Dimension groups of Cantor minimal systems

松井宏樹

1　序

位相空間 X とその上の同相写像 φ の組を位相力学系と呼びます。(もっと一般的な状況では、φ はただの連続写像であったり、$\mathbf{Z}$ 以外の群作用を考えたりしますが、ここではこの設定で話をすすめます。) 言うまでもなく、位相力学系の研究のひとつの目標は、共役同値関係による位相力学系の分類にあります。ここで、ふたつの位相力学系 (X, φ) と (Y, ψ) が共役であるとは、同相写像 $\pi : X \to Y$ が存在して、$\pi \circ \varphi = \psi \circ \pi$ となることを言います。つまり、全ての位相力学系の共役同値類を決定したいのです。

しかし位相力学系はとてもたくさん存在し、それら全てを共役同値関係で見分けようとすると、とても難しいという場合があります。そのような場合に考えられたのが、共役よりも少し弱い軌道同型という同値関係です。ふたつの位相力学系 (X, φ) と (Y, ψ) が軌道同型であるとは、同相写像 $\pi : X \to Y$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して $\pi(Orb_\varphi(x)) = Orb_\psi(\pi(x))$ となることを言います。ここで $Orb_\varphi(x)$ とは $\{\varphi^n(x); n \in \mathbf{Z}\}$ という集合のことで、これを x の軌道と言います。ひとつひとつの軌道を移しあうような同相写像が存在するときに、軌道同型であると言うのです。もちろん共役ならば軌道同型であることがすぐにわかります。

さて今後このノートでは、非常に限定された位相力学系のあるクラスについてのみ考えることにします。そのクラスとはカントール極小系と呼ばれるものです。位相空間 X がカントール集合であって、同相写像 φ が極小であるとき、(X, φ) をカントール極小系と言います。カントール集合とは、二点集合 $\{0, 1\}$ の可算無限直積に直積位相を入れたものです。抽象的には、コンパクト完全不連結かつ距離付け可能な位相空間で孤立点を持たないもの、と言うことができます。また、φ が極小であるとは、任意の $x \in X$ に対して $Orb_\varphi(x)$ が X で稠密であることを言います。これは、φ が非自明な不変閉集合を持たないと言っても同じ事です。カントール極小系は古くから研究されてはいたのですが、とてもたくさん存在する

ため、それらの分類はほとんど進んでいませんでした。ところが９０年代に入って、次の節で述べる次元群が定義され強軌道同型による分類がなされました。次元群はカントール極小系に対する不変量としては、かなりよい性質をもっており、カントール極小系の研究を進める上で重要な概念であると言えます。このノートの後半では、カントール極小系の自己同型と次元群についてわかったことを述べたいと思います。

2　カントール極小系の次元群

次元群の定義を述べます（[3]）。(X,φ) をカントール極小系とし、$C(X,\mathbf{Z})$ で X 上の整数値連続関数を表します。$C(X,\mathbf{Z})$ を足し算によって加群とみなし、

$$K^0(X,\varphi) = C(X,\mathbf{Z})/\{f - f\circ\varphi^{-1}; f \in C(X,\mathbf{Z})\}$$

とおいて、これを次元群と呼びます。関数 f の次元群における同値類を $[f]$ と書きましょう。次元群 $K^0(X,\varphi)$ は単に加群であるだけでなく、正錐 $K^0(X,\varphi)^+$ を備えています。すなわち

$$K^0(X,\varphi)^+ = \{[f] \in K^0(X,\varphi); f \geq 0 \text{ as a function on } X\}$$

とおくとき、

$$K^0(X,\varphi)^+ + K^0(X,\varphi)^+ \subset K^0(X,\varphi)^+$$

$$K^0(X,\varphi)^+ - K^0(X,\varphi)^+ = K^0(X,\varphi)$$

$$K^0(X,\varphi)^+ \cap (-K^0(X,\varphi)^+) = \{0\}$$

をすぐに確かめることができます。また X 上のいたるところで 1 という定数関数を特別視して、[1] を順序単位元と言うことにします。

さて一般に G を加群としましょう。G の部分集合 G^+ が、上と同様に

$$G^+ + G^+ \subset G^+,\ G^+ - G^+ = G,\ G^+ \cap (-G^+) = \{0\}$$

を満たすとき、(G, G^+) の組は順序群であると言われます。順序群 G の元 a, b が $b - a \in G^+$ を満たすとき、$a \leq b$ と書くことにします。

