

# Cantor minimal system と full group について

松井宏樹

## 1 序

$(X, \varphi)$  をコンパクトなハウスドルフ空間とその上の同相写像の組とする時、接合積と呼ばれる方法を用いて位相力学系  $(X, \varphi)$  から変換群  $C^*$  環  $C^*(X, \varphi)$  を作ることができます。空間  $X$  がカントール集合であって同相写像  $\varphi$  が極小である場合、力学系  $(X, \varphi)$  はカントール極小系であると言われます。ここで写像  $\varphi$  が極小とは、不変閉部分集合が自明なものに限ることを言い、またこの事は  $C^*(X, \varphi)$  が単純であることと同値です。カントール極小系から生じる  $C^*$  環に関してジョルダノ・パットナム・スカウの三人が得た結果を紹介することと、その  $C^*$  環の上の自己同型群に関して筆者が得た結果を報告することがこのノートの目的です。

## 2 カントール極小系の例とその分類

カントール極小系  $(X, \varphi)$  から生じる  $C^*$  環  $C^*(X, \varphi)$  の  $K$  群は、ピムズナー・ボアクレスクの完全列から次のように簡単に計算されます。

$$B_\varphi = \{f - f \circ \varphi^{-1}; f \in C(X, \mathbf{Z})\}$$

$$K^0(X, \varphi) = C(X, \mathbf{Z})/B_\varphi$$

$$K^1(X, \varphi) = \mathbf{Z}$$

ただし  $K^1(X, \varphi)$  の生成元は  $C^*(X, \varphi)$  の implementing unitary  $u$  であり、また  $K^0(X, \varphi)$  には正錐

$$K^0(X, \varphi)^+ = \{[f] \in K^0(X, \varphi); f \in C(X, \mathbf{Z})^+\}$$

が備わっていて、この正錐から入る順序構造に関して  $K^0(X, \varphi)$  は次元群になります。

まずこの節ではカントール極小系の例を幾つか挙げたあと、ジョルダノ・パットナム・スカウ（以下GPSと略します）の得た主要定理を述べます。

（例1）カントール極小系の最も基本的な例は odometer system と呼ばれているものです。2以上の自然数の増加列  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  があって、任意の  $n$  について  $m_n$  が  $m_{n+1}$  を割るとします。

$$X = \text{proj lim } \mathbf{Z}/m_n \mathbf{Z}$$

とおくと、 $X$  はカントール集合でありかつ位相群になります。空間  $X$  の上で  $(1, 1, \dots) \in X$  を足すという同相写像を  $\varphi$  とすれば、カントール極小系  $(X, \varphi)$  が得られます。これを  $(\{m_n\}_n$  型の) odometer system といいます。odometer とは自動車の走行距離計のことで、一の位がちょうど一回転すると十の位がひとつ進むという繰り上がりの様子が  $(X, \varphi)$  に似ているのでこのような名前になっています。

$C^*$  環  $C^*(X, \varphi)$  の  $K_0$  群は

$$K^0(X, \varphi) \cong \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{m_n} \mathbf{Z}$$

であって、自然な順序が入っています。

（例2）次にダンジョワ系を説明します。まず無理数  $\alpha \in [0, 1)$  をとり、 $S^1 \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  における  $\alpha$  回転  $R_\alpha$  を考えます。  $Q \subset S^1$  を  $R_\alpha$  不変な可算集合で、特に0を含むものとします。  $Q$  は互いに交わりを持たない高々可算個の  $R_\alpha$  軌道に分解されます。これを

$$Q = \bigcup_{k=1}^K \{\gamma_k + n\alpha; n \in \mathbf{Z}\}$$

と書きましょう。ただし  $K$  は有限もしくは可算無限の値です。また  $\gamma_1 = 0$  とします。  $S^1$  の有界ボレル関数のなす環のなかで

$$C(X) = C^*(C(S^1), \{\chi_{[n\alpha, n\alpha + \gamma_k)}; n \in \mathbf{Z} \ k = 1, 2, \dots, K\})$$

とします。円周  $S^1$  を点  $n\alpha + \gamma_k$  において切り開いたものが空間  $X$  であると思えます。  $X$  上の  $\alpha$  回転を  $\varphi$  とすると、カントール極小系  $(X, \varphi)$  が構成されます。

