有界線形作用素

X, Y をノルム空間とし, T は X から Y への線形作用素とする. つまり

$$T(x+y) = Tx + Ty, \quad T(\alpha x) = \alpha Tx, \qquad x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

命題 線形作用素 $T : X \longrightarrow Y$ に対して以下は同値.

(1) T は 0 で連続

(2) T は連続

(3) T は有界 i.e., $(\exists M)(\forall x \in X)(\|Tx\| \leq M\|x\|)$

T が有界のとき

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$$

によって作用素のノルムを定義する.

命題 $X.Y$ をノルム空間とする.

(1) X_1 は X の稠密な部分空間, Y は完備, $T : X_1 \longrightarrow Y$ が有界線形作用素ならば有界線形作用素 $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$ で, $\tilde{T}|_{X_1} = T$, $\|T\| = \|\tilde{T}\|$ となるものが一意的に存在する.

(2) $T : X \longrightarrow Y$ が上への線形写像で

$$\exists m > 0 \quad \forall x \in X \quad m\|x\| \leq \|Tx\|$$

ならば有界な逆作用素 T^{-1} が存在する.

(3) Y が完備のとき, X から Y への有界線形作用素の全体 $\mathbb{B}(X, Y)$ はノルム

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\} = \inf\{M \mid \|Tx\| \leq M\|x\|\ \forall x\}$$

によって Banach 空間になる.

以下, ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素の全体 $\mathbb{B}(H,H)(=\mathbb{B}(H))$ について述べることにする.

$\mathbb{B}(H)$ の構造

- $\mathbb{B}(H)$ は Banach 空間
- ノルム

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\} = \sup\{|(Tx|y)| \mid \|x\| = \|y\| = 1\}$$

- 代数 (algebra): $S, T \in \mathbb{B}(H)$, $x \in H$ に対して

$$(ST)x = S(Tx)$$

  によって積 ST を定義する.

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$$

  が成立する.

- 対合 (involution): $T \in \mathbb{B}(H)$, $x, y \in H$ に対して

$$H \ni x \mapsto (Tx|y) \in \mathbb{C}$$

  は H 上の有界線形汎関数になる. 従って Riesz の定理により

$$(Tx|y) = (x|z_y)$$

  となる z_y がただ一つ定まる. この対応で有界線形作用素

$$T^* : H \ni y \mapsto z_y \in H$$

  が定義でき, この T から T^* を構成する操作 $*$ を対合 (involution) という. $S, T \in \mathbb{B}(H)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\|T\| = \|T^*\|,\ (ST)^* = T^*S^*,\ (\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*,\ (T^*)^* = T$$

  が成立する.

- 対合とノルムの関係

$$\|T^*T\| = \|T\|^2$$

いろいろな作用素

T が自己共役作用素(self-adjoint operator), エルミート作用素 (hermitian) であるとは

$$T = T^* \Leftrightarrow (Tx|y) = (x|Ty),\ \forall x, y \in H \Leftrightarrow (Tx|x) \in \mathbb{R},\ \forall x \in H$$

V が等距離作用素(isometry) であるとは

$$\|Vx\| = \|x\|,\ \forall x \Leftrightarrow (Vx|Vy) = (x|y),\ \forall x, y \Leftrightarrow V^*V = 1$$

U がユニタリ作用素(unitary) であるとは

$$U \text{ は上への isometry } \Leftrightarrow U^*U = 1 = UU^*$$

射影作用素(projection): H の閉部分空間 K に対して $H = K \oplus K^\perp$ と直交分解できる．このとき $H \ni x = y + z \in K \oplus K^\perp$ という分解をもとに $P : H \ni x \mapsto y \in K$ が定義できる．この作用素 P を射影作用素といい, $P = P^2 = P^*$ であることがわかる.

逆に $P = P^* = P^2$ を満たしているとき P は直交分解 $H = PH \oplus (1-P)H$ に対応する射影になっている.

部分等距離作用素(partial isometry): ある閉部分空間からある閉部分空間の上への等距離作用素

$$\Leftrightarrow V^*V: \text{ 射影 } \Leftrightarrow VV^*: \text{ 射影}$$

縮小写像(contraction): ノルムが 1 以下の作用素
$\|T\| < 1$ のとき $S = 1 + T + T^2 + \cdots \in \mathbb{B}(H)$ で

$$(1-T)S = S(1-T) = 1$$

となる.

T が正値作用素(positive operator) であるとは,

$$\forall x \in H \quad (Tx|x) \geq 0$$

となること．特に $T=T^*$ である．
T が正値, $S \in \mathbb{B}(H)$ ならば S^*TS も正値.

