\mathcal{P}_n = \{(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in J^{n+1} \mid p(z_i, z_{i+1}) = 0, i = 1, \dots, n\}$$

$$\mathcal{P}'_n = \{(z, w) \in J \times J \mid \exists z_2, \dots, z_n \text{ such that } (z, z_2, z_3, \dots, z_n, w) \in \mathcal{P}_n\}$$

Lemma 2.12. $\mathcal{P}_n, \mathcal{P}'_m$ は, $J \times \dots \times J, J \times J$ のコンパクト部分集合である.

φ を $f_1, \dots, f_n \in X$ に対して,

$$\varphi(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n)(z_1, z_2, \dots, z_n) = f_1(z_1, z_2) f_2(z_2, z_3) \dots f_n(z_n, z_{n+1})$$

と定める.

Proposition 2.13. $C(\mathcal{P}_n)$ は自然に Hilbert A - A -bimodule であり, φ は $X^{\otimes n}$ から $C(\mathcal{P}_n)$ への Hilbert A - A -bimodule としての同型である.

この Proposition は $X^{\otimes n}$ の関数としての記述を与え, 後の証明において重要である.

3. SIMPLICITY AND PURE INFINITENESS

n を自然数とし, p -不変集合 J の部分集合 U に対して, J の部分集合 $U^{(n)}$ を,

$$U^{(n)} = \{w \in J \mid (z_1, z_2, \dots, z_n, w) \in \mathcal{P}_n \text{ for some } z_1 \in U, z_2 \dots z_n \in J\}$$

と定義する.

N を自然数とするとき, the set of N -generalized periodic points $\text{GP}(N)$ を,

$$\text{GP}(N) = \{w \in J \mid \exists m, n \quad 0 \leq m \neq n \leq N, \exists (z, z_2, z_3, \dots, z_n, w) \in \mathcal{P}_n, \\ \exists (z, u_2, u_3, \dots, u_m, w) \in \mathcal{P}_m\}$$

と定義する.

Definition 3.1. p が J -expansive on J であるとは, J の任意の空でない開集合 U に対して自然数 n が存在して $U^{(n)} = J$ となることである.

p が有理関数 $R(z)$ によってあたえられている場合, J を R のジュリア集合にとれば, p は J 拡大的である. (Beardon [1])

Definition 3.2. p が free on J であるとは, 任意の自然数 N に対して, $GP(N)$ が有限集合になることである.

Lemma 3.3. p は J -拡大的とする. 任意の $a \in A_J^+$, $a \neq 0$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $n \in \mathbb{N}$ と $f \in X^{\otimes n}$ で $(f|f)_A = 1$ で,

$$\|a\| - \varepsilon \leq f^*af \leq \|a\|$$

となるようなものが取れる.

この Lemma を用いて次の Lemma を示すことができる.

Lemma 3.4. (Kajiwara-Watatani [8]) 任意の $a \in A_J^+$, $a \neq 0$ と任意の ε で $0 < \varepsilon < \|a\|$ をみたすものに対して, $n \in \mathbb{N}$ と $u \in X^{\otimes n}$ で

$$\|u\|_2 \leq (\|a\| - \varepsilon)^{-1/2}, \quad u^*au = I$$

となるものが取れる.

これは, p が expansive on J であることの帰結である.

$x \in X$ に対して, 対応する Toeplitz 環の元を T_x , Cuntz-Pimsner 環の元を S_x とかく.

Lemma 3.5. i, j は 0 以上の整数で $i \neq j$ とする. $x \in X^{\otimes i}$, $y \in X^{\otimes j}$ とする. もし, $a \in C(J)$ が $(z_1, z_2, \dots, z_i, w) \in \mathcal{P}_i$, $(u_1, u_2, \dots, u_j, w) \in \mathcal{P}_j$ となるような全ての z_1, u_1 に対して $a(z_1)a(u_1) = 0$ となるならば, $aT_xT_y^*a^* = 0$ となる.

この Lemma は Toeplitz 環に対するものであるが, quotient をとることにより Cuntz-Pimsner 環でも成立する.

Lemma 3.6. p が free on J であるとする. 自然数 r を固定する. J の任意の開集合 U に対して, U の空でない開部分集合 V で, 次をみたすものがとれる.

- (1) J の互いに素な m^r 個の開集合 W_i で, 各 $w \in V$ に対して, $(z, w) \in \mathcal{P}'_n$ となるような $z \in W_i$ がただひとつ存在し, w から各 z_i への対応が, V から W_i への局所同相写像 Φ_i となるものがとれる.
- (2) $b(w)$ を V 内にサポートを持つ関数とする. 連続関数 $a(z)$ を

$$a(z) = \begin{cases} b(\Phi_i^{-1}(z)) & z \in W_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義することができる. そのとき任意の $x \in X^{\otimes i}$, $y \in X^{\otimes j}$, $0 \leq i, j \leq r$, $i \neq j$ に対して, $aS_xS_y^*a^* = 0$ が成り立つ.

こちらは, p が free on J であることの帰結である.

これらをあわせて, 次の Proposition が成り立つ.

Proposition 3.7. p は *expansive on J free on J* とする. 任意の $r \in \mathbb{N}$, 任意の $T \in \mathcal{L}(X^{\otimes r})$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $a \in A_J^+$, $\|a\| = 1$ で,

$$\begin{aligned} \|\phi(a)T\|^2 &\geq \|T\|^2 - \varepsilon, \\ aS_x S_y^* a &= 0 \quad \forall x \in X^{\otimes i}, \forall y \in X^{\otimes j}, 0 \leq i, j \leq r, i \neq j \end{aligned}$$

となるものが取れる.