$(X, \varphi)$  の次元群は

$$K^0(X, \varphi) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\alpha \oplus \bigoplus_{k=2}^K \mathbf{Z}\gamma_k$$

になり、直和の記号を普通の足し算に読み替えることによって順序が得られます。

例 1・2 はどちらもカントール極小系  $(X, \varphi)$  が不変確率測度をただ一つしか持たない例です。不変確率測度は  $C^*(X, \varphi)$  のトレースと一対一に対応するので、上の例の  $C^*(X, \varphi)$  はトレースをただ一つ持つこととなります。

(例 3) 次に今までとは少し違う例を挙げます。頂点の集合  $V$  と辺の集合  $E$  からなるブラッテリ図形  $B = (V, E)$  を用意します。つまり

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

であって各  $V_n$  や  $E_n$  は有限集合であるとし、また source map 及び range map が  $s(E_n) \subset V_{n-1}, r(E_n) \subset V_n$  というふうに定まっているとします。さらに  $V_0 = \{v_0\}$  であり

$$s^{-1}(v) \neq \emptyset \text{ for } v \in V \setminus V_0, \quad r^{-1}(v) \neq \emptyset \text{ for } v \in V$$

と仮定します。  $B$  の無限辺列空間  $X_B$  を

$$X_B = \{(e_n)_{n=1}^{\infty}; e_n \in E_n, r(e_n) = s(e_{n+1}) \text{ for } n \in \mathbf{N}\}$$

と定義します。  $X_B$  は積位相によってカントール集合とみなせます。

いま、各  $v \in V \setminus V_0$  ごとに有限集合  $r^{-1}(v)$  に対して全順序が決まっているとします。このとき  $B = (V, E, \leq)$  は順序ブラッテリ図形と呼ばれます。ブラッテリ図形  $(V, E)$  から出来る  $AF$  環が単純であり、かつ

$$y_{min} = (e_n^-)_n \in X_B, \quad e_n^- \text{ is minimum in } r^{-1}(r(e_n^-)),$$

$$y_{max} = (e_n^+)_n \in X_B, \quad e_n^+ \text{ is maximum in } r^{-1}(r(e_n^+))$$

となるような点  $y_{min}, y_{max} \in X_B$  がそれぞれただひとつ存在するとき、順序ブラッテリ図形  $B = (V, E, \leq)$  は単純であるといえます。  $B$  が単純であるとき、次のようにしてカントール集合  $X_B$  の上の同相写像  $\varphi_B$  を定めることができます。まず  $y \in X_B \setminus \{y_{max}\}$  に対しては、

$$y = (e_n)_n \quad e_1, e_2, \dots, e_k \text{ are maximum but } e_{k+1} \text{ is not maximum}$$

であるとき、

$$\varphi_B(y) = (f_1, f_2, \dots, f_k, e_{k+1} + 1, e_{k+2}, \dots)$$

と決めます。ただし  $e_{k+1} + 1$  とは  $r^{-1}(r(e_{k+1}))$  の中で  $e_{k+1}$  よりも一つだけ大きい辺をあらわし、また  $f_1, f_2, \dots, f_k$  は全てそれぞれの全順序集合の中で最小の辺であって、かつ  $\varphi_B(y)$  が  $X_B$  の点として well defined であるようなものとします。そして  $y_{max}$  について

は  $\varphi_B(y_{max}) = y_{min}$  と定めます。これで  $\varphi_B$  は同相写像になっていることが確かめられ、 $(X_B, \varphi_B)$  はコントロール極小系であることもわかります。

ヘルマン・パットナム・スカウの三人は次の定理を示しました。

定理 2.1 ([3]). 上のようにつくったコントロール極小系  $(X_B, \varphi_B)$  から生じる次元群  $K^0(X_B, \varphi_B)$  は、ブラッテリー図形から得られる  $AF$  環の次元群と [1] の位置も込めて順序同型である。さらに任意のコントロール極小系  $(X, \varphi)$  に対して単純な順序ブラッテリー図形  $B$  が存在し、 $(X, \varphi)$  と  $(X_B, \varphi_B)$  は同型になる。

つまり例 3 の構成は、抽象的なコントロール極小系のひとつのモデルを与えているわけです。

G P S は次の分類定理を示しました。

定理 2.2 ([1]). コントロール極小系  $(X, \varphi)$  から生じる  $C^*$  環  $C^*(X, \varphi)$  は単純な  $AT$  環であってかつ実階数ゼロである。さらに二つのコントロール極小系  $(X_1, \varphi_1)$  と  $(X_2, \varphi_2)$  に対して次は同値である。

