# コンパクト作用素

ここでは可分なヒルベルト空間で議論することにする.

ヒルベルト空間 $H$ の単位球は, 正規直交基底を含むから, 無限次元のときは強位相についてコンパクトでないことがわかる. しかし弱位相に関してはコンパクトであることがわかる. つまり, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ で $\|x_n\| \leq 1$ のとき適当な部分列 $\{x_{k(n)}\}$ を選んで, 任意の $y \in H$ に対して $(x_n \mid y)$ が収束することを示せば良い.

実際は, 正規直交基底 $\{e_i\}$ に対して $(x_{k(n)} \mid e_i)$ が収束 (for all $i$) を示せば良い。

$\{(x_n \mid e_1)\}$ は有界列だから収束する部分列 $\{(x_{1(n)} \mid e_1\}$ が選べる. $\{(x_{1(n)} \mid e_2)\}$ は有界列だから収束する部分列 $\{(x_{2(n)} \mid e_2\}$ が選べる. これを繰り返すと各 $i$ に対して $\{(x_{n(n)} \mid e_i)\}$ が収束列になる.

$H$ 上の有界線形作用素 $T$ が完全連続作用素 (コンパクト作用素) であるとは, $H$ の単位球 $H_1$ に対して

$$\overline{T(H_1)}^{\|\cdot\|}$$

が強コンパクトとなることである. $H_1$ が弱コンパクトであることから, $T$ がコンパクト作用素であることと

$$w - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow s - \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0$$

が同値になる.

正規直交列は強収束しないが, 弱収束するから, 恒等作用素がコンパクトとなるための必要十分条件は $H$ が有限次元ヒルベルト空間になることである. もう少し一般化して, 有界線形作用素 $T : H \longrightarrow H$ がコンパクトであれば, 集合

$$\{x \in H \mid \|Tx\| \geq \alpha\|x\|\} \quad (\alpha > 0)$$

に含まれる $H$ の部分空間は有限次元である. 実際, もし無限次元であるとすると正規直交列 $\{x_n\}$ がとれて, $\|Tx_n\| \geq \alpha$ となる. $x_n$ は 0 に弱収束するから, $Tx_n$ は 0 に強収束することになり矛盾する.

コンパクト作用素は次のような性質をもつ.

(1) $S$ を有界線形作用素, $T$ をコンパクト作用素とすると, $ST$, $TS$ ともにコンパクト作用素である.

(2) $S, T$ がコンパクト作用素ならば, $S^*$, $S + T$ もコンパクト作用素である.

(3) $T_n$ がコンパクト作用素で, $\|T_n - T\| \to 0$ ならば $T$ はコンパクト作用素である.

(1) $\{x_n\}$ を弱収束列とすると $T$ コンパクトより $\{Tx_n\}$ は強収束列. 従って $\{STx_n\}$ は強収束列になり $ST$ がコンパクトであることがわかる. また

$$\overline{TSH_1}^{\|\cdot\|} \subset \overline{T(\|S\|H_1)}^{\|\cdot\|}$$

より $TS$ がコンパクトであることがわかる.

(2) $\|T^* x_n\|^2 = (x_n \mid TT^* x_n)$ より 0 に弱収束、強収束する列の内積は 0 に収束するので $T^*$ がコンパクトであることがわかる.

$$H_1 \ni x \mapsto (Sx, Tx) \in H \times H, \qquad H \times H \ni (x, y) \mapsto x + y \in H$$

の連続写像の合成により $S + T$ がコンパクトであることがわかる.

(3) 弱収束列 $\{x_n\}$ に対して $\{T_m x_n\}_n$ は強収束列になり, $T_m$ が $T$ に一様に収束せることから $\{Tx_n\}$ は強収束列になる.

コンパクト作用素 $T$ に対してその極分解

$$T = V|T|$$

を考えると, $|T|$ は $T^*T$ の平方根, つまり多項式近似なので $|T|$ はコンパクト作用素になる. また $|T|$ は正値エルミート作用素なので

$$|T| = \int_0^{\|T\|} \lambda dE(\lambda)$$

という形で表すことができる. $\alpha > 0$ に対して射影作用素

$$P_\alpha = \int_\alpha^{\|T\|} dE(\lambda)$$

を考えると $P_\alpha x = x$ のとき

$$\||T|x\| \geq \alpha \|x\|$$

となる. $|T|$ がコンパクトより, $P_\alpha$ は有限次元の射影作用素になることがわかる. 従って $\alpha < \lambda \leq \|T\|$ に対して有限個の $\lambda$ を除いて

$$s - \lim_{\mu \to \lambda - 0} E(\mu) = E(\lambda)$$

が成立する．より正確に述べると，$\alpha$ より大きい $|T|$ の固有値は有限個で，各固有空間は有限次元であり，$E(\lambda)$ の不連続点は固有値であり、そのギャップは固有空間の射影である．$\alpha$ を 0 に近づけることによって $|T|$ の固有値は集積するとすれば 0 のみであり，それ以外の固有値の集積点をもたない．つまり

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \ldots \geq 0$$

という固有値の減少列があり，各固有値の固有ベクトルからなる正規直交列

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

が選べて

$$|T| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes x_i$$

という形をもつ．従って，もとのコンパクト作用素 $T$ は

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i V x_i \otimes x_i$$

という形を持つ．

**定理** コンパクト作用素 $T$ に対して，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq 0$ と 2 つの正規直交ベクトル列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が選べて

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i \otimes x_i$$

と表すことができる．