定義 1. (i) 順序群 (G, G^+) が unperforated であるとは、「$a \in G$ と $n \in \mathbf{N}$ が $na \in G^+$ を満たすならば $a \in G^+$」となることをいう。

(ii) $u \in G^+$ が順序単位元であるとは、任意の $a \in G$ に対して $n \in \mathbf{N}$ が存在して $a \leq nu$ となることをいう。

(iii) 順序群 (G, G^+) が Riesz の補間条件を満たすは、与えられた $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ が $a_i \leq b_j (i, j = 1, 2)$ であるならば、ある $c \in G$ が存在して $a_i \leq c \leq b_j (i, j = 1, 2)$ となることをいう。

(iv) 順序群 G の部分群 J がイデアルであるとは、$J^+ = J \cap G^+$ とおくとき次が成立することをいう。

$$J = J^+ - J^+$$

$$0 \leq a \leq b,\ b \in J \text{ ならば } a \in J$$

(v) 順序群 (G, G^+) が単純であるとは、G が非自明なイデアルを持たないことをいう。

上で定義した $(K^0(X, \varphi), K^0(X, \varphi)^+, [1])$ に対して次の命題が成り立ちます。

命題 2 ([6]). (X, φ) がカントール極小系のとき、$(K^0(X, \varphi), K^0(X, \varphi)^+, [1])$ は $[1]$ を順序単位元とする unperforated な順序群であって Riesz の補間条件を満たし、かつ単純である。逆に、(G, G^+, u) が今述べたような組であってかつ G が $\mathbf{Z}$ ではないならば、あるカントール極小系 (X, φ) が存在して、$(K^0(X, \varphi), K^0(X, \varphi)^+, [1])$ と (G, G^+, u) は同型になる。

ここで、最も簡単なカントール極小系の例を一つだけ挙げることにします。自然数の列 $\{m_n\}_n$ で m_n は m_{n+1} を割るというものを用意します。そして

$$X = \operatorname{proj}\lim \mathbf{Z}/m_n\mathbf{Z}$$

とおきます。X は直積位相によってカントール集合になっています。また X は可換な位相群にもなっています。いま X の元として $(1, 1, \cdots)$ というものを考え、この元を足すという操作を X 上の自己同相と見なして、これを φ とします。すると (X, φ) はカントール極小系になっています。この系は最も基本的なカントール極小系のひとつで、odometer system と名前がついています。odometer とは自動車の走行距離計のことで、繰り上がりの様子が似ているところからこの名前がついているようです。

odometer system の次元群 $K^0(X, \varphi)$ を求めてみましょう。まず X から最初の座標である $\mathbf{Z}/m_1\mathbf{Z}$ への射影 π_1 を考えましょう。π_1 によって X は m_1 個の開かつ閉な集合に分割されています。これらの集合の上の特性関数を $f_0, f_1, \cdots f_{m_1-1}$ とします。すると $f_i \circ \varphi^{-1} = f_{i+1}$ であることから、次元群 $K^0(X, \varphi)$ においては、$[f_0] = [f_1] = \cdots [f_{m_n-1}]$ であることになります。この元を e_1 とおきます。次に X から $\mathbf{Z}/m_2\mathbf{Z}$ への射影 π_2 を考えます。同じように X は m_2 個の開かつ閉な集合に分割されますが、それらの上の特性関数はやはり次元群においては同じ元を定めます。これを e_2 とします。すると e_1 と e_2 の間に

は、$e_1 = (m_2/m_1)e_2$ という関係が成り立っています。つまり e_1 の生成する部分群 $\mathbf{Z}$ は、e_2 の生成する $\mathbf{Z}$ に m_2/m_1 倍されて入っているわけです。この作業をずっと続けていくと、結局のところ $K^0(X,\varphi)$ は、整数群 $\mathbf{Z}$ の m_{n+1}/m_n 倍写像による帰納極限として求まることがわかります。整理して書くと

$$K^0(X,\varphi) = \bigcup \frac{1}{m_n}\mathbf{Z}$$

となります。もちろん次元群の順序構造は、$K^0(X,\varphi)$ を実数の部分集合として見た場合の自然な順序と一致しています。

いま述べた例は最も簡単な場合ですが、一般の場合でも同じようにして次元群を求めます。おおざっぱに言えば、X の分割をとってそこで φ で移るものを同一視し、分割をどんどん細かくしていって次元群を帰納極限として表すというわけです。