- (i)  $C^*$  環  $C^*(X_i, \varphi_i), i = 1, 2$ , は同型。
- (ii) 次元群  $K^0(X_i, \varphi_i), i = 1, 2$ , は [1] の位置も込めて順序同型。
- (iii)  $(X_i, \varphi_i), i = 1, 2$ , は強軌道同値。

定理の中に出てくる強軌道同値という関係を定義します。まず  $(X_1, \varphi_1)$  と  $(X_2, \varphi_2)$  が軌道同値であるとは、 $F : X_1 \rightarrow X_2$  という同相写像があって、任意の点  $x \in X_1$  に対して  $F(\text{Orb}(x)) = \text{Orb}(F(x))$  が成り立っていることを言うのでした。極小系には周期点はないので、次の式を満たす  $n : X_1 \rightarrow \mathbf{Z}$  と  $m : X_2 \rightarrow \mathbf{Z}$  が一意に決まります。

$$F(\varphi_1(x)) = \varphi_2^{n(x)}(F(x)) \text{ for all } x \in X_1$$

$$F^{-1}(\varphi_2(y)) = \varphi_1^{m(y)}(F^{-1}(y)) \text{ for all } y \in X_2$$

$(X_1, \varphi_1)$  と  $(X_2, \varphi_2)$  が強軌道同値であるとは、軌道同値であってかつ上の  $n, m$  がそれぞれ高々一点を除いて連続に取れる事を言います。つまり普通の軌道同値よりも強い条件というわけです。

「高々一点を除いて連続」という不思議な条件について少し説明します。順序ブラッテリー図形  $B$  から出来るコントロール極小系  $(X_B, \varphi_B)$  を考えましょう。 $(X_B, \varphi_B)$  から生じる  $C^*(X_B, \varphi_B)$  は、 $X_B$  における同値関係から出来る groupoid  $C^*$  環とも理解できます。つ

まり、 $x, y \in X_B$  が同じ  $\varphi_B$  軌道を持つとき  $x \sim y$  であるとして

$$G = \{(x, y) \in X_B \times X_B; x \sim y\}$$

とおくと、groupoid  $G$  から出来る  $C^*$  環は  $C^*(X, \varphi)$  に一致します。一方、 $x, y \in X_B$  がブラッテリ図形  $B$  のなかで同じ尻尾 (tail) を持つとき  $x \approx y$  と書くことにすれば、

$$H = \{(x, y) \in X_B \times X_B; x \approx y\}$$

という groupoid からは、ブラッテリ図形  $B$  に対応した  $AF$  環が生じることになります。 $C^*(H)$  は  $C^*(G) \cong C^*(X, \varphi)$  の部分環として

$$C^*(H) \cong C^*(C(X), uC_0(X \setminus \{y_{max}\}))$$

と書けます。この  $AF$  環のことを  $A_{\{y_{max}\}}$  と記します。二つの同値関係  $\sim$  と  $\approx$  は、 $y_{max}$  や  $y_{min}$  の軌道以外の点では全く一致しています。ところが  $y_{max} \sim y_{min}$  ではあっても  $y_{max} \approx y_{min}$  ではありません。 $AF$  環における同値関係とは、 $y_{max} \sim y_{min}$  を忘れた同値関係であるといえます。そして、 $C^*(X, \varphi)$  の同型類は  $K_0$  群によって決定されるため、結果として、 $y_{max}$  が例外点となり「高々一点を除いて連続」という条件が出てくる訳です。

強軌道同値という同値関係は、力学系のあいだの同型類よりもかなり弱い関係です。実際、任意の強軌道同値類のなかで任意のエントロピー  $\alpha \in [0, \infty]$  が実現できることが示されています ([7, 8])。

### 3 充足群と mod 写像

カントール力学系  $(X, \varphi)$  に対して

$$\tau[\varphi] = \{\psi \in \text{Homeo}(X); \exists n \in C(X, \mathbf{Z}) \text{ such that } \psi(x) = \varphi^{n(x)}(x) \text{ for all } x \in X\}$$