この Proposition の前半の部分は, $X^{\otimes n}$ と $C(\mathcal{P}_n)$ の同型により, 関数を使った議論によって示すことができる.

$\mathcal{L}(X^{\otimes r})$ の部分環 $A \otimes I^r + K(X) \otimes I^{r-1} + \dots + K(X^{\otimes r})$ から $\mathcal{O}_p(J)^{\mathbb{T}}$ への $*$ -準同型が well-defined であり, しかも等距離となる ([5]). 従って, $b_0 \in \mathcal{O}_p(J)^{\mathbb{T}}$ が代数的な元であるとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|Pb_0P\| \geq \|b_0\| - \varepsilon$ となるような $P \in A_J^+$, $\|P\| = 1$ で 2 番目の条件も同時にみたすものが取れる.

以上の準備のもとで, あとは Kajiwara-Watatani ([8]) の証明と全く同様に, $\mathcal{O}_p(J)$ が simple かつ purely infinite であることが証明できる.

Theorem 3.8. J は p 不変閉集合, p は *expansive on J かつ free on J* となるとき, $\mathcal{O}_p(J)$ は simple かつ purely infinite である.

4. EXAMPLES

$p(z, w) = w^m - z^n = 0$ に対して, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ は両側 p -不変である.

Lemma 4.1. $p(z, w) = w^m - z^n = 0$ を考える. $m \neq n$ のとき, $J = \hat{\mathbb{C}}$ または $J = \mathbb{T}$ のとき p は *free on J* である. $J = \mathbb{T}$ とするとき, n が m の約数の場合をのぞいて, p は J -拡大的である.

$p(z, w) = w^m - z^n = 0$ を $J = \mathbb{T}$ に制限する. m, n が互いに素のときには, \mathcal{C}_p は連結となり, Katsura([7]) の例と同じである. m, n が互いに素でないときには, 複数の連結成分が現れ, Katsura([7]) の例とは別のものになる.

Lemma 4.2. $R_i(z) = P_i(z)/Q_i(z)$ $i = 1, \dots, n$ を有理関数とする. $p(z, w) = (Q_1(z)w - P_1(z)) \cdots (Q_n(z)w - P_n(z)) = 0$ とする. もし各 R_i の次数が全て 2 以上で互いに素であれば, p は全ての i に対して R_i 不変な完全閉集合 J に対して *free on J* である.

次は, ふたつの有理関数に対して共通のジュリア集合が存在する場合である.

Example 4.3. m, n を互いに素な自然数とし, $p(z, w) = (w - z^m)(w - z^n) = 0$ とする. $J = \mathbb{T}$ とする. そのとき, p は *free on J かつ J -拡大的* となり, $\mathcal{O}_p(\mathbb{T})$ は simple かつ purely infinite である.

この場合, 分岐点のない correspondence の積から新たに分岐点 $(1, 1)$ が出現する. 二つの有理関数から correspondence を構成する場合, Julia 集合は必ずしも共通でなくても *free かつ expansive* になる場合がある.

Example 4.4. $R_1(z) = \frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$ (Latte の有理関数) であり, $R_2(z) = P_2(z)/Q_2(z)$ は有理関数とする. $p(z, w) = ((4z(z^2-1))w - (z^2+1)2)(Q_2(z)w - P_2(z))$ とする. $J = \hat{\mathbb{C}}$ として, p は expansive on J である. もし R_2 の次数が奇数なら, p は free on $\hat{\mathbb{C}}$ ともなるので, $\mathcal{O}_p(\hat{\mathbb{C}})$ は simple かつ purely infinite である.

一般に free 条件を判定することは大変だが, 冪関数の積を \mathbb{T} に制限した場合については判定可能である. 次は 1 つの十分条件である.

Example 4.5. $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n$ は自然数とし, i_k と j_k はともに 1 ではなく, また 1 でないものは全て互いに素であるとする. そのとき, $J = \mathbb{T}$ として,

$$p(z, w) = (z^{i_1} - w^{j_1})(z^{i_2} - w^{j_2}) \dots (z^{i_n} - w^{j_n}) = 0$$

は free on J である.

free でないものは容易に出現する.

Example 4.6. m を 2 以上の自然数として, $p(z, w) = (w - z^m)(w^m - z)$ は, free on \mathbb{T} でない.

この他, 具体例の K -群についても報告する.

REFERENCES

- [1] A. F. Beardon, *Iteration of rational functions*, GTM 132, 1991, Springer New York.
- [2] S. Bullet and C. Penrose, *A gallery of iterated correspondences*, Experimental Math.
- [3] S. Bullet and C. Penrose, *Regular and limit sets for holomorphic correspondences*,
- [4] F.C.Cucker and A.G.Corbalan, *An alternate proof of continuity of the roots of a polynomial*, Amer. Math. Monthly, 96(1989), 342-345
- [5] N.J.Fowler, P.S.Muhly and I.Raeburn, *Representation of Cuntz-Pimsner algebras* Indiana Univ. Math. J. 52(2003), 569-604
- [6] M.Izumi, T.Kajiwara and Y.Watatani, *KMS states and branched points*, to appear in Ergodic Theory and Dynamical Systems
- [7] T.Katsura., *A class of C^* -algebras generalizing both graph algebras and homeomorphism C^* -algebras IV, pure infiniteness* arXiv:math/0509343
- [8] T.Kajiwara and Y.Watatani, *C^* -algebras associated with complex dynamical systems*, Indiana Math. J. 54 (2005), 755-778.