さてこの節の最後に、ジョルダノ・パットナム・スカウによる分類定理を紹介します。

定理 3 ([3])**.** (X_i,φ_i) $(i=1,2)$ を二つのカントール極小系とするとき次は同値。

(i) $K^0(X_1,\varphi_1)$ と $K^0(X_2,\varphi_2)$ は順序単位元の位置も込めて順序群として同型。

(ii) (X_1,φ_1) と (X_2,φ_2) は強軌道同型である。

定理のなかに出ている強軌道同型という関係は、彼らによって定義されたカントール極小系の間の新しい同値関係です。その名前の示すとおり、軌道同型よりは条件として強いというもので、共役と軌道同型のちょうどあいだに位置しています。このノートでは正確な定義は必要ないので省略することにします。

3　カントール極小系の拡大と次元群

有限巡回群に値を持つコサイクルによるカントール極小系の拡大を定義します。

自然数 n を固定します。X から $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ への連続写像 c が与えられたとき、

$$Y = X \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

$$\psi(x,k) = (\varphi(x), k + c(x))$$

とおくことによって新しい位相力学系 (Y,ψ) が得られます。この系を、コサイクル c による (X,φ) の拡大と呼びます。Y から X へは自然な射影 π が存在していて、$\pi\circ\psi = \varphi\circ\pi$ が成り立っています。このようなとき写像 $\pi\colon (Y,\psi)\to(X,\varphi)$ は半共役写像であるといわれます。

定義 4. X から $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ への連続写像 c がコバウンダリーであるとは、連続写像 $b : X \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ が存在して、$c = b - b \circ \varphi^{-1}$ となることをいう。また、$C(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ をコバウンダリーの全体がなす部分加群で割ったものを $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 値のコホモロジー群といい、$H^1_\varphi(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ と書く。

二つのコサイクル c_1 と c_2 が $H^1_\varphi(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ において同じ元を定めるならば、c_1 と c_2 による拡大は位相共役になることがすぐにわかります。

補題 5 ([7])**.** カントール極小系 (X, φ) に対して、$H^1_\varphi(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ は自然に $K^0(X, \varphi)/nK^0(X, \varphi)$ に同型である。さらに、$e \in K^0(X, \varphi)/nK^0(X, \varphi)$ による拡大 (Y, ψ) が極小になるためには、e と n が $K^0(X, \varphi)/nK^0(X, \varphi)$ のなかで互いに素であることが必要十分である。

(Y, ψ) が拡大であるとき、Y 上の自己同相写像 γ を $\gamma(x, k) = (x, k + 1)$ と定め、これをずらし写像と呼びます。$\gamma \circ \psi = \psi \circ \gamma$ となることがわかります。

カントール極小系 (Y, ψ) に対して、

$$C(\psi) = \{\gamma \in \mathrm{Homeo}(X); \gamma \circ \psi = \psi \circ \gamma\}$$

とおきます。この群は (Y, ψ) の自己同型群と呼ばれるものです。ずらし写像は $C(\psi)$ の元ですが、逆に $C(\psi)$ の元で位数有限のものは、必ずコサイクルによる拡大を用いてずらし写像として書けることがわかります。つまり、位数有限の自己同型を調べることは、有限巡回群による拡大を調べることと同じであるといえます。

特別な場合として、(X, φ) の順序単位元 $[1] \in K^0(X, \varphi)$ による拡大を考えてみます。この場合、(Y, ψ) とは単に (X, φ) と $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ との積にほかなりません。さらに、$X \times \{0\}$ における first return を考えると、(Y, ψ) を調べることと (X, φ^n) を調べることはほぼ同じであると言えます。すると自然な問題として、(X, φ^n) の次元群と (X, φ) の次元群はどの程度関係するか、もしくは (X, φ^n) と (X, φ) の（強）軌道同型類はどの程度関係するかという問いが浮かんできます。これについて、以下のような例が構成できることがわかりました。