とおき、位相充足群と呼びます。この節では、位相充足群に関して G P S が得た定理と mod 写像について説明します。

位相充足群の元  $\psi \in \tau[\varphi]$  に対して

$$v_\psi = \sum_{k \in \mathbf{Z}} u^k \chi_{n^{-1}(k)}$$

とします。ただし  $n$  とは  $\psi$  を定めている  $C(X, \mathbf{Z})$  の関数であり、 $\chi$  は特性関数を現すものとします。この  $v_\psi$  は  $C^*(X, \varphi)$  のユニタリであり、また  $C(X)$  の正規化元であることがすぐにわかります。つまり位相充足群の元は  $C(X)$  のユニタリ正規化元と対応しているわけ

です。接合積  $C^*$  環  $C^*(X, \varphi)$  の  $K_1$  群は  $\mathbb{Z}$  だったので、 $v_\psi$  というユニタリはある整数を定めることになります。この整数を  $I(\psi)$  と書き、写像  $I: \tau[\varphi] \rightarrow \mathbb{Z}$  を指数写像と呼びます。指数写像  $I$  は群準同型であり、与えられた  $\psi \in \tau[\varphi]$  に対して

$$I(\psi) = \int_X n(x) d\mu(x)$$

と計算出来ることがわかります。ただし  $n$  とは  $\psi$  を定めている  $C(X, \mathbb{Z})$  の関数であり、また  $\mu$  は任意の不変確率測度です ( $\mu$  の取り方によらず  $I(\psi)$  という整数値は一意に決まります)。そして  $\tau[\varphi]_0 = \ker I$  とおきます。部分群  $\tau[\varphi]_0$  は、 $C^*$  環のユニタリ群の 1 を含む連結成分に相当すると思えます。

次に任意の点  $y \in X$  に対し、

$$\tau[\varphi]_y = \{\psi \in \tau[\varphi]; \psi(\text{Orb}^+(y)) = \text{Orb}^+(y)\}$$

とします。ここで  $\text{Orb}^+(y) = \{\varphi^m(y); m \in \mathbb{N}\}$  です。 $\tau[\varphi]_y$  は部分群になることがわかります。また  $\psi \in \tau[\varphi]$  が  $\tau[\varphi]_y$  の元であることと、対応するユニタリ  $v_\psi$  が前節で説明した  $AF$  環  $A_{\{y\}}$  のユニタリになることが同値であることもわかります。

このように定義された  $\tau[\varphi] \cdot \tau[\varphi]_0 \cdot \tau[\varphi]_y$  に関して G P S は次の定理を証明しました。

**定理 3.1** ([2]).  $(X_i, \varphi_i), i = 1, 2$ , が二つのカントール極小系であるとする。このとき次の三つの条件は同値である。

- (i)  $(X_i, \varphi_i), i = 1, 2$ , は flip conjugate 。
- (ii)  $\tau[\varphi_1]$  と  $\tau[\varphi_2]$  は群として同型。
- (iii)  $\tau[\varphi_1]_0$  と  $\tau[\varphi_2]_0$  は群として同型。

さらに  $y_i \in X_i$  をそれぞれ勝手な点とする時、次の二つの条件は同値である。

- (i)  $(X_i, \varphi_i), i = 1, 2$ , は強軌道同値。
- (ii)  $\tau[\varphi_1]_{y_1}$  と  $\tau[\varphi_2]_{y_2}$  は群として同型。

$\tau[\varphi]_0$  は常に群として単純であろうと G P S は予想しています。次元群  $K^0(X, \varphi)$  が 2-divisible の時には容易に単純性が示せますが、一般の場合には未解決です。

次に mod 写像について説明します。Homeo( $X$ ) における  $\tau[\varphi]$  の正規化群を  $N(\tau[\varphi])$  とします。 $N(\tau[\varphi])$  の元  $\gamma$  から、 $C^*$  環  $C^*(X, \varphi)$  上の自己同型  $s(\gamma)$  が

$$s(\gamma)(f) = f \circ \gamma^{-1} \text{ for all } f \in C(X)$$

となるように構成されます。この  $s(\gamma)$  が  $K_0$  群に導く作用のことを  $\text{mod}(\gamma)$  と書きましよう。つまり

$$\text{mod}(\gamma)([f]) = [f \circ \gamma^{-1}] \text{ for all } [f] \in K^0(X, \varphi)$$