自己共役作用素に順序を考える．すでに有限次元の場合に順序を導入したが同じアイデアである．S,T 自己共役作用素に対して

$$S \leq T \Leftrightarrow T-S \text{ が正値作用素 } \Leftrightarrow \forall x \in H \quad (Sx|x) \leq (Tx|x)$$

と定義する．射影作用素 P,Q にこの順序を考えると

$$P \leq Q \Leftrightarrow PH \subset QH \Leftrightarrow PQ = P = QP$$

となる.

大雑把な作用素の種類の紹介は終わったが, 多くの場面でどのような作用素を対象として考えているのか, 少し具体的に述べてみる.

両側シフト (bilateral shift)
可分 Hilbert 空間の正規直交基底を $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ とする．このとき $Bx_i = x_{i+1}$ $(i \in \mathbb{Z})$ と定義すると B は H 上の有界線形作用素に拡張できる．この B を両側シフトという．B はユニタリ作用素である.
片側シフト (unilateral shift)
可分 Hilbert 空間の正規直交基底を $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とする．このとき $Sx_i = x_{i+1}$ $(i \in \mathbb{N})$ と定義すると S は H 上の有界線形作用素に拡張できる．この S を片側シフトという．S は等距離作用素であるがユニタリ作用素ではない．S^* は部分等距離作用素である.
対角作用素 (diagonal operator)
Hilbert 空間の正規直交基底を $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を選んで

$$Dx_i = \lambda_i x_i \qquad (\lambda_i \in \mathbb{C})$$

という形にできる有界線形作用素 D のこと．(対角行列の無限次元版)
掛け算作用素 (multiplication operator)
測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ に対して, 2 乗可積分な関数全体 $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ は Hilbert 空間になる．本質的に有界な関数 $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ に対して

$$(M(f)g)(\omega) = f(\omega)g(\omega), \qquad g \in L^2(\Omega),\ \omega \in \Omega$$

と定義すると $M(f)$ は $L^2(\Omega)$ 上の有界線形作用素になる．この作用素を掛け算作用素という．(対角行列の一般化または対角作用素の連続版)

積分核作用素

$K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ つまり

$$\int\int |K(s,t)|^2 dsdt < \infty$$

となる関数を用いて定義される次のような $L^2(\Omega)$ 上の有界線形作用素.

$$(Tf)(t) = \int K(s,t)f(s)ds \qquad f \in L^2(\Omega).$$

群からできるユニタリ作用素

離散群 G に対して G 上の複素数値関数 ξ で

$$\sum_{g \in G} |\xi(g)|^2 < \infty$$

を満たすもの全体を $\ell^2(G)$ と表す．$\ell^2(G)$ は Hilbert 空間になる．G の各元 g に対して $\ell^2(G)$ 上のユニタリ作用素が

$$(\lambda(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}h), \quad (\rho(g)\xi)(h) = \xi(hg)$$

によって定義できる．このとき $\lambda : G \ni g \mapsto \lambda(g) \in \mathbb{B}(\ell^2(G))$, $\rho : G \ni g \mapsto \lambda(g) \in \mathbb{B}(\ell^2(G))$ は群準同型になる．これを G の左正則表現, 右正則表現という．

われわれが扱う無限次元の作用素についていろいろ述べたが, 有限次元の行列に対応するものとして有限階作用素(finite rank operator) がある．つまり $T \in \mathbb{B}(H)$ で値域 TH が有限次元空間となるものである．TH の一次独立なベクトルを $x_1, x_2, \ldots, x_n$ とすると, $x \in H$ に対して Tx は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の一次結合で表せる．このとき x から Tx の x_1 の係数への写像は H 上の有界線形作用素になるから, Riesz の定理より, Tx の x_1 の係数は適当な $y_1 \in H$ を用いて $(x|y_1)$ と表されることになる．同様の議論を用いて

$$Tx = (x|y_1)x_1 + (x|y_2)x_2 + \cdots + (x|y_n)x_n$$

となることがわかる．このような有限階作用素を次のように表すこともある

$$T = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \cdots + x_n \otimes y_n.$$

有限階作用素でノルムの意味で近似できる有界線形作用素 (有限階作用素のノルム極限になる作用素) を完全連続作用素(compact operator) という．完全連続作用素は弱収束列を強収束列に写す線形写像という特徴付けもある． ($\forall y \in H\ (Tx_n|y) \to (Tx|y) \Rightarrow \|Tx_n - Tx\| \to 0$)

T を完全連続作用素, $\{x_n\}$ を H の完全正規直交系とする．

$$\sum_n |(Tx_n|x_n)| < \infty$$

のとき T をトレースクラス作用素(trace class operator) という．

$$\sum_n |(Tx_n|x_n)|^2 < \infty$$

のとき T をヒルベルトシュミット作用素という．これらの概念は完全正規直交系の選び方に依存しないことがわかる．