命題 6. (Z, τ) を 5^∞ 型の odometer system とする。次の条件それぞれに対して、条件を満たすようなカントール極小系 (X, φ) であって (Z, τ) に強軌道同型であるものが存在する。

(i) (X, φ^2) と (Z, τ^2) は強軌道同型ではあるが共役ではない。
(ii) (X, φ^2) と (Z, τ^2) は軌道同型ではあるが強軌道同型ではない。
(iii) (X, φ^2) と (Z, τ^2) は軌道同型ですらない。

つまり、もとのカントール極小系が強軌道同型であっても、一般にはその二乗にいい性質

を期待することは出来ないということです。（累乗であっても同じです。）

4 ｍｏｄ写像とその核

前の節ではカントール極小系 (X,φ) の自己同型群 $C(\varphi)$ を定義しました。次のようにして $C(\varphi)$ を次元群に自然に作用させることができます（[4]）。すなわち $\gamma \in C(\varphi)$ に対して、

$$[f] \mapsto [f \circ \gamma^{-1}] \ \text{ for all } [f] \in K^0(X,\varphi)$$

とおき、この写像を $\mathrm{mod}(\gamma)$ と書きます。$\mathrm{mod}(\gamma)$ は次元群の上の自己同型として well defined であって、mod は $C(\varphi)$ から $\mathrm{Aut}(K^0(X,\varphi))$ への群準同型になります。

この mod による核を $T(\varphi)$ と書くことにします。つまり

$$T(\varphi) = \{\gamma \in C(\varphi)\ ;\ \mathrm{mod}(\gamma) = \mathrm{id}\}$$

です。このノートでは C^* 環のことには全く触れていませんが、C^* 環の自己同型から見れば、近似的内部自己同型群に相当する部分が $T(\varphi)$ であるといえます。

[7] において定義された、$T(\varphi)$ の元に対する新しい不変量について説明します。mod 写像を見ているだけでは $T(\varphi)$ の元に関する情報を得ることは出来ませんが、次のようにして $T(\varphi)$ から $\mathrm{Ext}(K^0(X,\varphi),\mathbf{Z})$ への群準同型が定義できて、自明でない情報をもたらしてくれます。

まず φ に関して不変な X 上の確率測度 μ を固定します。$\gamma \in T(\varphi)$ であるとします。任意の $[f] \in K^0(X,\varphi)$ に対して、

$$f - f \circ \gamma^{-1} = g - g \circ \varphi^{-1}$$

を満たすような $g \in C(X,\mathbf{Z})$ が存在するはずです。(X,φ) は極小なので、この g は f に対して定数関数のずれを除いて唯一に決まります。したがって g を μ で積分した値 $\mu(g)$ は、$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ において意味をもつことになります。すると

$$K^0(X,\varphi) \ni [f] \mapsto \mu(g) \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

という写像が、群準同型として well defined であることがわかります。この群準同型は μ によっています。$K^0(X,\varphi)$ から $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ への準同型の全体がなす加群を、$\mathbf{R}$ への準同型に持ち上がるもののなす部分加群でわったものが $\mathrm{Ext}(K^0(X,\varphi),\mathbf{Z})$ ですから、上で得られた群準同型を $\mathrm{Ext}(K^0(X,\varphi),\mathbf{Z})$ の元と見なせます。これを $\eta(\gamma)$ と書きます。この $\eta(\gamma)$ は、最初に固定した μ によっていないことがわかります。また $\eta : T(\varphi) \to \mathrm{Ext}(K^0(X,\varphi),\mathbf{Z})$ は群準同型になっています。

このようにして得られた不変量 η は、実は C^* 環の自己同型と密接な関連を持っています。しかしこのノートではあまり C^* 環論には立ち居らないつもりなので、これ以上は触れません。興味のある方は [7] を参照なさってください。