です。写像  $\text{mod}$  は  $N(\tau[\varphi])$  から  $\text{Aut}(K^0(X, \varphi))$  への群準同型になります。

補題 3.2 ([2]). カントール極小系  $(X, \varphi)$  に対して  $\ker \text{mod} = N(\tau[\varphi]) \cap \overline{\tau[\varphi]}$  である。

エリオットによって、 $AT$  環の自己同型が  $K$  群を動かさないならば、その自己同型は近似的内部自己同型であるということが証明されています。位相充足群  $\tau[\varphi]$  は  $C^*$  環のユニタリと対応していたので、上の補題はエリオットの定理の類似とみなせます。

次の節のためにもうひとつ補題が必要です。

補題 3.3 ([2]).  $(X, \varphi)$  をカントール極小系とする。任意の  $\gamma \in N(\tau[\varphi])$  に対して  $\psi \in \tau[\varphi]$  が存在して、 $\tau = \psi^{-1} \circ \gamma$  とするとき

$$\tau \circ \varphi \circ \tau^{-1} = \varphi \text{ or } \varphi^{-1}$$

となる。

## 4 自己同型と Ext 群

この節では [6] において得られた結果といくつかの例について述べます。

$(X, \varphi)$  がカントール極小系のとき

$$T(\varphi) = \{\gamma \in N(\tau[\varphi]); s(\gamma) \text{ は } K \text{ 群を動かさない}\}$$

とおきます。  $T(\varphi)$  は  $\ker \text{mod}$  の (高々位数 2 の) 部分群であることに注意して下さい。今から  $T(\varphi)$  の元  $\gamma$  に対して新しい不変量を考えます。まず

$$C(\varphi) = \{\tau \in \text{Homeo}(X); \tau \circ \varphi \circ \tau^{-1} = \varphi\}$$

とします。  $C(\varphi) \subset N(\tau[\varphi])$  に注意します。前節の補題 3.3 より  $\gamma \in T(\varphi)$  は  $\tau[\varphi]$  の元と  $C(\varphi)$  の元の積に書けることがわかります。位相充足群  $\tau[\varphi]$  は  $C^*$  環の内部自己同型に対応するものなので、その部分は無視して、 $\gamma$  は最初から  $T(\varphi) \cap C(\varphi)$  に入っているとしましょう。不変確率測度  $\mu$  をひとつ固定します。任意の  $f \in C(X, \mathbf{Z})$  に対して  $\text{mod}(\gamma)([f]) = [f]$  なので、

$$\exists g \in C(X, \mathbf{Z}) \text{ such that } f - f \circ \gamma^{-1} = g - g \circ \varphi^{-1}$$

となります。この  $g$  は定数関数のずれを除いて唯一に決まるので、 $[f]$  を  $\mu(g)$  に送ることによって、 $K^0(X, \varphi)$  から  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  への群準同型が得られます。さらにこの群準同型を  $\text{Ext}(K^0(X, \varphi), \mathbf{Z})$  の元と思うことにすれば、不変確率測度  $\mu$  の取り方にも依存しないことがわかります。このようにして、 $T(\varphi) \cap C(\varphi)$  の元  $\gamma$  から、 $\text{Ext}(K^0(X, \varphi), \mathbf{Z})$  のあるクラスを定めることができました。このクラスのことを  $\eta(\gamma)$  と書くことにします。

さて一方で  $C^*$  環のことを考えます。 $N(\tau[\varphi])$  の元  $\gamma$  から  $s(\gamma)$  という  $C^*(X, \varphi)$  の自己同型が作れたのでした。 $s(\gamma)$  による mapping torus を  $M_{s(\gamma)}$  と書きましょう。次の  $C^*$  環の短完全列が得られます。

$$0 \rightarrow SC^*(X, \varphi) \rightarrow M_{s(\gamma)} \rightarrow C^*(X, \varphi) \rightarrow 0$$

いま  $\gamma$  が  $T(\varphi)$  の元であったとすると、上の完全列から  $K$  群の完全列ができることとなります。

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow K_0(M_{s(\gamma)}) \rightarrow K^0(X, \varphi) \rightarrow 0$$

$C^*$  環の自己同型  $s(\gamma)$  からこのようにして定まる  $\text{Ext}$  群のクラスを  $\eta(s(\gamma))$  とします。

定理 4.1 ([6]). 上で定めた  $\text{Ext}$  群の二つのクラスは同じである。つまり  $\eta(\gamma) = \eta(s(\gamma))$ 。

岸本とクムジアンは [4] において、 $AT$  環  $A$  に対して

$$\eta : \overline{\text{Inn}}(A) \ni \alpha \mapsto \eta(\alpha) \in \bigoplus_{i=0}^1 \text{Ext}(K_i(A), K_{1-i}(A))$$

が全射になることを示しました。さらに岸本は次の定理を示しました。

定理 4.2 ([5]).  $A$  が 1 を持つ単純な  $AT$  環であって実階数ゼロであるとする。 $K_1(A)$  が  $\mathbf{Z}$  ではなくかつ  $A$  がトレースをただ一つ持つとき、上で述べた群準同型  $\eta$  の核は  $\text{HIInn}(A)$  に一致する。すなわち  $\eta$  を通して

$$\overline{\text{Inn}}(A) / \text{HIInn}(A) \cong \bigoplus_{i=0}^1 \text{Ext}(K_i(A), K_{1-i}(A))$$

である。

ここで  $\text{HIInn}(A)$  とは内部自己同型にホモトピックな近似的内部自己同型の全体のなす群を指します。

カントール極小系から生じる  $C^*$  環の  $K_1$  群は常に  $\mathbf{Z}$  でした。この場合にも上の定理と同じ事実が成り立ちます。

定理 4.3 ([6]).  $A$  が 1 を持つ単純な  $AT$  環であって実階数ゼロであるとする。  $K_1(A) \cong \mathbf{Z}$  であるとき、上で述べた群準同型  $\eta$  の核は  $\text{HIInn}(A)$  に一致する。

証明には、OrderExt 群と呼ばれる群への群準同型の核に関する岸本の結果が必要です。

最後に、定理 4.1 で述べた群準同型  $\eta$  の取りうる値について、例をいくつか挙げます。  $\eta$  について調べるには、コントロール極小系  $(X, \varphi)$  に対して  $C(\varphi)$  を知らなければなりません。しかし一般には、この群の構造を知ることは非常に困難です。まず最も簡単な例から説明します。

(例 4)  $(X, \varphi)$  が odometer system であるとしましょう。このときには、 $X$  が可換群であることから、 $C(\varphi) \cong X$  であることがすぐにわかります。  $K^0(X, \varphi)$  は自明な自己同型しか持ち得ないので、 $\eta$  は  $C(\varphi)$  全体で定義されます。代数的な計算により  $\text{Ext}(K^0(X, \varphi), \mathbf{Z})$  は、 $X$  を  $\mathbf{Z} \cong \{\varphi^n; n \in \mathbf{Z}\}$  でわったものに同型であることがわかります。そして写像  $\eta$  はまさしく、 $C(\varphi) \cong X$  から  $\text{Ext}(K^0(X, \varphi), \mathbf{Z}) \cong X/\mathbf{Z}$  への商写像と一致しています。つまり odometer system の場合には、 $\eta$  は全射になり核は自明なものに限るということです。

(例 5) 次に図 1 で表される順序ブラッテリ図形を考えましょう。ただし  $a < b < c < d$  かつ  $e < g < f < h$  と順序が入っているとします ( $e < f < g < h$  とすると odometer system になります)。この順序ブラッテリ図形から生じるコントロール極小系  $(X, \varphi)$  は odometer system に強軌道同値です。しかし  $C(\varphi)$  は  $\varphi$  のべき乗という自明なものに限ることがわかります。つまりこの場合には  $\eta$  はゼロ写像にしかありません。