ともかく私たちは、

$$C(\varphi) \supset T(\varphi) \supset \ker \eta \supset \mathbf{Z}\varphi$$

という群の包含を得ました。ここで右端の $\mathbf{Z}\varphi$ とは、φ によって生成される整数群のことを指しています。では、前に例であげた odometer system と呼ばれるカントール極小系の場合に、この群の包含がどうなっているのかを考えましょう。(X, φ) を $\{m_n\}_n$ 型の odometer system とします。X は位数 m_n の巡回群の射影極限でした。いま X の元 x に対して、X を群だと思って、x を足すという $\mathrm{Homeo}(X)$ の元 γ_x が考えられます。明らかに $\gamma_x \in C(\varphi)$ であり、この対応を通して X と $C(\varphi)$ は同型になります。また、odometer system の次元群の自己同型群は自明なので、この場合には $C(\varphi) = T(\varphi)$ となります。次に η についてですが、ホモロジー代数を使って計算すると $\mathrm{Ext}(K^0(X, \varphi), \mathbf{Z})$ がちょうど $X/\mathbf{Z}\varphi$ に同型であることがわかります。そして η は $X \cong T(\varphi)$ から $X/\mathbf{Z}\varphi$ への商写像になっていることが計算によってわかります。

上のケースでは $\ker \eta$ が自明な部分群 $\mathbf{Z}\varphi$ に一致していました。次の節では、そうならない例が存在することを説明します。

5　極小サブシフト

この節ではサブシフトと呼ばれる位相力学系を説明します。

まず有限集合 A を固定します。$Y = A^{\mathbf{Z}}$ を A の両側無限列の全体とします。Y 上の自己同相写像 σ を

$$\sigma(y)_i = y_{i+1} \quad \text{for all } y \in Y \text{ and } i \in \mathbf{Z}$$

と決めます。σ は両側無限列 y を一文字ぶんだけずらす写像です。この (Y, σ) はカントール集合上の位相力学系ですが、極小ではありません。Y の閉部分集合で σ 不変なものがたくさん存在するからです。そのような不変閉集合のひとつを X とすると、σ を X に制限することにより力学系 (X, σ) が得られます。この (X, σ) のことを（両側）サブシフトといいます。不変閉集合 X を取り替えることにより、いろいろな力学系が得られるわけです。

例として最初の有限集合を $A = \{0, 1\}$ とおき、

$$X = \{x \in Y \text{ ; 無限列 } x \text{ には } 11 \text{ という文字列は現れない } \}$$

としましょう。X が σ 不変な閉部分集合であることは明らかなので、(X, σ) はサブシフトになっています。しかし、やはり (X, σ) は極小ではありません。たとえば $\cdots 0000 \cdots$ という列は X の点ですが、σ の固定点になっているからです。この (X, σ) は、ふつうマルコフと呼ばれるクラスのサブシフトになっています。マルコフサブシフトはサブシフトの研究において最も重要な概念のひとつですが、決して極小にはなりません。今から考えようとしている極小なサブシフトは、マルコフや sofic といった通常考えられるようなサブシフトとはおおよそ掛け離れたものです。

以下では、極小なサブシフトの例として、substitution rule から作られるサブシフトについて説明します。

有限集合 A に対して、A の元からなる有限文字列の全体を A^+ と書き、A から A^+ への写像 θ のことを substitution rule と呼びます。たとえば $A = \{0, 1\}$ のとき、

$$\theta(0) = 01,\ \theta(1) = 10$$

などといった感じです。この例では 0 という文字も 1 という文字も、どちらも長さ 2 の文字列に移っていますが、一般には文字列の長さは一定でなくていいし、もちろんもっと長くても構いません。substitution rule θ が与えられると、一文字ごとに θ を適用することによって、その巾乗が考えられます。たとえばいま例にあげた θ なら、

$$\begin{aligned} \theta(0) &= 01 \\ \theta^2(0) &= 0110 \\ \theta^3(0) &= 01101001 \\ \theta^4(0) &= 0110100110010110 \end{aligned}$$

といった調子です。そうするとこの例でも明らかなように、どんどん θ を繰り返すことにより、A の文字からなる片側無限列 x_θ が得られます。特に上の例で得られる片側無限列 x_θ は、実はとても古くから知られていた列で、特別に Morse sequence という名前がついています。