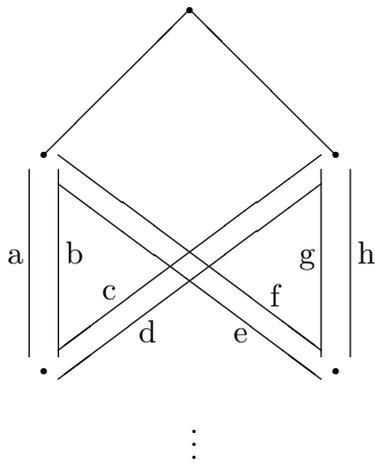


図 1

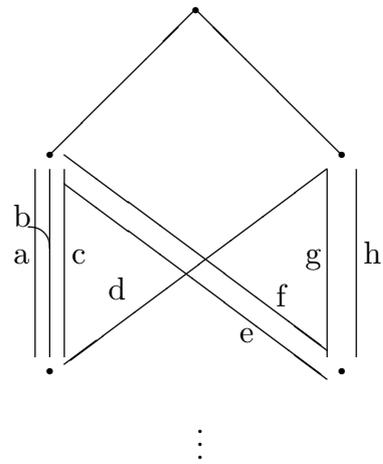


図 2

次の例を説明する前に、カントール極小系の拡大についての補題がひとつ必要です。 $(X, \varphi)$  をカントール極小系とし  $p$  を自然数とします。さらに  $f \in C(X, \mathbb{Z})$  を固定します。カントール集合  $Y = X \times \{0, 1, \dots, p-1\}$  の上の同相写像  $\psi$  を

$$\psi(x, k) = (\varphi(x), k + f(x)) \text{ for } (x, k) \in X \times \{0, 1, \dots, p-1\}$$

とします。ただし足し算は剰余  $p$  で考えます。すると自然な射影によって  $(Y, \psi)$  は  $(X, \varphi)$  の拡大になります。このようにして出来る力学系  $(Y, \psi)$  は関数  $f$  の  $K^0(X, \varphi)/pK^0(X, \varphi)$  におけるクラスにしかよらないことがわかります。

補題 4.4 ([6]). 上のようにして作った  $(Y, \psi)$  がカントール極小系になるには、

$$k[f] \neq 0 \text{ in } K^0(X, \varphi)/pK^0(X, \varphi) \text{ for } k = 1, 2, \dots, p-1$$

が必要十分である。

$Y$  の上の同相写像  $\gamma$  を

$$\gamma(x, k) = (x, k + 1) \text{ for } (x, k) \in Y$$

とします。すると  $\gamma$  は  $C(\psi)$  の位数  $p$  の元になります。

(例 6) 図 2 で示される順序ブラッテリ図形から出来るカントール極小系  $(X, \varphi)$  を考えま

す。ただし順序は  $a < b < c < d$  かつ  $e < g < f < h$  であるとします。例 5 と同様に  $C(\varphi)$  は自明な群にしかありません。そこで  $(X, \varphi)$  の拡大を考えましょう

この力学系の次元群  $K^0(X, \varphi)$  は  $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbf{Z}$  に同型になります。 $\mathbf{Z}$  の直和成分のほうの生成元を  $[f]$  とし、上記の方法で  $[f]$  による 2 対 1 の拡大  $(Y, \psi)$  をつくります。すると群  $C(\psi)$  は、 $\psi$  自身と上で述べた位数 2 の同相写像  $\gamma$  で生成されることがわかります。さらにこの  $\gamma$  は次元群の上に自明な作用を導きます。つまり  $\gamma$  は  $C(\psi) \cap T(\psi)$  の元です。なおかつ Ext 群におけるクラス  $\eta(\gamma)$  はゼロになってしまう事もわかります。この例は、非自明な元に対して  $\eta$  による値がゼロになりうることを示しています。

## 参考文献

- [1] T.Giordano, I.F.Putnam and C.F.Skau, *Topological orbit equivalence and  $C^*$ -crossed products*, J. reine angew. Math., 469 (1995), 51-111.
- [2] T.Giordano, I.F.Putnam and C.F.Skau, *Full groups of Cantor minimal systems*, preprint.
- [3] R.H.Herman, I.F.Putnam and C.F.Skau, *Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics*, Intern. J. Math., 3 (1992), 827-864.
- [4] Kishimoto A. and A.Kumjian, *The Ext class of an approximately inner automorphism*, Trans. Amer. Math. Soc., 350 (1998), no. 10, 4127-4148.
- [5] Kishimoto A., *Unbounded derivations in AT algebras*, J. Funct. Anal., 160 (1998), no 1, 270-311.
- [6] Matui H., *Ext and OrderExt classes of certain automorphisms of  $C^*$ -algebras arising from Cantor minimal systems*, preprint.
- [7] Sugisaki H., *The relationship between entropy and strong orbit equivalence for the minimal homeomorphisms I*, preprint.
- [8] Sugisaki H., *The relationship between entropy and strong orbit equivalence for the minimal homeomorphisms II*, Tokyo J. Math., 21 (1998) no. 2, 311-351.