さてこのようにして作られた x_θ に対して、$Y = A^{\mathbf{Z}}$ の部分集合 X を

$$X = \{x \in Y\ ;\ x \text{ は } x_\theta \text{ に現れる文字列だけからなる }\}$$

とおきます。例えば Morse sequence の場合なら、x_θ には 000 という文字列は決して現れないことがわかるので、X のどんな元 x にも 000 という文字列は含まれてはいけないことになります。この X は明らかに σ 不変な閉集合ですから、これで (X, σ) というサブシフトが出来ました。次のことが証明できます。

定理 7 ([5])**.** substitution rule から作られたサブシフト (X,σ) は、X が有限集合になる場合を除き、カントール極小系になる。

極小サブシフトのなかでも substitution rule から出来るサブシフトは、最も基本的なものです。このクラスのサブシフトのブラッテリ図式との関係や次元群の計算などは、[2] ですでに詳しく調べられています。

さて Morse sequence から出来るカントール極小系を (X,σ) としましょう。Morse sequence の場合の substitution rule θ は文字 0 と文字 1 に関して対称なので、$C(\sigma)$ には、文字 0 と文字 1 を入れ替えるという位数 2 の自己同相 γ があることがわかります。(0 と 1 からなる有限文字列 w が x_θ に現れるならば、w の 0 と 1 を引っくり返した有限文字列 $\overline{w}$ も x_θ に現れることがわかるからです。) 一般に $A=\{0,1\}$ の上の substitution rule θ で、$\theta(0)$ と $\theta(1)$ の長さが等しくかつ

$$\theta(0) \text{ の } i \text{ 番目の文字} \neq \theta(1) \text{ の } i \text{ 番目の文字}$$

というようなものを考えましょう。Morse sequence のときと同様に、θ から出来る極小サブシフト (X,σ) を考えると、$C(\sigma)$ には 0 と 1 を入れ替えるという位数 2 の自己同相 γ が存在します。

命題 8 ([1])**.** (X,σ) を上のようなものとするとき、$C(\sigma)$ は γ と σ から生成される。

この位数 2 の自己同相 γ が次元群にどう作用するかを計算すると次を得ます。以下計算を簡単にするために $\theta(0)$ の最後の文字は 0 であるとします。(そうでなければ θ^2 を考えればいいだけです。) また文字列 $\theta(0)$ の長さを r、$\theta(0)$ に現れる 01 の個数を c とします。

命題 9. (X,σ) 及び γ を上の通りとする。$\gamma\in T(\sigma)$ となるためには、$\theta(0)$ に現れる 0 と 1 の個数が等しい事が必要十分である。またこの条件がなりたっているとき次元群は、

$$K^0(X,\sigma)=\mathbf{Z}[\frac{1}{r}]\oplus\mathbf{Z}$$

$$K^0(X,\sigma)^+=\{(p,q)\ ;\ (r-1)p+cq>0\}\cup\{(0,0)\},\ [1]=(2,0)$$

であり、さらに $\eta(\gamma)=0$ となる。

前に例としてあげた Morse sequence から決まるカントール極小系はこの命題の条件に当てはまりますから、$T(\sigma)$ の自明でない元に対して η による値がゼロになってしまうことになります。

参考文献

[1] E.Coven, *Endomorphisms of substitution minimal sets*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 20 (1971), 129-133.

[2] F.Durand, B.Host, C.Skau, *Substitutional dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 19 (1999), 953-993.

[3] T.Giordano, I.F.Putnam and C.F.Skau, *Topological orbit equivalence and C^*-crossed products*, J. reine angew. Math., 469 (1995), 51-111.

[4] T.Giordano, I.F.Putnam and C.F.Skau, *Full groups of Cantor minimal systems*, Israel J. Math, 111 (1999), 285-320.

[5] W.H.Gottschalk, *Substitution minimal sets*, Trans. Amer. Math. Soc., 109 (1963), 467-491.

[6] R.H.Herman, I.F.Putnam and C.F.Skau, *Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics*, Intern. J. Math., 3 (1992), 827-864.

[7] Matui H, *Ext and OrderExt classes of certain automorphisms of C^*-algebras arising from Cantor minimal systems*, preprint.

e-mail; matui@kusm.kyoto-u.ac.jp